



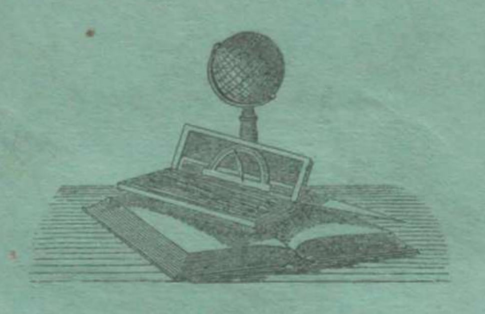
НАЧАЛЬНЫЯ ОСНОВАНІЯ ГЕОМЕТРІИ

и

СОБРАНІЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХЪ ЗАДАЧЪ.

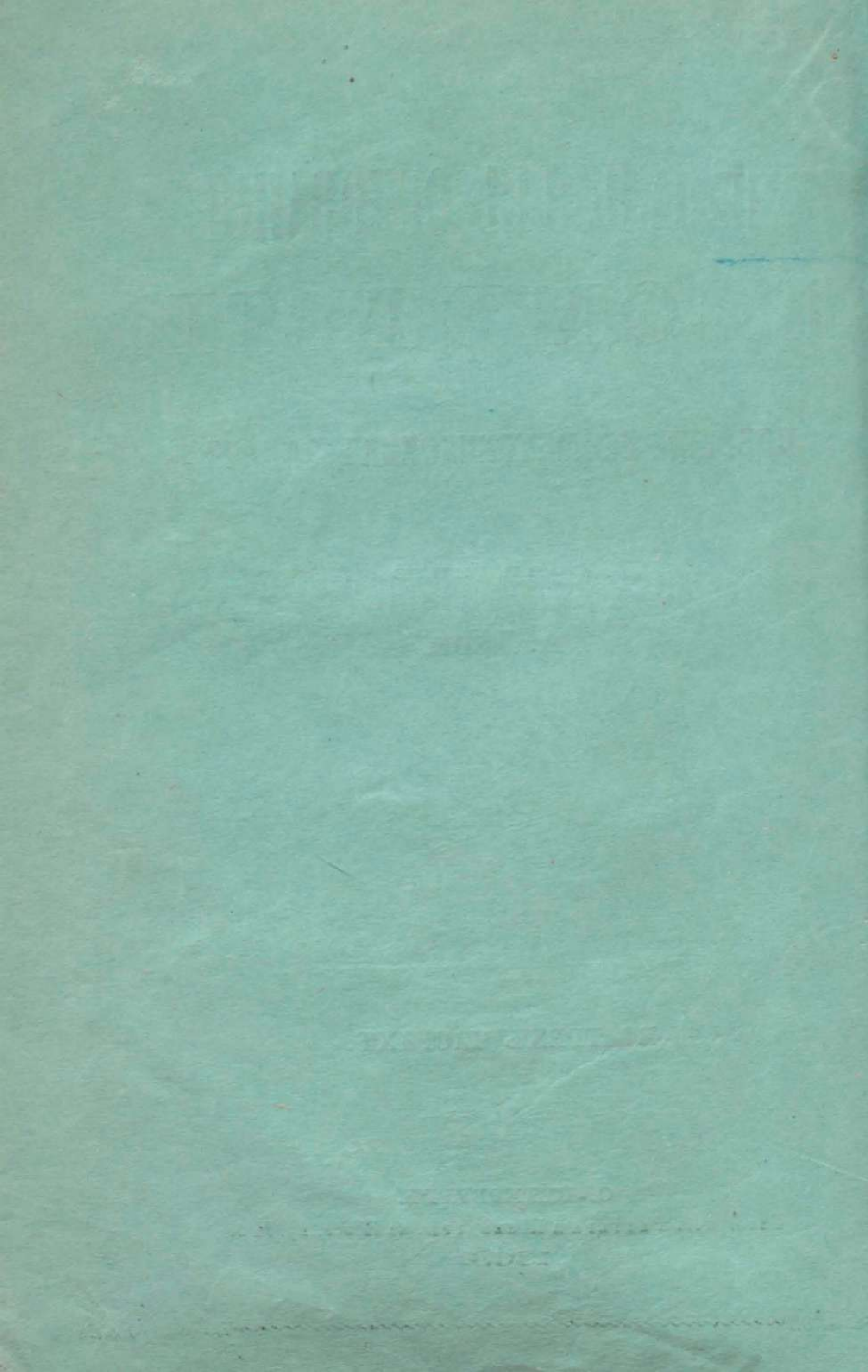
СОЧИНЕНІЕ

А. ЛЁВЕ.



ВЪ ТРЕХЪ ЧАСТЯХЪ.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.
Типографія Ретгера и Шнейдера, на Невск. пр. № 5.
1868.



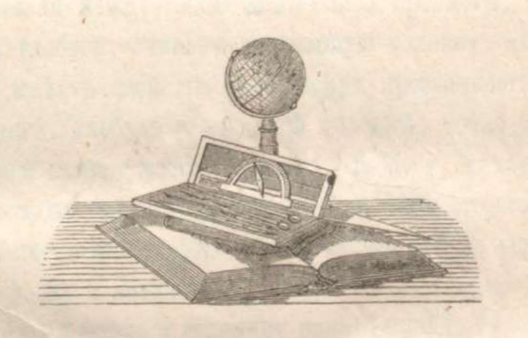
НАЧАЛЬНЫЯ ОСНОВАНІЯ ГЕОМЕТРІИ

И

СОБРАНІЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХЪ ЗАДАЧЪ.

СОЧИНЕНІЕ

А. ЛЁВЕ.



ЧАСТЬ I.

ПЛАНИМЕТРІЯ.



С.-ПЕТЕРБУРГЪ.
Въ типографіи Ретгера и Шнейдера, Невскій просп. № 5.
1868.


2007089955



Начальныя основанія Геометріи.

ЧАСТЬ I.

ПЛАНИМЕТРІЯ.

ВВЕДЕНІЕ.

Величина тѣла; его измѣренія. Поверхность, линія и точка. Прямая и кривая линія; ломаная линія. Плоскость. Предметъ Геометріи. Предложеніе, слѣдствіе, задача. Главнѣйшія аксіомы.

1. Сравнивая между собою какіе-либо предметы, какъ напримѣръ книгу, глобусъ, стаканъ и сахарную головку, мы замѣчаемъ, что стаканъ имѣетъ свойства (напримѣръ прозрачность), не находящіяся въ книгѣ, глобусѣ и сахарной головкѣ; точно также не всѣ свойства книги принадлежатъ стакану, глобусу, сахарной головкѣ и т. д.; но каждый предметъ, каковы бы ни были его особенныя свойства, непремѣнно долженъ состоять изъ какого-нибудь вещества и долженъ имѣть форму и величину.

Разсматривая форму и величину какого-нибудь тѣла, мы не обращаемъ вниманія на его вещество; такъ напримѣръ при опредѣленіи величины камня, намъ нѣтъ надобности знать, имѣемъ-ли мы дѣло съ гранитомъ или мраморомъ; точно также при опредѣленіи величины поля мы не заботимся о его почвѣ.

2. Всякое тѣло имѣетъ протяженіе по тремъ направленіямъ: въ длину, ширину и высоту. Такъ какъ протяженіе тѣла опредѣляется измѣреніемъ, то мы говоримъ: *тѣло имѣетъ три измѣренія*.

Измѣренія тѣла не всегда сохраняютъ свои названія; такъ напримѣръ комната имѣетъ длину, ширину и высоту — рѣка имѣетъ

длину, ширину и глубину — книга имѣетъ длину, ширину и толщину — стѣна имѣетъ длину, толщину и высоту.

3. Всякое тѣло ограничено со всѣхъ сторонъ *поверхностями*. Поверхность имѣетъ два измѣренія: длину и ширину.

Названія измѣреній поверхности зависятъ отъ ея положенія; такъ напримѣръ мы говоримъ: дорога имѣетъ длину и ширину — поверхность стѣны имѣетъ длину и высоту. Мы можемъ себѣ представить поверхность независимо отъ тѣла; такъ напримѣръ при окраскѣ пола или посѣвѣ пашни мы имѣемъ дѣло съ поверхностями, и потому не обращаемъ вниманія на толщину пола или глубину землянаго слоя. Ясно представляется намъ поверхность, которою отдѣляется въ стаканѣ вода отъ плавущаго на ней масла.

4. Поверхность ограничена *линіями*. Линія имѣетъ только одно измѣреніе: *длину*.

Линія можетъ быть разсмотрена независимо отъ поверхности; такъ напримѣръ при опредѣленіи разстоянія между двумя городами мы имѣемъ дѣло съ линіею, и потому не обращаемъ вниманія на ширину разсматриваемой дороги. На стѣнѣ, выкрашенной разноцвѣтными полосами, границы между ними представляются линіями. Ясно представляются намъ линіи, которыми ограничивается поверхность, образуемая водою и плавущимъ на ней масломъ.

Линія ограничивается *точками*. Точка не имѣетъ измѣреній.

5. Линіи бываютъ весьма различнаго вида. Простѣйшая изо всѣхъ линій есть *прямая*. Прямою называется такая линія, которая относительно ея точекъ, имѣетъ одно и то-же положеніе [1]. Соотвѣтственно этому опредѣленію мы говоримъ: прямая есть такая линія, части которой имѣютъ одно и то-же направленіе.

Прямая линія есть кратчайшее разстояніе между двумя точками [2].

6. Линія, которая на всемъ протяженіи измѣняетъ свое направленіе, называется *кривою*. Если себѣ представимъ, что прямая линія

---

[1]) Опредѣленіе *Эвклида*, знаменитаго математика, жившаго въ Александріи около 300 года до Р. Х.

[2]) Опредѣленіе *Архимеда*, греческаго геометра, жившаго 212 лѣтъ до Р. Х.

вращается, но положеніе ея оконечныхъ точекъ при этомъ не измѣняется, то ни одна точка ея не перемѣнитъ даннаго ей положенія; слѣдовательно и положеніе прямой линіи при этомъ не измѣняется. Вращая же кривую линію, при постоянномъ положеніи ея оконечностей, мы замѣчаемъ, что при этомъ каждая точка безпрерывно перемѣняетъ свое положеніе.

Линія, составленная изъ прямыхъ линій, называется *ломаною*.

7. *Плоскостью* называется такая поверхность, въ которой уляжется всякая прямая линія, будучи положена на ней въ какомъ угодно направленіи. Поверхность зеркальнаго стекла и поверхность гладко-полированнаго мрамора можно принять за плоскости.

8. Разсмотрѣніе свойствъ линій, поверхностей и тѣлъ относительно ихъ величины, формы и взаимнаго положенія, составляетъ предметъ *Геометріи* [1]).

Геометрія раздѣляется на *Планиметрію* и *Стереометрію*. Планиметрія разсматриваетъ геометрическія величины, лежащія въ одной плоскости. Стереометрія имѣетъ дѣло съ геометрическими величинами, находящимися въ разныхъ плоскостяхъ; она разсма-

[1]) Слово «Геометрія» греческаго происхожденія; въ переводѣ оно означаетъ «измѣреніе земли». Это названіе соотвѣтствуетъ первоначальному назначенію ея, о которомъ упоминаетъ извѣстный греческій писатель, Геродотъ, жившій 450 лѣтъ до Р. Х. Геродотъ приписываетъ происхожденіе Геометріи Египтянамъ, повѣствуя объ этомъ событіи слѣдующимъ образомъ: «король Сезострисъ (1600 лѣтъ до Р. Х.), раздѣливъ свою землю на равные участки, раздалъ ихъ своимъ подданнымъ съ тою цѣлью, чтобы собирать равную ежегодную подать съ каждаго участка; но отъ частыхъ разливовъ рѣкъ измѣнялись прибрежные участки; вслѣдствіе чего королемъ назначались чиновники, которымъ было поручено привести въ извѣстность уменьшеніе каждаго участка и сообразно этому уменьшенію опредѣлить подать. Эти работы, какъ полагаетъ Геродотъ, положили основаніе Геометріи и впослѣдствіи сдѣлались извѣстными Грекамъ. Должно полагать, что древніе Греки, первые, привели свѣдѣнія по предмету Геометріи въ систему и занимались обработываніемъ этой науки. Извѣстнѣйшее сочиненіе ихъ по этому предмету, подъ заглавіемъ *Эвклидовыхъ началъ*, сохранилось до нашихъ временъ и употребляется, какъ руководство, еще теперь въ Англіи. Англичанинъ Адхелардъ, нашедши это сочиненіе у Аравитянъ въ 12-мъ столѣтіи, перевелъ Эвклидовы начала на латинскій языкъ.

триваетъ линіи и плоскости въ пространствѣ, и форму и величину тѣлъ.

9. Въ Геометріи встрѣчаются истины двухъ родовъ. Истины, не требующія никакого разъясненія, называются *аксіомами*. *Предложенія* или *теоремы* суть истины, которыя разъясняются посредствомъ извѣстныхъ уже истинъ. Рядъ этихъ извѣстныхъ истинъ составляетъ *доказательство* теоремы. *Слѣдствіемъ* называется истина, которая непосредственно выводится изъ доказанной теоремы.

При изложеніи какой-нибудь геометрической истины, для удобнѣйшаго уразумѣнія ея, составляется изображеніе геометрическихъ величинъ, которое обыкновенно называется *фигурою;* составленіе такого изображенія или фигуры называется *геометрическимъ построеніемъ*. Если геометрическая задача рѣшается геометрическимъ построеніемъ, то ея рѣшеніе называется *геометрическимъ*. Геометрическая задача, рѣшеніе которой производится посредствомъ ариѳметическихъ дѣйствій, называется *численнымъ вопросомъ*.

10. Въ Геометріи весьма часто примѣняются слѣдующія аксіомы:

1) Двѣ величины, изъ которыхъ каждая равна третьей величинѣ, должны быть равны между собою, т. е. если $A = C$ и $B = C$, то $A = B$. Отсюда слѣдуетъ, что въ равенствѣ $A = C$ мы можемъ подставить вмѣсто величины C равную ей величину B.

2) Если къ равнымъ величинамъ прибавить по-ровну, то полученныя суммы должны быть равны; т. е. если $A = B$ и $C = D$, то $A + C = B + D$.

3) Если къ неравнымъ величинамъ прибавить по-ровну, то получатся неравныя суммы; т. е. если $A > B$ и $C = D$, то $A + C > B + D$.

4) Если отъ равныхъ величинъ отнять по-ровну, то полученные остатки должны быть равны; т. е. если $A = B$ и $C = D$, то $A - C = B - D$.

5) Если отъ неравныхъ величинъ отнять по-ровну, то получатся неравные остатки; т. е. если $A < B$ и $C = D$, то $A - C < B - D$.

6) Равныя величины, помноженныя на одно и то-же число, даютъ равныя произведенія.

7) Отъ раздѣленія равныхъ величинъ на одно и то-же число получаются равныя частныя.

8) Если двѣ величины A и B равны между собою и величина B больше (или меньше) величины C, то и величина A должна быть больше (или меньше) C.

9) Если величина A больше (или меньше) величины B и величина B больше (или меньше) величины C, то также величина A больше (или меньше) C.

10) Если величина A не больше и не меньше величины B, то она должна равняться B. Величина C, которая не равна и не больше (или не меньше) D, должна быть меньше (или больше) D.

ОТДѢЛЪ I.

Прямыя линіи.

ПЕРВАЯ ГЛАВА.

Свойства прямой линіи. Равенство прямыхъ линій. Проведеніе прямыхъ линій. Употребленіе и повѣрка линейки. Отложеніе прямыхъ линій. Употребленіе циркуля. Пересѣкающіяся прямыя.

11. Всякая прямая линія, двѣ точки которой лежатъ въ плоскости, сама находится въ этой плоскости, потому-что, вслѣдствіе опредѣленія плоскости (7), каждая точка прямой линіи, положенной на плоскость въ какомъ угодно направленіи, должна находиться въ этой плоскости.

Чрезъ одну точку возможно себѣ представить или возможно провести безчисленное множество прямыхъ линій. Опредѣлится ли положеніе прямой линіи одною точкою?

Прямая линія означается двумя буквами французской азбуки, поставленными обыкновенно при оконечныхъ точкахъ прямой. Пря-

Фиг. 1.

A ——— B

——— m

мая (фиг. 1), которой точки означены чрезъ А и В, произносится: прямая АВ. Порядокъ, въ которомъ выговариваются буквы, обозначающія прямую линію, показываетъ направленіе прямой; такъ напримѣръ прямая, обозначенная чрезъ АВ, имѣетъ направленіе отъ лѣвой руки къ правой, а прямая ВА имѣетъ направленіе отъ правой руки къ лѣвой. Можно обозначать прямую линію буквами, поставленными при двухъ какихъ-либо точкахъ ея. Иногда прямая линія обозначается одною буквою; какъ напримѣръ прямая *m*.

Соединить двѣ точки А и В прямою линіею значитъ: провести прямую отъ точки А до В.

12. Если двѣ точки какой-нибудь прямой *m* лежатъ на другой прямой АВ, то вся прямая *m* должна находиться на прямой АВ; т. е. прямая *m* совпадаетъ съ прямою АВ. Представимъ себѣ, что ограниченная прямая АВ (фиг. 2) наложена на прямой CD такъ, что точка А упала въ точку С. Если при этомъ и точка В пришлась въ D, то мы говоримъ: прямыя АВ и CD *совмѣщаются*.

Фиг. 2.

A ——— B

C ——— D

Двѣ совмѣщающіяся прямыя имѣютъ равную длину, т. е. они *равны* между собою. На оборотъ: двѣ равныя прямыя могутъ быть наложены одна на другую такимъ образомъ, чтобы они совмѣстились.

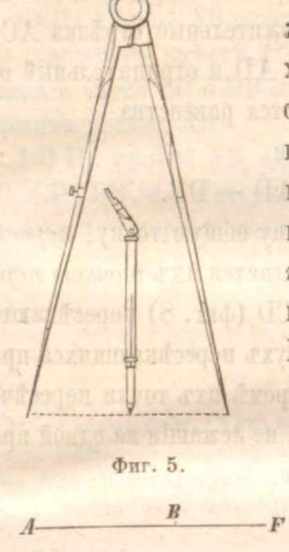
13. Для проведенія прямыхъ линій на бумагѣ употребляется линейка. Отъ вѣрной линейки требуется, чтобы ея края были прямыя линіи. Для повѣрки этого условія мы прочертимъ линію АВ (фиг 3) по краю линейки и потомъ обратимъ линейку около края АВ такимъ образомъ, чтобы она пришлась по другую сторону прочерченной линіи. Придержавъ линейку въ этомъ положеніи, мы проведемъ еще линію по тому-же самому краю. Если окажется, что проведенныя линіи всѣми точками совпадаютъ, то значитъ: линейка вѣрна. Въ противномъ случаѣ линейка не вѣрна.

Фиг. 3.

A B

Чтобы начертить прямую, равную другой прямой, употребляется *циркуль*. Этотъ инструментъ (фиг. 4) состоитъ изъ двухъ остроконечныхъ ножекъ вращающихся около шпинка, проходящаго чрезъ ихъ верхнюю часть. Поставивъ одну ножку циркуля въ точкѣ C прямой CD (фиг. 5), мы подвинемъ другую ножку до тѣхъ поръ, пока ея оконечность придется въ точку D. *Растворенiе* циркуля, т. е. разстоянiе между оконечностями его ножекъ, равно прямой CD. Проведя какую-нибудь прямую AF (фиг. 5), въ точкѣ A поставимъ одну ножку циркуля и потомъ отмѣтимъ точку B, въ которой пришлась оконечность другой ножки. Значитъ: мы *отложили* на прямой AF часть AB, равную прямой CD.

Фиг. 4.

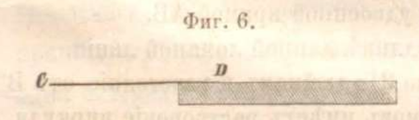


Фиг. 5.

14. Если ограниченная прямая удлинена въ одну или въ обѣ стороны такимъ образомъ, что она и ея удлиненiе составляютъ одну прямую, то мы говоримъ: прямая линiя *продолжена;* это удлиненiе называется *продолженiемъ* прямой линiи.

Чтобы продолжить прямую CD (фиг. 6) за точку D, мы приложимъ линейку краемъ къ прямой CD такъ, чтобы часть линейки пришлась за точкою D; потомъ мы прочертимъ прямую отъ точки D вправо.

Фиг. 6.



15. Если на ограниченной прямой или на ея продолженiи взять точку, то разстоянiя этой точки отъ оконечностей прямой называются *отрѣзками* сей послѣдней; такъ напримѣръ точкою C (фиг. 7) обра-

Фиг. 7.

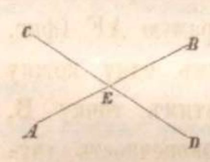
зуются отрѣзки AC и CB, а точкою D отрѣзки AD и DB. Принявъ направленіе прямой отъ точки A къ B, мы получаемъ точкою C два положительные отрѣзка AC и CB, а точкою D положительный отрѣзокъ AD и отрицательный отрѣзокъ DB. На этомъ основаніи составляются равенства

$$AB = AC + CB \text{ и}$$

$$AB = AD + (-DB) = AD - DB.$$

16. Двѣ прямыя, имѣющія только одну общую точку, *пересѣкаются;* общая точка двухъ прямыхъ называется ихъ *точкою пересѣченія.* Прямыя AB и CD (фиг. 8) пересѣкаются въ точкѣ E. Положеніе двухъ пересѣкающихся прямыхъ опредѣлено, если, кромѣ ихъ точки пересѣченія, даны еще двѣ точки, не лежащія на одной прямой съ точкою пересѣченія.

Фиг. 8.



ЗАДАЧИ.

1) Начертить прямую, равную суммѣ (начерченныхъ) прямыхъ AB, CD, EF (посредствомъ линейки и циркуля).

2) Разстояніе AB = 21 сажени, разстояніе BC = 5 саж. и растояніе CD = 7 саж.; сколько сажень содержитъ разстояніе AD, когда извѣстно, что точки D и C лежатъ на прямой AB между точками A и B?

3) Начертить прямую, равную разности прямыхъ AB и CD (посредствомъ линейки и циркуля).

4) Начертить прямую, равную удвоенной прямой AB.

5) Начертить прямую, равную длинѣ данной ломаной линіи.

6) Разстояніе отъ A до B равно $2\frac{1}{2}$ дюймамъ и разстояніе отъ B до C равно $\frac{3}{4}$ дюйма; сколько дюймовъ имѣетъ раствореніе циркуля, если одна ножка его помѣщена въ точкѣ A, а другая въ C между точками A и B?

7) На прямой EF отъ E до G отложена часть, равная прямой m, отъ G до H часть, равная прямой n, и отъ H до F часть, равная прямой p. Какъ выразится длина EF?

8) Отъ E до F отложена часть, равная прямой a, отъ E до G часть, равная прямой b, и отъ G до H часть, равная прямой c. Какъ выразится отрѣзокъ HF прямой EF?

9) На прямой AB отложены три части AC, CD и DB. Части AC и CD содержатъ вмѣстѣ $7^3/_4$ дюйма, части AC и DB содержатъ $7^1/_8$ дюйма и части CD и DB содержатъ $8^3/_8$ дюйма. Сколько дюймовъ содержитъ прямая AB?

10) На прямой AB, содержащей 0,95 метра, отложены три части AC, CD, DB, изъ которыхъ $AC = {}^2/_5 CD$, $CD = {}^3/_4 DB + 0,225$ метра. Сколько десиметровъ содержитъ часть DB?

ВТОРАЯ ГЛАВА.

Уголъ. Равные углы. Сумма и разность угловъ. Полный, нулевой и развернутый уголъ. Равенство развернутыхъ угловъ. Прямой, острый и тупой уголъ. Градусъ угла. Перпендикуляръ. Сумма двухъ смежныхъ угловъ. Углы, лежащіе около одной точки. Противоположные или вертикальные углы.

17. Двѣ прямыя, идущія отъ одной и той же точки A по разнымъ направленіямъ AB и AC, образуютъ *уголъ*. Прямыя AB и AC суть *стороны* угла, а точка A — его *вершина*. Уголъ обозначается тремя буквами, какъ показано на (фиг. 9); онъ выговаривается такъ, чтобы буква, стоящая у его вершины, пришлась между буквами, поставленными при его сторонахъ; слѣдовательно начерченный уголъ произносится CAB или BAC. Иногда же уголъ обозначается только одною буквою, поставленною при его вершинѣ. Представимъ себѣ двѣ совмѣщенныя прямыя, имѣющія общую начальную точку A, и предположимъ, что одна изъ нихъ можетъ обращаться около этой точки. Если обращающаяся прямая отошла отъ постоянной прямой AB и приняла положеніе AC, то величина обращенія, т. е. на сколько прямая AC отошла отъ прямой AB, составляетъ *величину* угла; слѣдовательно чѣмъ больше прямая AC отошла отъ AB, тѣмъ больше уголъ BAC. Отсюда мы заключаемъ, что величина угла не зависитъ отъ длины его

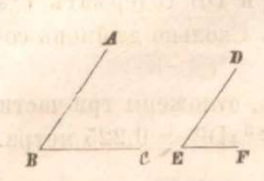
Фиг. 9.

C
B A

сторонъ, потому-что продолживъ стороны AB и AC, мы не измѣняемъ направленія этихъ прямыхъ.

18. Чтобы сравнить величины двухъ угловъ, представимъ себѣ, что уголъ DEF (фиг. 10) наложенъ на уголъ ABC такъ, что вершина E пришлась въ вершину B и сторона EF совпала съ стороною BC. Если при этомъ и стороны ED и BA совпали, то значитъ: данные углы *равны*. Если-же сторона ED приняла положеніе между сторонами BA и BC, или упала внѣ угла ABC, то въ первомъ случаѣ уголъ DEF меньше угла ABC, а во второмъ случаѣ уголъ DEF больше угла ABC.

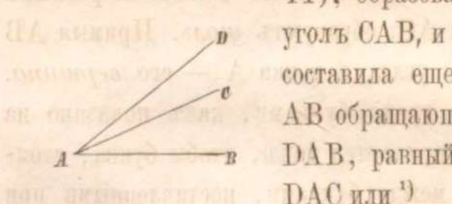
Фиг. 10.



Если два угла ABC и DEF равны, то, при совпаденіи вершинъ E и B, и сторонъ EF и BC, сторона ED непремѣнно должна совпасть съ стороною BA.

19. Если обращающаяся прямая, принявъ положеніе AC (фиг. 11), образовала съ постоянною прямою AB уголъ CAB, и потомъ, продолжая обращаться, составила еще уголъ DAC, то относительно AB обращающаяся прямая образовала уголъ DAB, равный углу CAB вмѣстѣ съ угломъ DAC или [1])

Фиг. 11.



$$\angle DAB = \angle CAB + \angle DAC.$$

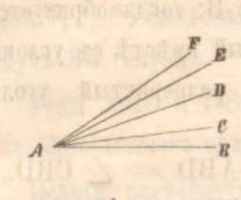
Предположимъ, что подвижная прямая, обращаясь около точки A, перешла изъ AB въ AD и потомъ обратно изъ AD въ AC. Этимъ обращеніемъ она образовала сперва уголъ DAB и потомъ уголъ DAC, а относительно постоянной прямой образовался уголъ CAB, равный углу DAB безъ угла DAC; слѣдовательно

$$\angle CAB = \angle DAB - \angle DAC.$$

Представимъ себѣ, что обращающаяся прямая приняла положе-

[1]) Слово «уголъ» замѣняется въ письмѣ и въ печати знакомъ $\angle$.

Фиг. 12.



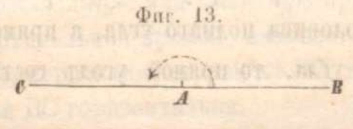
ніе AC (фиг. 12) относительно постоянной прямой AB, и потомъ постепенно перешла въ AD, AE, AF и т. д., образуя равные углы CAB, DAC, EAD, FAE; тогда относительно прямой AB образовался уголъ FAB, равный 4 ∠ CAB.

На оборотъ: если прямая, обращаясь около точки A, образовала равные углы FAE, EAD, DAC, CAB, то относительно прямой AB прямая AC составила уголъ CAB, равный $^1/_4$ ∠ BAF.

20. Если прямая, обращаясь около точки A (фиг. 9), приняла положеніе AC и потомъ обращеніемъ въ обратную сторону перешла опять въ первоначальное положеніе, то этимъ обращеніемъ образовался *нулевой уголъ*; слѣдовательно нулевой уголъ есть разность двухъ равныхъ угловъ.

Если прямая, обращаясь около точки A (фиг. 13), приняла положеніе AC, составляющее съ первоначальнымъ положеніемъ одну прямую, то образуется *развернутый уголъ* BEF. Уголъ, образуемый полнымъ обращеніемъ прямой, называется *полнымъ* угломъ.

Фиг. 13.

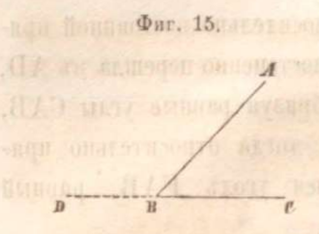


Возможно наложить развернутый уголъ CAB (фиг. 14) на развернутый уголъ DEF такъ, чтобы вершина A и стороны AB и AC угла CAB совпали съ вершиною E и сторонами EF и ED угла DEF. Отсюда по предъидущему (18) мы заключаемъ, что *всѣ развернутые углы равны*.

Фиг. 14.

Два развернутые угла дополняютъ одинъ другаго до полнаго угла; слѣдовательни *всякій развернутый уголъ есть половина полнаго угла*.

21. Представимъ себѣ, что сторона BC (фиг. 15) угла ABC про-



Фиг. 15.

должена за вершину B; тогда образуется уголъ ABD, который вмѣстѣ съ угломъ ABC составляетъ развернутый уголъ CBD, т. е.

$$\angle ABC + \angle ABD = \angle CBD.$$

Углы ABD и ABC, которые имѣютъ общую сторону AB, общую вершину B и стороны BC и BD которыхъ составляютъ одну прямую, называются *смежными* углами.

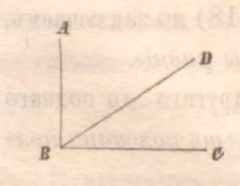
22. Если два смежные угла ABC и ABD (фиг. 16) равны, то каждый изъ нихъ есть *прямой* уголъ; слѣдовательно прямымъ угломъ называется такой уголъ, который равенъ своему смежному углу. Всѣ прямые углы равны между собою, потому что всякій прямой уголъ есть половина развернутаго угла, а всѣ развернутые углы равны.

Фиг. 16.

Такъ какъ развернутый уголъ есть половина полнаго угла, а прямой уголъ равенъ половинѣ развернутаго угла, то прямой уголъ составляетъ четвертую часть полнаго угла.

Всякій уголъ, какъ напримѣръ ABC (фиг. 15), который меньше прямаго угла, называется *острымъ*. *Тупымъ* угломъ называется такой уголъ ABD, который больше прямаго.

23. Можно себѣ представить, что прямой уголъ раздѣленъ на 90 равныхъ частей прямыми, проходящими чрезъ его вершину; каждая изъ этихъ частей называется *градусомъ угла*. Если сравненіемъ угла DBC (фиг. 17) съ прямымъ угломъ ABC оказалось, что уголъ DBC содержитъ 49 девятидесятыхъ частей прямаго угла, то мы говоримъ: уголъ DBC равенъ 49 градусамъ.



Фиг. 27.

Градусъ содержитъ 60 *минутъ* и минута дѣлится на 60 *секундъ*. Въ письмѣ и печати градусъ, минута и секунда означаются

чрезъ ^{0}, $'$, $''$; слѣдовательно $42^0\ 16'\ 35''$ значитъ: 42 градуса 16 минутъ 35 секундъ.

Углы ABD и DBC (фиг. 17), сумма которыхъ равна прямому углу, *дополняютъ* одинъ другаго до прямаго угла.

Всякій развернутый уголъ содержитъ 2-жды 90^0, или 180^0. Полный уголъ содержитъ 2-жды 180^0, т. е. 360^0.

24. Двѣ прямыя AB и BC, составляющія прямой уголъ, *взаимно-перпендикулярны*, т. е. прямая AB перпендикулярна къ BC, и прямая BC перпендикулярна къ AB. Точка B пересѣченія прямыхъ AB и BC называется *основаніемъ* перпендикуляра [1]).

Прямая AB (фиг. 15), составляющая съ CD какой-нибудь уголъ, бо́льшій или мѐньшій прямаго угла, называется *наклонною* относительно прямой CD.

Путь, по которому слѣдуетъ свободно-падающее тѣло, означаетъ *вертикальную* или *отвѣсную* прямую. Прямая, перпендикулярная къ вертикальной прямой, называется *горизонтальною*. Прямая AB (фиг. 17), перпендикулярная къ BC, только тогда вертикальна, когда прямая BC горизонтальна.

25. **Теорема.** *Сумма двухъ смежныхъ угловъ равна двумъ прямымъ угламъ.*

Даны два смежные угла ABC и ABD (фиг. 15). Требуется доказать, что $\angle ABC + \angle ABD = 180^0$.

Доказательство. $\angle ABC + \angle ABD = \angle DBC$ (21)

и $\angle DBC = 180^0$ (23);

изъ этихъ двухъ равенствъ (10, 1) слѣдуетъ, что

$$\angle ABC + \angle ABD = 180^0.$$

Примѣчаніе. Уголъ ABC есть *дополненіе* угла ABD до двухъ прямыхъ угловъ, и уголъ ABD *дополняетъ* уголъ ABC до двухъ прямыхъ угловъ, потому-что сумма этихъ угловъ равна двумъ пря-

---

[1]) Въ письмѣ и печати слова «перпендикуляръ, перпендикулярный» замѣняются знакомъ $\perp$.

мымъ угламъ. На этомъ основаніи острый уголъ имѣетъ своимъ дополненіемъ тупой уголъ, и на оборотъ: тупой уголъ дополняется острымъ угломъ до двухъ прямыхъ угловъ. Чтобы найти дополненіе угла ABC до двухъ прямыхъ угловъ, стоитъ только продолжить сторону BC (или AB) за вершину B.

26. **Обратное предложеніе**. *Если сумма двухъ угловъ, имѣющихъ общую сторону и общую вершину, равна двумъ прямымъ угламъ, то ихъ внѣшнія стороны составляютъ прямую линію.*

Дано: $\angle ABC + \angle ABD = 180^0$ (фиг. 15). Требуется доказать, что стороны BC и BD составляютъ одну прямую.

Доказательство. Извѣстно, что продолживъ сторону BC за вершину B, мы получаемъ уголъ, служащій углу ABC дополненіемъ до 180^0; но это дополненіе угла ABC должно равняться углу ABD, потому-что $\angle ABC + \angle ABD = 180^0$ по заданію; слѣдовательно сторона BD должна совпадать съ продолженіемъ стороны BC.

27. **Теорема.** *Равнымъ угламъ принадлежатъ равные смежные углы.*

Дано (фиг. 18) $\angle ABC = \angle GEF$; требуется доказать, что $\angle ABD = \angle GEH$.

Фиг. 18.

Доказательство.

$\angle ABC + \angle ABD = 180^0$ и

$\angle GEF + \angle GEH = 180^0$;

откуда (10, 1)

$$\angle ABC + \angle ABD = \angle GEF + \angle GEH.$$

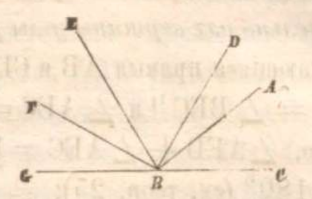
Изъ этихъ двухъ равныхъ суммъ вычтя по-ровну, т. е. $\angle ABC$ и $\angle GEF$, получимъ (10, 4) равные остатки, т. е. $\angle ABD = \angle GEH$.

28. **Теорема**. *Сумма угловъ, лежащихъ по одну сторону прямой и имѣющихъ на ней общую вершину, равна двумъ прямымъ угламъ.*

Требуется доказать (фиг. 19), что

$$\angle ABC + \angle DBA + \angle EBD + \angle FBE + \angle GBF = 180^0.$$

Фиг. 19.



Доказательство. Такъ какъ сумма данныхъ угловъ равна суммѣ смежныхъ угловъ DBC и DBG и вслѣдствіе (теоремы 25)

$$\angle DBC + \angle DBG = 180^0, \text{ то}$$

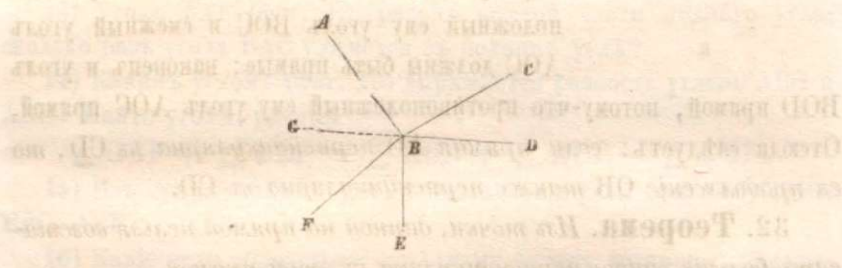
$$\angle ABC + \angle DBA + \angle EBD + \angle FBE + \angle GBF = 180^0.$$

29. **Теорема.** *Сумма угловъ, лежащихъ около одной точки, равна четыремъ прямымъ угламъ.*

Требуется доказать (фиг. 20), что

$$\angle ABC + \angle CBD + \angle DBE + \angle EBF + \angle FBA = 360^0.$$

Фиг. 20.



Доказательство. Продолживъ сторону BD за вершину B[1], мы получимъ

$$\angle CBD + \angle ABC + \angle ABG = 180^0 \text{ (см. теор. 25) и}$$

$$\angle FBG + \angle EBF + \angle EBD = 180^0 \text{ (см. теор. 25);}$$

откуда

$\angle CBD + \angle ABC + \angle ABG + \angle FBG + \angle EBF + \angle EBD = 360^0$ или $\angle ABC + \angle CBD + \angle DBE + \angle EBF + \angle FBA = 360^0$, потому-что $\angle ABG + \angle FBG = \angle FBA$.

[1]) Вспомогательныя линіи, т. е. линіи, облегчающія доказательство теоремы, проводятся пунктиромъ (точками).

30. **Теорема.** *Если двѣ прямыя пересѣкаются, то противоположные относительно ихъ вершины углы равны между собою.*

Даны двѣ пересѣкающіяся прямыя AB и CD (фиг. 8). Требуется доказать, что $\angle$ AED = $\angle$ BEC [1] и $\angle$ AEC = $\angle$ BED.

Доказательство. $\angle$ AED + $\angle$ AEC = 180° (см. теор. 25) и $\angle$ BEC + $\angle$ AEC = 180° (см. теор. 25);

откуда $\angle$ AED + $\angle$ AEC = $\angle$ BEC + $\angle$ AEC (см. 10, 1) или

$\angle$ AED = $\angle$ BEC (см. 10, 4).

Подобнымъ образомъ доказывается равенство противоположныхъ угловъ AEC и BED.

31. **Слѣдствіе.** Если одинъ изъ угловъ, образовавшихся двумя пересѣкающимися прямыми AB и CD (фиг. 21), прямой, то три остальные угла также должны быть прямые. Въ самомъ дѣлѣ, если напримѣръ уголъ AOD прямой, то также противоположный ему уголъ BOC и смежный уголъ AOC должны быть прямые; наконецъ и уголъ BOD прямой, потому-что противоположный ему уголъ AOC прямой. Отсюда слѣдуетъ: *если прямая* AO *перпендикулярна къ* CD, *то ея продолженіе* OB *также перпендикулярно къ* CD.

Фиг. 21.

32. **Теорема**. *Изъ точки, данной на прямой нельзя возставить больше одного перпендикуляра къ этой прямой.*

Возставить перпендикуляръ къ данной прямой значитъ: провести перпендикуляръ къ данной прямой чрезъ точку, взятую на этой прямой.

Изъ точки B (фиг. 16), данной на прямой DC, возставленъ перпендикуляръ BA. Требуется доказать, что изъ точки B нельзя возставить другаго перпендикуляра къ прямой DC.

Доказательство. Представимъ себѣ, что прямая AB обращается около точки B, какъ угодно: вправо или влѣво. При этомъ

[1] Углы AED и BEC, также углы AEC и BED, называются часто *вертикальными углами.*

обращенiи прямой, уголъ ABC постепенно увеличивается и въ то-же время уголъ ABD постепенно уменьшается, или на оборотъ: уголъ ABC уменьшается и уголъ ABD увеличивается; слѣдовательно вращающаяся прямая, выходя изъ положенiя AB, не можетъ образовать равныхъ смежныхъ угловъ съ прямою CD. Отсюда мы заключаемъ, что изъ точки B возможно возставить только одинъ перпендикуляръ къ прямой CD.

ЗАДАЧИ.

11) Какимъ угломъ выражается сумма угловъ EBF и FBG (фиг. 19)? какимъ угломъ выражается сумма угловъ GBE, EBD, DBA? какимъ угломъ выражается сумма угловъ ABC, ABD, DBE, EBF?

12) Уголъ BAD (фиг. 11) равенъ третьей части развернутаго угла, а уголъ DAC составляетъ третью часть угла BAD; какую часть полнаго угла составляетъ уголъ DAC?

13) Уголъ BAF (фиг. 12) равенъ шестой части полнаго угла; сколько разъ уголъ BAC уляжется въ полномъ углѣ?

14) Какимъ угломъ (фиг. 19) выражается разность угловъ ABG и ABE? Найти уголъ, равный

$$\angle GBF + \angle DBF - \angle EBD + \angle ABE - \angle ABF.$$

15) Изъ суммы какихъ угловъ составлены углы (фиг. 19) DBG, EBC, ABF?

16) Какiе углы образуются стрѣлками часовъ, когда часы показываютъ 12 часовъ, 3 часа, 6 часовъ, 9 часовъ?

17) Какимъ угломъ дополняется уголъ CBD (фиг. 19) до двухъ прямыхъ угловъ?

18) Если углы FBG и ABC равны (фиг. 19) и уголъ ABF вдвое больше угла FBG, то чему равенъ уголъ ABC?

19) Предположивъ, что углы (фиг. 19) равны между собою, назвать уголъ, равный $^1/_5$ угла CBG, равный $^1/_2$ угла CBD, равный $^1/_3$ угла DBG, равный $^2/_3$ угла CBE, равный $^3/_4$ угла ABG, равный утроенному углу ABC.

20) Два угла m и n дополняютъ одинъ другаго до прямаго угла и уголъ m втрое больше угла n; сколько градусовъ и минутъ содержитъ каждый изъ этихъ угловъ?

21) Сколько градусовъ содержитъ уголъ EAC (фиг. 22), когда извѣстно, что уголъ DAB = 60°, прямая AE перпендикулярна къ AB и прямая AC перпендикулярна къ AD?

Фиг. 22.

22) Сколько градусовъ содержитъ уголъ EAD (фиг. 22), когда извѣстно, что уголъ EAC = 126°, прямая AE перпендикулярна къ AB и прямая AC перпендикулярна къ AD?

23) Сколько угловъ, равныхъ каждый 22°30′, можно начертить около одной и той-же точки?

24) Извѣстно, что уголъ ABF (фиг. 20) равенъ 140°, уголъ DBE = 87°, углы ABC и CBD равны и уголъ EBF равенъ 60°. Сколько градусовъ содержитъ уголъ ABC?

25) Сколько градусовъ содержатъ углы ABD и ABC (фиг. 15), если уголъ ABD втрое больше угла ABC?

26) Сколько градусовъ содержитъ уголъ ABF (фиг. 19), если уголъ CBE = 127°, уголъ EBF = углу FBG и уголъ ABC = углу ABE?

27) Чрезъ точку A прямой BF (фиг. 23) проведены прямыя CH, DG, AE; уголъ GAH = 32°23′, FAH = 33°53′ и DAE = 14°52′; сколько градусовъ и минутъ въ углѣ EAF?

Фиг. 23.

28) Уголъ BAC = 32°18′ (фиг. 23), уголъ GAH равенъ половинѣ угла FAG и уголъ EAF = 93°39′; сколько градусовъ и минутъ въ углѣ BAG?

29) Зная (фиг. 8), что уголъ CEB равенъ ²/₃ угла AEC, узнать, сколько градусовъ содержитъ уголъ BED.

30) Уголъ BAD (фиг. 23) = CAE, уголъ BAD = FAG, уголъ BAG = 115° и прямая AD раздѣляетъ уголъ CAE на двѣ равныя части; сколько градусовъ и минутъ содержитъ уголъ CAF?

ТЕОРЕМЫ.

31) Уголъ ABD (фиг. 15) раздѣленъ прямою BF на двѣ равныя части, и уголъ ABC раздѣленъ прямою BE на двѣ равныя части. Требуется доказать, что прямыя BE и BF взаимно-перпендикулярны.

32) Если прямая дѣлитъ уголъ AEC (фиг. 8) на двѣ равныя ча-

сти, то ея продолженіе должно раздѣлить уголъ BED на двѣ равныя части.

33) Если уголъ AEC (фиг. 8) равенъ углу BED, то стороны AE и EB должны составлять одну прямую.

34) Если изъ вершины B угла ABC возставленъ перпендикуляръ BD къ сторонѣ AB и перпендикуляръ BE къ сторонѣ BC, то уголъ EBD, образовавшійся этими перпендикулярами, дополняетъ уголъ ABC до двухъ прямыхъ угловъ.

35) Если углы GBE и ABC (фиг. 19) равны и прямая BD раздѣляетъ уголъ ABE на двѣ равныя части, то прямая BD должна быть перпендикулярна къ GC.

ТРЕТЬЯ ГЛАВА.

Треугольники. Свойства суммы двухъ сторонъ треугольника. Равенство треугольниковъ. Свойства равнобедреннаго треугольника.

33. Если на сторонахъ угла ABC (фиг. 24) взять точки A и C и соединить ихъ прямою AC, то составится прямолинейная фигура, называемая *треугольникомъ;* слѣдовательно треугольникъ есть часть плоскости, ограниченная тремя пересѣкающимися прямыми. Эти прямыя называются *сторонами* или *боками* треугольника. Точки A, B, C пересѣченія боковъ треугольника называются его *вершинами.* Сторонами треугольника образуются три угла ABC (или CBA), ACB (или BCA) и BAC (или CAB). Каждой сторонѣ треугольника *противолежитъ* одинъ уголъ и *прилежатъ* два угла; такъ напримѣръ сторонѣ AB противолежитъ уголъ ACB и прилежатъ углы ABC и CAB. Каждый уголъ треугольника заключенъ между двумя сторонами.

Фиг. 24.

Относительно сторонъ треугольники бываютъ *равносторонніе, равнобедренные* и *разносторонніе.* Равностороннимъ называется треугольникъ, въ которомъ всѣ стороны равны; въ равнобедренномъ

треугольникѣ двѣ стороны равны; въ разностороннемъ треугольникѣ стороны не равны.

Сумма сторонъ треугольника называется его *периметромъ*.

34. **Теорема.** *Во всякомъ треугольникѣ сумма двухъ сторонъ больше третьей стороны.*

Между точками B и C (фиг. 24) проведены прямая BC и ломаная линія BAC. Извѣстно, что прямая BC есть кратчайшее разстояніе между точками B и C; слѣдовательно

$$BC < BAC \text{ или } BC < BA + AC.$$

Слѣдствіе 1. Вычтя BA изъ обѣихъ частей послѣдняго неравенства, получимъ

$$BC - BA < AC;$$

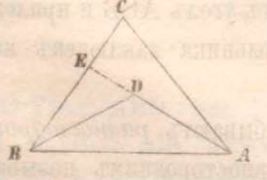
т. е. *разность между двумя сторонами треугольника должна быть меньше третьей стороны.*

Слѣдствіе 2. Три прямыя произвольной длины не всегда могутъ быть сторонами треугольника. Чтобы ими возможно было образовать треугольникъ, каждая изъ нихъ должна быть меньше суммы двухъ остальныхъ, или наибольшая изъ нихъ должна быть меньше суммы двухъ остальныхъ; такъ напримѣръ изъ прямыхъ, содержащихъ 9 вершковъ, 4 вершка и 3 вершка, нельзя составить треугольникъ, потому-что 9 не меньше 4 + 3.

35. **Теорема.** *Сумма прямыхъ, соединяющихъ точку, взятую внутри треугольника, съ оконечностями одной изъ его сторонъ, меньше суммы двухъ остальныхъ сторонъ треугольника.*

Точка D (фиг. 25), находящаяся внутри треугольника ABC, соединена съ точками A и B прямыми DA и DB. Требуется доказать, что

Фиг. 25.



$$DA + DB < CA + CB.$$

Доказательство. Продоливъ прямую AD до пересѣченія E съ стороною BC, получимъ изъ треугольника AEC (см. теор. 34)

$$EA < CA + CE \text{ или}$$

$$ED + DA < CA + CE,$$

и изъ треугольника BDE имѣемъ

$$DB < EB + ED.$$

Сложеніемъ двухъ послѣднихъ неравенствъ по-членно получится

$$ED + DA + DB < CA + CE + EB + ED \text{ или}$$

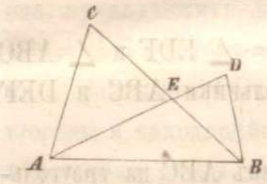
$$DA + DB + ED < CA + CB + ED \text{ или}$$

$$DA + DB < CA + CB.$$

36. **Теорема.** *Если на прямой построены два треугольника, двѣ стороны которыхъ пересѣкаются, то сумма этихъ двухъ сторонъ больше суммы двухъ непересѣкающихся сторонъ.*

На прямой AB построены два треугольника ABC и ABD (фиг. 26), которыхъ стороны BC и AD пересѣкаются въ точкѣ E. Требуется доказать, что

Фиг. 26.



$$AD + BC > AC + BD.$$

Доказательство. Изъ треугольника ACE мы имѣемъ (см. теор. 34)

$$AE + EC > AC$$

и изъ треугольника BED получится

$$ED + BE > BD.$$

Сложивъ эти два неравенства по-членно, получимъ

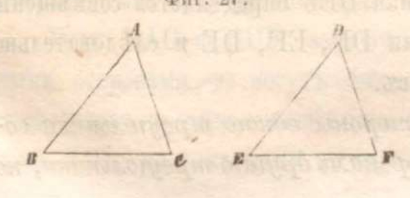
$$AE + ED + BE + EC > AC + BD \text{ или}$$

$$AD + BC > AC + BD.$$

37. **Теорема.** *Два треугольника равны, если двѣ стороны одного соотвѣтственно равны двумъ сторонамъ другаго треугольника и углы, заключающіеся между этими сторонами, равны.*

Дано (фиг. 27): $AB = DE$, $AC = DF$ и $\angle BAC = \angle EDF$.

Фиг. 27.



Требуется доказать, что треугольники ABC и DEF равны. Наложимъ треугольникъ ABC на треугольникъ DEF такимъ образомъ, чтобы: 1) вершина A упала въ

вершину D, 2) сторона AB пошла по сторонѣ DE, и 3) треугольники пришлись по одну сторону совмѣстившихся боковъ AB и DE. Тогда узнаемъ, что 1) точка B упадетъ въ E, потому-что AB = DE, 2) сторона AC пойдетъ по DF, потому-что углы BAC и EDF равны, 3) точка C упадетъ въ F, потому-что AC = DF, и наконецъ 4) сторона BC совмѣстится съ стороною EF, потому-что оконечныя точки B и C совпали съ оконечными точками E и F. Такъ какъ стороны AB, AC и BC совмѣстились съ соотвѣтствующими сторонами DE, DF и EF, то мы заключаемъ, что треугольники ABC и DEF совмѣщаются и слѣдовательно они равны.

38. **Теорема**. *Если сторона одного треугольника равна сторонѣ другаго треугольника и углы, прилежащіе къ этимъ сторонамъ, соотвѣтственно равны, то треугольники должны быть равны.*

Дано (фиг. 27): AB = DE, ∠ BAC = ∠ EDF и ∠ ABC = ∠ DEF. Требуется доказать, что треугольники ABC и DEF равны.

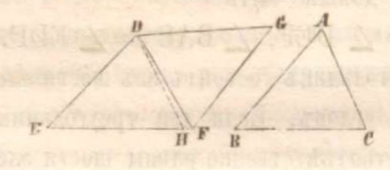
Для доказательства наложимъ треугольникъ ABC на треугольникъ DEF такимъ образомъ, чтобы сторона AB совмѣстилась съ стороною DE; это совмѣщеніе возможно, потому-что стороны AB и DE равны. Тогда по равенству угловъ BAC и EDF сторона AC пойдетъ по DF и точка C упадетъ въ какую-нибудь точку стороны DF. Потомъ, по равенству угловъ ABC и DEF, сторона BC пойдетъ по EF и точка C упадетъ въ какую-нибудь точку стороны EF. Такъ какъ точка C должна лежать одновременно на сторонахъ DF и EF, то она непремѣнно упадетъ въ ихъ общую точку, т. е. въ точку F ихъ пересѣченія. Совмѣщеніемъ вершинъ треугольника ABC съ соотвѣтствующими вершинами треугольника DEF опредѣляется совмѣщеніе сторонъ AC, BC, AB съ сторонами DF, EF, DE и слѣдовательно совмѣщеніе данныхъ треугольниковъ.

39. **Теорема.** *Если двѣ стороны одного треугольника соотвѣтственно равны двумъ сторонамъ другаго треугольника, но*

углы, заключающіеся между этими сторонами, не равны, то меньшему углу противолежитъ меньшая сторона.

Дано (фиг. 28): AB = DE, AC = DF и ∠ BAC < ∠ EDF. Требуется доказать, что сторона BC < EF. Для доказательства положимъ треугольникъ ABC подлѣ треугольника DEF такимъ образомъ, чтобы вершина A упала въ D, вершина C упала въ F и сторона BC приняла положеніе GF; слѣдовательно треугольникъ ABC приметъ положеніе DGF. Представимъ себѣ прямую DH, которою уголъ EDG раздѣляется на двѣ равныя части EDH и GDH. Проведя прямую HG, получимъ два треугольника HDE и HGD, въ которыхъ сторона DH общая (т. е. она принадлежитъ каждому изъ этихъ треугольниковъ), сторона DE = DG (потому-что по заданію DE = AB, а сторона AB приняла положеніе DG) и ∠ EDH = ∠ GDH. Такъ какъ двѣ стороны и находящійся между ними уголъ треугольника HDE соотвѣтственно равны двумъ сторонамъ и лежащему между ними углу треугольника HGD, то эти треугольники (см. теор. 37) должны быть равны; слѣдовательно HE = HG. Изъ треугольника FGH мы имѣемъ (см. теор. 34) FG < FH + HG. Въ этомъ неравенствѣ подставивъ HE вмѣсто HG, получимъ

Фиг. 28.



FG < FH + HE или FG < EF или BC < EF.

40. **Теорема**. *Два треугольника равны, если три стороны одного соотвѣтственно равны тремъ сторонамъ другаго треугольника.*

Дано (фиг. 27): AB = DE, AC = DF и BC = EF. Требуется доказать, что треугольники ABC и DEF равны.

Углы BAC и EDF, заключающіеся между соотвѣтственно равными сторонами, не могутъ быть неравны, потому-что при неравенствѣ угловъ противолежащія имъ стороны должны быть неравны (см. теор. 39); но такъ какъ по заданію стороны BC и EF равны, то и

углы BAC и EDF должны быть равны. Отсюда слѣдуетъ, что треугольники BAC и EDF, въ которыхъ по заданію AB = DE, AC = DF, и по доказанному $\angle$ BAC = $\angle$ EDF, должны быть равны (теор. 37). Въ треугольникахъ BAC и EDF, удовлетворяющихъ условію AB = DE, AC = DF, BC = EF, должно быть

$\angle$ ACB = $\angle$ DFE, $\angle$ ABC = $\angle$ DEF, $\angle$ BAC = $\angle$ EDF.

41. *Примѣчаніе.* Всякій треугольникъ состоитъ изъ шести *элементовъ:* трехъ сторонъ и трехъ угловъ. Если два треугольника равны, то шесть элементовъ одного соотвѣтственно равны шести элементамъ другаго треугольника. Въ предъидущихъ теоремахъ (37, 38, 40) мы узнали, что въ двухъ треугольникахъ элементы соотвѣтственно равны, если три элемента одного треугольника соотвѣтственно равны тремъ элементамъ другаго, и если они составляютъ слѣдующія группы: a) двѣ стороны и заключающійся между ними уголъ, b) сторона и два прилежащіе къ ней угла, c) три стороны.

42. **Теорема.** *Въ равнобедренномъ треугольникѣ равнымъ сторонамъ противолежатъ равные углы.*

Дано (фиг. 29): AB = AC; требуется доказать, что

$\angle$ ACD = $\angle$ ABC.

Фиг. 29.

Для доказательства соединимъ прямою AD вершину A съ срединою D стороны BC; получимъ два треугольника ABD и ACD, въ которыхъ сторона BD = CD (потому-что сторона BC раздѣлена точкою D на двѣ равныя части), сторона AD общая и AB = AC по заданію; слѣдовательно (теор. 40) треугольники ABD и ACD равны и $\angle$ ACB = $\angle$ ABC.

Примѣчаніе. Точка пересѣченія равныхъ сторонъ равнобедреннаго треугольника называется его *вершиною*, сторона, противолежащая вершинѣ, называется его *основаніемъ*, и прямая, соединяющая вершину съ срединою основанія, называется *высотою* равнобедреннаго треугольника.

Слѣдствіе 1. Изъ равныхъ треугольниковъ ABD и ACD слѣдуетъ, что $\angle ADB = \angle ADC$. Такъ какъ эти углы, имѣющіе общую сторону AD и стороны BD и DC составляютъ одну прямую, смежные и кромѣ того равны между собою, то каждый изъ нихъ прямой и слѣдовательно прямая AD перпендикулярна къ BC. Изъ этихъ же равныхъ треугольниковъ мы имѣемъ $\angle BAD = \angle CAD$. Отсюда слѣдуетъ, что въ равнобедренномъ треугольникѣ 1) *прямая (высота равнобедреннаго треугольника), соединяющая его вершину съ срединою основанія, перпендикулярна къ основанію, и* 2) *этотъ перпендикуляръ раздѣляетъ уголъ при вершинѣ на двѣ равныя части.*

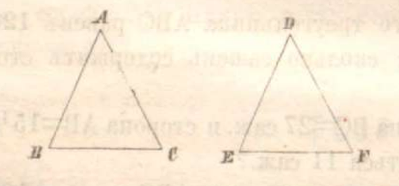
Прямая AD удовлетворяетъ пяти условіямъ: 1) она проходитъ чрезъ вершину A, 2) она проходитъ чрезъ средину D основанія BC, 3) она перпендикулярна къ основанію BC, 4) она раздѣляетъ уголъ при вершинѣ на двѣ равныя части, 5) она раздѣляетъ треугольникъ ABC на два равные треугольника.

Слѣдствіе 2. Если $AB = AC$ и $AB = BC$, то по равенству сторонъ AB и AC мы имѣемъ $\angle ACB = \angle ABC$ и по равенству сторонъ AB и BC получимъ $\angle ACB = \angle BAC$; слѣдовательно *въ равностороннемъ треугольникѣ всѣ углы равны.*

44. **Обратное предложеніе**. *Въ треугольникѣ равнымъ угламъ противолежатъ равныя стороны.*

Дано (фиг. 30): $\angle ABC = \angle ACB$; требуется доказать, что $AC = AB$.

Фиг. 30.



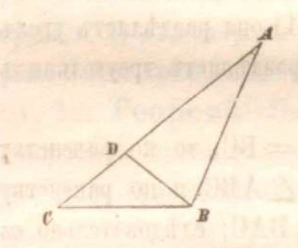
Для доказательства представимъ себѣ треугольникъ DEF, совершенно равный треугольнику ABC. Наложимъ треугольникъ DEF на треугольникъ ABC такимъ образомъ, чтобы точка E упала въ C и точка F упала въ B; тогда сторона EF совмѣстится съ равною стороною BC. Такъ какъ $\angle DFE = \angle ACB$ и $\angle ACB = \angle ABC$, то $\angle DFE$ равенъ также

∠ ABC, и по равенству этихъ угловъ сторона FD пойдетъ по BA. Уголъ DEF = ∠ ABC и ∠ ABC = ∠ ACB; слѣдовательно ∠ DEF = ∠ ACB, и сторона ED пойдетъ по CA. Точка D должна находиться одновременно на BA и CA; слѣдовательно она упадетъ въ точку A пересѣченія этихъ прямыхъ. Такъ какъ сторона DE, равная AB, совмѣстилась съ стороною AC, то мы заключаемъ, что стороны AB и AC равны и слѣдовательно треугольникъ ABC равнобедренный.

45. **Теорема.** *Если въ треугольникѣ неравные углы, то сторона, противолежащая большему углу, больше стороны, находящейся противъ меньшаго угла.*

Дано (фиг. 31) ∠ ABC > ∠ ACB; требуется доказать, что AC > AB.

Фиг. 31.



Проведя прямую BD такимъ образомъ, чтобы образовался уголъ DBC, равный углу ACB, получимъ равнобедренный треугольникъ BCD. Въ самомъ дѣлѣ, въ немъ стороны CD и BD, противолежащія равнымъ угламъ CBD и BCD, равны. Изъ треугольника ABD имѣемъ AD + DB > AB. Подставивъ DC вмѣсто DB, получимъ AD + DC > AB или AC > AB.

ЧИСЛЕННЫЕ ВОПРОСЫ.

36) Периметръ равнобедреннаго треугольника ABC равенъ 120 саж., AC = 37 саж. и AB = BC; сколько сажень содержитъ сторона AB?

37) Въ треугольникѣ ABC сторона BC=27 саж. и сторона AB=$15\frac{1}{2}$ саж. Можетъ-ли сторона AC равняться 11 саж.?

38) Периметръ равнобедреннаго треугольника ABC равенъ 105 саж., AB = 36 саж. и AB = BC; сколько сажень содержитъ сторона AC?

39) Периметръ равносторонняго треугольника ABC равенъ 185 саж.; сколько сажень содержитъ сторона AC?

40) Периметръ треугольника ABC (фиг. 29) равенъ 114 саж. и сторона AC = 25 саж.; сколько сажень содержитъ отрѣзокъ BD?

41) Въ треугольникѣ ABC (фиг. 29) отрѣзокъ DC = $37^3/_4$ саж. и сторона AB = $80^1/_2$ саж.; сколько сажень содержитъ периметръ этого треугольника?

42) Въ (фиг. 25) AC = $37^1/_2$ саж., BC = $25^1/_2$ саж. и AD = 17 саж.; сколько сажень можетъ содержать прямая BD?

43) Въ (фиг. 26) BC = $75^3/_4$ саж., AC = $43^1/_2$ саж. и BD = $35^1/_4$ саж.; сколько сажень можетъ содержать прямая AD?

44) Отрѣзокъ BD (фиг. 29) составляетъ какую часть периметра равносторонняго треугольника?

45) Въ треугольникѣ ABC сторона AC = $^3/_7$AB, BC = $^2/_5$AC и периметръ равенъ 150 саж. Сколько сажень содержитъ каждая сторона этого треугольника?

46) Продолживъ стороны CA и BA (фиг. 29) за вершину A, узнаемъ, сколько градусовъ содержитъ образовавшійся уголъ, если уголъ BAD = 37°30′.

47) Къ прямой AD (фиг. 29) возставленъ перпендикуляръ AE изъ точки A. Сколько градусовъ и минутъ содержитъ уголъ CAE, если уголъ BAC = 67°30′?

48) Продолживъ сторону CA (фиг. 29) за вершину A до точки E, узнаемъ, сколько градусовъ и минутъ содержитъ уголъ BAE, если уголъ BAD = 36°35′.

49) Изъ точки A (фиг. 29) возставленъ перпендикуляръ AF къ сторонѣ AC и перпендикуляръ AG къ прямой AD. Сколько градусовъ и минутъ содержитъ уголъ FAG, если уголъ BAC = 42°10′?

50) Основаніе BC равнобедреннаго треугольника ABC составляетъ $^7/_8$ стороны AC. Какую часть периметра треугольника составляетъ сторона AC?

ТЕОРЕМЫ.

51) Если на продолженіи стороны AB треугольника ABC (фиг. 24) отложить часть BD, равную BC, на продолженіи стороны CB отложить часть BE, равную AB, и провести ED, то образуется треугольникъ DBE, равный треугольнику ABC.

52) Если средину D основанія BC равнобедреннаго треугольника ABC соединить съ средними точками E и F сторонъ AB и AC, то образуются два равные треугольника BDE и CDF.

53) Если въ треугольникѣ ABC, котораго сторона AB меньше стороны BC, отложить на BC часть BD, равную BA, потомъ, продолживъ BA, отложить прямую BE, равную BC, и наконецъ соединить точки D и E, то образуется треугольникъ EBD, равный треугольнику ABC.

54) Периметръ треугольника ABC (фиг. 25) больше суммы прямыхъ, соединяющихъ точку D съ вершинами A, B, C и меньше удвоенной суммы этихъ прямыхъ.

55) Прямыя, проведенныя въ равностороннемъ треугольникѣ чрезъ его вершины перпендикулярно къ противолежащимъ сторонамъ, равны между собою.

56) Если средину H основанія BC равнобедреннаго треугольника ABC соединить съ какою-нибудь точкою M стороны AC, то разность прямыхъ MH и BH меньше разности прямыхъ AB и AM.

57) Если на сторонахъ BC, CA, AB равносторонняго треугольника отложить равныя части BD, CE, AF и провести прямыя DE, EF, FD, то образуется равносторонній треугольникъ DEF.

ЧЕТВЕРТАЯ ГЛАВА.

Свойства перпендикуляра и наклонныхъ, проведенныхъ отъ одной и той-же точки до прямой. Равенство прямоугольныхъ треугольниковъ.

46. *Изъ точки опустить перпендикуляръ на прямую* значитъ: чрезъ точку, данную внѣ прямой, провести прямую перпендикулярно къ данной прямой.

Теорема. *Изъ данной точки нельзя опустить больше одного перпендикуляра на данную прямую.*

Представимъ себѣ, что изъ точки A (фиг. 21) опущенъ перпендикуляръ AO на прямую CD, и что бумага, на которой проведены эти

прямыя, перегнута по направленію CD. Если, согнувъ бумагу, мы отмѣтимъ подъ прямою CD точку B, въ которой пришлась точка A, потомъ выпрямимъ опять бумагу и наконецъ соединимъ точки A и B прямою AB, то получимъ два равные угла AOC и BOC (потому-что ихъ стороны совмѣщаются). Такъ какъ уголъ AOC прямой, то и уголъ BOC долженъ быть прямой; слѣдовательно эти углы суть смежные и ихъ стороны AO и OB должны составлять одну прямую линію. Зная, что между точками A и B возможно провести только одну прямую, мы заключаемъ, что изъ точки A нельзя опустить больше одного перпендикуляра на прямую CD.

47. Теорема. *Перпендикуляръ, опущенный изъ данной точки на прямую, короче наклонной, проведенной между данною точкою и данною прямою.*

Фиг. 32.

Изъ точки C (фиг. 32) опущенъ перпендикуляръ CD на данную прямую AB и проведена наклонная CF къ AB. Требуется доказать, что $CD < CF$. Продолживъ прямую CD, сдѣлаемъ $DE = CD$ и проведемъ прямую FE; получимъ два равные треугольника CFD и EFD, потому-что сторона DF общая, стороны CD и ED равны (по отложенію) и углы CDF и EDF равны (прямые углы); слѣдовательно $CF = EF$ и $CF =$ половинѣ ломаной линіи CFE. Далѣе мы замѣчаемъ, что между точками C и E проведены: прямая CE и ломаная линія CFE. Такъ какъ прямая CE короче всякой линіи, проведенной между точками C и E, то $CE < CFE$ и

$$\tfrac{1}{2}CE < \tfrac{1}{2}(CF + FE) \text{ или } CD < CF.$$

Примѣчаніе 1. Перпендикуляръ CD, опущенный изъ точки C на прямую AB, есть кратчайшая прямая между точкою C и прямою AB, а потому этотъ перпендикуляръ означаетъ *разстояніе* между точкою C и прямою AB.

Примѣчаніе 2. Такъ какъ въ треугольникѣ CDF сторона

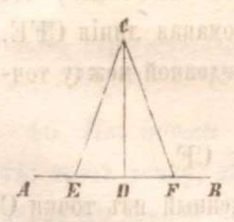
CD < CF, то (теор. 45) уголъ CFD долженъ быть меньше угла CDF. Отсюда слѣдуетъ: *если изъ какой-нибудь точки прямой CF, составляющей съ прямою AB острый уголъ, опустить перпендикуляръ на AB, то онъ долженъ находиться внутри этого остраго угла.*

Уголъ CFA, смежный съ угломъ CFB, долженъ быть тупой (теор. 25); слѣдовательно *если двѣ прямыя AF и CF составляютъ тупой уголъ CFA, то перпендикуляръ CD упадетъ на продолженіе прямой AF внѣ тупаго угла AFC.*

Примѣчаніе 3. Зная, что прямая FD, проведенная перпендикулярно къ CD, меньше наклонной FC, мы узнаемъ, что уголъ FCD < угла FDC (теор. 45); слѣдовательно уголъ FCD острый. Отсюда мы заключаемъ, что *въ треугольникѣ, содержащемъ прямой уголъ, два остальные угла должны быть острые.* Треугольникъ, въ которомъ заключается прямой уголъ, называется *прямоугольнымъ*. Сторона CF треугольника CDF, противолежащая прямому углу, называется *гипотенузою*, а двѣ остальныя стороны CD и DF суть *катеты*.

48. **Теорема**. *Двѣ наклонныя, проведенныя отъ одной и той-же точки перпендикуляра до данной прямой и равно-отстоящія отъ основанія этого перпендикуляра, равны между собою.*

Фиг. 33.



Дано (фиг. 33): DE = DF; требуется доказать, что CE = CF.

Треугольники ECD и FCD равны, потому-что сторона CD общая, DE = DF по заданію и ∠ CDE = ∠ CDF (прямые углы); слѣдовательно CE = CF.

49. **Обратное предложеніе.** *Двѣ равныя наклонныя, проведенныя отъ одной и той-же точки перпендикуляра до данной прямой, равно-отстоятъ отъ основанія этого перпендикуляра.*

Дано (фиг. 33): CE = CF; требуется доказать, что ED = FD.

По равенству прямыхъ CE и CF мы заключаемъ, что CEF равнобедренный треугольникъ. Такъ какъ прямая CD проведена отъ вершины этого треугольника перпендикулярно къ его основанію, то этимъ перпендикуляромъ основаніе дѣлится на двѣ равныя части (43); слѣдовательно ED = FD.

50. **Теорема.** *Всѣ точки перпендикуляра, возставленнаго изъ средины прямой, равно отстоятъ отъ оконечностей данной прямой.*

Фиг. 34.

Дано (фиг. 34): изъ средины D прямой AB возставленъ перпендикуляръ; слѣдовательно AD = BD. Требуется доказать, что AM = BM. Наклонныя AM и BM равно удалены отъ основанія D перпендикуляра DC, потому-что по заданію DA = DB; слѣдовательно AM = BM (теор. 48).

Докажемъ теперь, что всякая точка P, находящаяся внѣ перпендикуляра DC, неравно отстоитъ отъ точекъ A и B. Проведя прямыя PA и PB, соединимъ точку M пересѣченія прямыхъ CD и AP съ точкою B прямою MB. По предъидущему AM = BM и BP < BM + MP (прямая короче ломаной линіи). Замѣнивъ въ этомъ неравенствѣ BM чрезъ AM, получимъ

$$BP < AM + MP \text{ или } BP < AP.$$

51. *Геометрическимъ мѣстомъ* называется линія (или поверхность), всѣ точки которой удовлетворяютъ однимъ и тѣмъ-же условіямъ. По этому прямая CE, проведенная перпендикулярно къ прямой AB чрезъ средину D, есть *геометрическое мѣсто* всѣхъ точекъ, равно-удаленныхъ отъ точекъ A и B.

52. **Теорема.** *Если отъ одной и той-же точки перпендикуляра проведены двѣ наклонныя, то та изъ нихъ наибольшая, которая дальше отстоитъ отъ основанія перпендикуляра.*

Дано (фиг. 35): перпендикуляръ CD, наклонныя CF и CG, и DG > DF. Требуется доказать, что CG > CF.

Фиг. 35.

Продолживъ прямую CD и отложивъ DE = CD, проведемъ прямыя EF и EG; получимъ треуг. CDF = треуг. EDF и треуг. CDG = треуг. EDG, потому-что CD = DE по отложенію, ∠ CDG = ∠ EDG (прямые углы) и стороны DF и DG общія: слѣдовательно CF = EF и CG = EG. По предъидущему (теор. 35) изъ треугольника CEG получимъ

CG + GE > CF + FE или 2CG = 2CF;

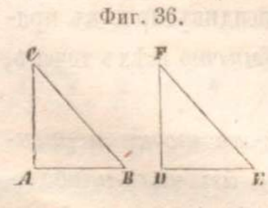
откуда CG = CF.

Представимъ себѣ двѣ наклонныя CH и CG. Если разстояніе DG отъ основанія перпендикуляра больше разстоянія DH, то наклонная CG больше наклонной CH. Въ самомъ дѣлѣ, отложивъ DF = DH и проведя прямую CF, получимъ равныя наклонныя CF = CH (теор. 48) и CG > CF (потому-что DG > DF). Такъ какъ

CF = CH и CG > CF, то CG > CH.

53. **Теорема.** *Два прямоугольные треугольника равны, если гипотенуза и острый уголъ одного соотвѣтственно равны гипотенузѣ и острому углу другаго треугольника.*

Дано (фиг. 36): BC = EF и ∠ ABC = ∠ DEF; требуется доказать, что треугольники ABC и DEF равны.



Фиг. 36.

Наложимъ треугольникъ DEF на треугольникъ ABC такимъ образомъ, чтобы сторона EF совмѣстилась съ стороною BC; тогда точки E и F упадутъ въ точки B и C и, по равенству угловъ DEF и ABC, прямая ED пойдетъ по прямой BA. Сторона FD, перпендикулярная къ DE, должна принять направленіе прямой CA, потому-что изъ точки C возможно опу-

стить только одинъ перпендикуляръ CA на AB. Такъ какъ точка D должна упасть одновременно на прямыя BA и CA, то она непремѣнно упадетъ въ точку A пересѣченія этихъ прямыхъ; слѣдовательно данные треугольники совмѣстятся.

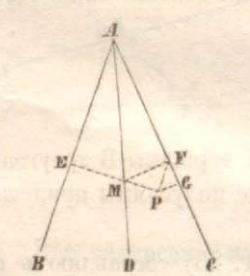
54. **Теорема.** *Два прямоугольные треугольника равны, если гипотенуза и катетъ одного соотвѣтственно равны гипотенузѣ и катету другаго треугольника.*

Дано (фиг. 36): BC = EF и AC = DF; требуется доказать, что треугольники ABC и DEF равны. Наложимъ треугольникъ DEF на треугольникъ ABC такимъ образомъ, чтобы сторона DF совмѣстилась съ стороною AC; тогда точки D и F упадутъ въ точки A и C, и сторона DE пойдетъ по направленію стороны AB по равенству угловъ FDE и CAB. Такъ какъ вслѣдствіе этого наложенія стороны CB и FE придутся по одну и ту-же сторону перпендикуляра CA и по заданію CB = FE, то эти прямыя, какъ равныя наклонныя, должны находиться на равныхъ разстояніяхъ (теор. 49) отъ основанія перпендикуляра CA; слѣдовательно ED = BA и данные треугольники совмѣстятся.

55. **Теорема.** *Всѣ точки прямой, раздѣляющей уголъ на двѣ равныя части, равно-отстоятъ отъ сторонъ этого угла.*

Дано (фиг. 37): ∠ BAD = ∠ CAD, прямая ME перпендикулярна къ AB, прямая MF перпендикулярна къ AC. Требуется доказать, что ME = MF. Треугольники AEM и AFM равны (теор. 53), потому-что сторона AM общая и ∠ EAM = ∠ FAM; слѣдовательно ME = MF.

37.



Докажемъ теперь, что всякая точка P, лежащая внѣ прямой AD, не равно-отстоитъ отъ прямыхъ AB и AC. Для этого изъ точки P опустимъ перпендикуляры PE и PG на стороны AB и AC, и изъ точки M пересѣченія прямыхъ AD и PE опустимъ перпендикуляръ MF на AC. Наконецъ проведя прямую PF, полу-

чимъ треугольникъ FMP, въ которомъ PM + MF > PF. Извѣстно, что PF > PG, потому-что прямая PG перпендикуляръ, а PF наклонная относительно прямой AC. Такъ какъ PM + MF > PF и PF > PG, то непремѣнно (10, 9) PM + MF > PG; но MF = ME, слѣдовательно PM + ME > PG или PE > PG.

ЧИСЛЕННЫЕ ВОПРОСЫ.

58) Зная, что ломаная линія CF + FE (фиг. 32) равна 63 саж. и разстояніе точки C отъ прямой AB равно 16 саж., узнать, сколько саженъ содержитъ наклонная CF.

59) Наклонная CF больше прямой CD на $8^3/_4$ саж. (фиг. 33). На сколько саженъ прямая CD должна быть меньше наклонной CE, которой разстояніе отъ точки D равно DF?

60) Разстояніе между точками F и C (фиг. 32) равно 38 саж. и FD = 16 саж. Опредѣлить на прямой AB еще точку, отстоящую отъ C на 38 саж.

61) Сколько саженъ содержитъ прямая CE (фиг. 33), если ломаная линія ECF = 37 саж. и DE = DF?

62) Найти разстояніе между точками D и F (фиг. 33), когда извѣстно, что CE = CF и EF = 85 саж.

63) Прямая MP = $17^1/_2$ саж. и MB = $23^3/_4$ саж. (фиг. 34); сколько саженъ содержитъ разстояніе AP?

64) Ломаная линія CGE (фиг. 35) содержитъ $37^1/_2$ саж. и перпендикуляръ CE = $25^3/_4$ саж. Между какими числами должна находиться длина CF?

ТЕОРЕМЫ.

65) Перпендикуляръ BD, опущенный изъ вершины B треугольника ABC на противолежащій бокъ AC, меньше полусуммы прилежащихъ сторонъ BA и BC.

66) Двѣ равныя наклонныя CE и CF (фиг. 33) составляютъ съ прямою AB равные углы.

67) Если прямая CD (фиг. 33) раздѣляетъ уголъ ECF на двѣ равныя части и чрезъ точку C проведена прямая GH перпендикулярно къ CD, то образуются равные углы GCE и HCF.

68) Перпендикуляры BD и CE, опущенные изъ оконечностей основанія BC равнобедреннаго треугольника на противолежащія стороны AC и AB, равны и ихъ основанія D и E равно-отстоятъ отъ вершины A.

69) Прямыя AD и CE, которыми соединяются оконечности A и C основанія AC равнобедреннаго треугольника съ срединами D и E сторонъ BC и BA, равны.

70) Если на сторонахъ угла BAC (фиг. 37) отложены равныя части AE и AF, и перпендикуляры, возставленные къ сторонамъ AB и AC изъ точекъ E и F, пересѣкаются на прямой AD, то эта прямая раздѣляетъ уголъ BAC на двѣ равныя части.

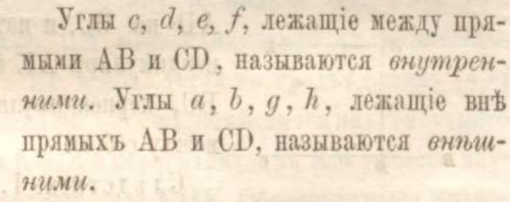
71) Если къ прямой AD (фиг. 37), раздѣляющей уголъ BAC на двѣ равныя части, провести перпендикуляръ EF между сторонами AB и AC, то отрѣзки AE и AF должны быть равны.

ПЯТАЯ ГЛАВА.

Параллельныя прямыя.

56. Прямая MN (фиг. 38), пересѣкающая двѣ прямыя AB и CD, образуетъ съ этими прямыми восемь угловъ. (Прямую MN впредь будемъ называть *сѣкущею*).

Фиг. 38.



Углы c, d, e, f, лежащіе между прямыми AB и CD, называются *внутренними*. Углы a, b, g, h, лежащіе внѣ прямыхъ AB и CD, называются *внѣшними*.

Два внутренніе или два внѣшніе угла, лежащіе по одну сторону сѣкущей, называются *противолежащими*. Углы a и g, также углы b и h, суть *внѣшно-противолежащіе*. Углы d и e, также углы c и f, суть *внутренно-противолежащіе*. Два внутренніе или два внѣшніе угла, имѣющіе разныя вершины и не лежащіе по одну сто-

рону сѣкущей, называются *на-крестъ лежащими.* Углы d и f, также углы c и e, суть *внутренніе на-крестъ лежащіе.* Углы a и h, также углы b и g, суть *внѣшніе на-крестъ лежащіе.*

Два угла, лежащіе по одну сторону сѣкущей, изъ которыхъ одинъ внѣшній, а другой внутренній, называются *соотвѣтствующими.* Углы a и e, b и f, d и g, c и h суть *соотвѣтствующіе.*

Двѣ прямыя, находящіяся въ одной и той-же плоскости, называются *параллельными*, если онѣ, будучи продолжены въ какую угодно сторону, нигдѣ не встрѣчаются [1].

57. **Теорема.** *Двѣ прямыя параллельны между собою, если онѣ перпендикулярны къ одной и той-же прямой.*

Дано (фиг. 39): прямыя AC и BD перпендикулярны къ EF.

Фиг. 39.

Требуется доказать, что AC и BD параллельны. Въ самомъ дѣлѣ, прямыя AC и BD, будучи продолжены вверхъ или внизъ, не могутъ встрѣтиться, потому-что, если предположить, что онѣ гдѣ-нибудь встрѣтятся, то представилась бы возможность опустить изъ одной и той-же точки два перпендикуляра на прямую EF.

58. **Теорема.** *Чрезъ точку, данную внѣ прямой, возможно провести параллельную къ этой прямой.*

Даны (фиг. 40): прямая BC и точка A.

Фиг. 40.

Изъ точки A опустимъ перпендикуляръ AD на BC, и изъ точки A возставимъ перпендикуляръ AE къ AD; тогда прямыя AE и BC, перпендикулярныя къ AD, параллельны между собою.

Слѣдствіе 1. Зная, что изъ точки A нельзя возставить больше одного перпендикуляра къ прямой AD, мы заключаемъ, что чрезъ точку A возможно провести только одну параллельную къ BC.

[1]) Слово «параллельный» замѣняется въ письмѣ знакомъ ||.

Слѣдствіе 2. Если прямая AD перпендикулярна къ BC, то она также перпендикулярна къ прямой AE, паралельной къ BC.

59. **Теорема**. *Двѣ прямыя, параллельныя къ третьей прямой, параллельны между собою.*

Дано (фиг. 41): прямая AB параллельна къ CD и прямая EF параллельна къ CD. Требуется доказать, что прямыя AB и CD параллельны между собою.

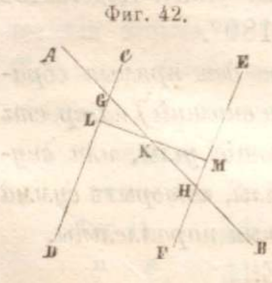
Фиг. 41.

Проведемъ прямую GH перпендикулярно къ AB. По параллельности прямыхъ AB и CD, прямая GH должна быть перпендикулярна къ CD, а по параллельности прямыхъ CD и EF прямая GH должна быть перпендикулярна къ EF (слѣд. 2 теор. 58). Такъ какъ прямая GH перпендикулярна къ прямымъ AB и EF, то эти прямыя параллельны между собою.

60. **Теорема**. *Если двѣ параллельныя прямыя разсѣчены прямою, то: 1) внутренніе на-крестъ лежащіе углы равны, 2) внѣшніе на-крестъ лежащіе углы равны, 3) соотвѣтствующіе углы равны, 4) внутренніе противолежащіе углы суть дополняющіе до двухъ прямыхъ угловъ, 5) внѣшніе противолежащіе углы суть дополняющіе до двухъ прямыхъ угловъ.*

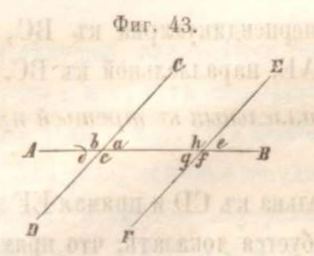
Даны (фиг. 42): параллельныя EF и CD и сѣкущая AB.

Фиг. 42.



Чрезъ средину K прямой GH проведемъ прямую LM перпендикулярно къ параллельнымъ EF и CD; тогда по предъидущему (47) перпендикуляръ KL помѣстится внутри остраго угла KGD, и перпендикуляръ KM упадетъ внутри остраго угла KHE. Образовавшіеся прямоугольные треугольники LKG и HKM равны (теор. 53), потому-что KG = KH по отложенію и $\angle$ LKG = $\angle$ HKM (противоположные углы); слѣдовательно $\angle$ LGK = $\angle$ MHK.

По доказанному внутренніе на-крестъ лежащіе углы a и g равны



Фиг. 43.

(фиг. 43); слѣдовательно ихъ дополненія до двухъ прямыхъ угловъ также должны быть равны (теор. 27), т. е. $\angle c = \angle h$.

2) Извѣстно (теор. 30), что $\angle a = \angle d$ и $\angle g = \angle e$ (противоположные углы); слѣдовательно по равенству внутреннихъ на-крестъ лежащихъ угловъ a и g мы имѣемъ $\angle d = \angle e$.

Дополненія равныхъ угловъ d и e до двухъ прямыхъ угловъ должны быть равны (27), т. е. $\angle b = \angle f$.

3) Зная, что $\angle a = \angle g$ и $\angle e = g$, мы получимъ $\angle a = \angle e$. Такъ какъ $\angle c = \angle h$ и $\angle f = \angle h$, то $\angle c = \angle f$.

Такимъ-же образомъ мы узнаемъ, что $\angle d = \angle g$ и $\angle b = \angle h$.

4) Сумма смежныхъ угловъ $a + c = 180^0$ и $\angle a = \angle g$ (внутренніе на-крестъ лежащіе углы). Подставивъ $\angle g$ вмѣсто $\angle a$, получимъ $\angle g + \angle c = 180^0$. Такъ какъ $\angle c = \angle h$ (внутренніе на-крестъ лежащіе углы), то подставивъ $\angle h$ вмѣсто $\angle c$, получимъ $\angle a + \angle h = 180^0$.

5) Сумма смежныхъ угловъ $b + d = 180^0$ и $\angle d = \angle e$ (внѣшніе на-крестъ лежащіе углы). Подставивъ $\angle e$ вмѣсто $\angle d$, получимъ $\angle b + \angle e = 180^0$.

Уголъ $b = \angle f$ (внѣшніе на-крестъ лежащіе углы). Подставивъ $\angle f$ вмѣсто $\angle b$, получимъ $\angle f + \angle d = 180^0$.

61. Обратное предложеніе. *Если двѣ прямыя образуютъ съ сѣкущею равные внутренніе (или внѣшніе) на-крестъ лежащіе углы, или равные соотвѣтствующіе углы, или внутренніе (или внѣшніе) противолежащіе углы, которыхъ сумма равна двумъ прямымъ угламъ, то эти прямыя параллельны.*

1) Дано (фиг. 42): $\angle$ BGD $= \angle$ AHE.

Изъ средины K прямой GH опустимъ перпендикуляръ KL на CD и продолжимъ его до пересѣченія съ прямою EF. Образовавшіеся треугольники LKG и MKH равны (38), потому-что KG = KH

(по отложенію), $\angle LKG = \angle MKH$ (вертикальные углы), $\angle LGK = \angle MHK$ (по заданію); слѣдовательно $\angle KLG = \angle KMH$; но такъ какъ уголъ KLG прямой (по перпендикулярности прямыхъ KL и CD), то и уголъ KMH долженъ быть прямой. Отсюда мы заключаемъ, что прямыя CD и EF, перпендикулярныя къ одной и той-же прямой LM, параллельны между собою (57).

2) Дано: $\angle AGC = \angle AHE$.

Извѣстно, что $\angle AGC = \angle BGD$ (вертикальные углы)
и $\angle AGC = \angle AHE$ (по заданію);
слѣдовательно $\angle BGD = \angle AHE$ (10, 1).

По равенству внутреннихъ на-крестъ лежащихъ угловъ BGD и AHE прямыя CD и EF параллельны.

3) Дано: $\angle AGD + \angle BHF = 180^0$.

Извѣстно (25), что $\angle AGD + \angle BGD = 180^0$ и
$\angle AGD + \angle BHF = 180^0$ (по заданію).

Вслѣдствіе (10, 1) получимъ

$$\angle AGD + \angle BGD = \angle AGD + \angle BHF.$$

Изъ этихъ равныхъ суммъ вычтя уголъ AGD, получимъ $\angle BGD = \angle BHF$. По равенству соотвѣтствующихъ угловъ мы заключаемъ, что CD $\parallel$ къ EF.

62. Слѣдствіе 1. Если двѣ прямыя AB и CD (фиг. 38) разсѣчены прямою MN и оказалось, что сумма внутреннихъ угловъ больше или меньше 180^0, то прямыя AB и CD должны встрѣтиться. Точка пересѣченія этихъ прямыхъ должна находиться по ту сторону сѣкущей MN, по которую лежатъ внутренніе углы, составляющіе вмѣстѣ меньше 180^0.

Слѣдствіе 2. Если къ прямой (фиг. 44) проведены наклонная CD и перпендикуляръ AB, то прямыя CD и AB должны встрѣтиться, потому-что

$$\angle BAC + \angle ACD < 180^0.$$

Фиг. 44.

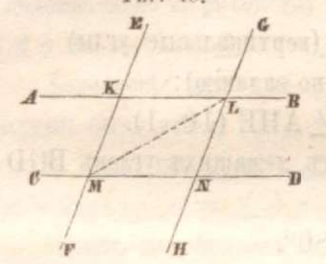
Примѣчаніе. Такъ какъ теорема, „перпендикуляръ и наклонная, проведенные къ той-же самой

прямой, встрѣтятся“ не можетъ быть доказана съ тою-же строгостью, съ какою доказываются прочія предложенія Геометріи, то уже Эвклидъ былъ принужденъ принять эту теорему за аксіому.

63. **Теорема.** *Части двухъ параллельныхъ прямыхъ, заключенныя между параллельными прямыми, равны.*

Дано (фиг. 45): AB || къ CD и EF || къ GH. Требуется доказать, что KM = LN и KL = MN.

Фиг. 45.

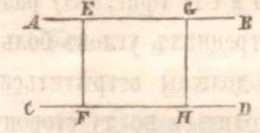


Проведя прямую ML, получимъ (теор. 38) равные треугольники KML и NML, въ которыхъ сторона LM общая, ∠ KLM = ∠ NML (внутренніе на-крестъ лежащіе углы равны по параллельности прямыхъ AB и CD, пересѣченныхъ прямою LM) и ∠ KML = ∠ MLN (внутренніе на-крестъ лежащіе углы равны по параллельности прямыхъ EF и GH, пересѣченныхъ прямою LM); слѣдовательно KM = LN и KL = MN.

64. **Теорема.** *Всѣ точки прямой равно-отстоятъ отъ прямой, параллельной къ первой.*

Дано (фиг. 46): AB || къ CD. Требуется доказать, что точки E и G прямой AB равно-отстоятъ отъ прямой CD, т. е. перпендикуляры EF и GH равны.

Фиг. 46.



Прямыя EF и GH, проведенныя перпендикулярно къ одной и той-же прямой AB (или CD), параллельны между собою. Такъ какъ параллельныя прямыя, заключенныя между двумя параллельными, равны, то EF = GH.

ЧИСЛЕННЫЕ ВОПРОСЫ.

72) Сколько градусовъ въ каждомъ изъ угловъ a, b, c, d, e, f, g, если уголъ $h = 127°$? (фиг. 43).

73) Сколько градусовъ и минутъ въ углѣ c, если уголъ $g = 65°37'$? (фиг. 43).

74) Будуть-ли прямыя CD и EF параллельны, когда уголъ $e = 58^\circ 46'$ и уголъ $b = 121^\circ 14'$? (фиг. 43).

75) Будуть-ли прямыя CD и EF параллельны, когда уголъ $c = 119^\circ 37'$ и уголъ $g = 60^\circ 20'$? (фиг. 43).

76) Разстояніе MK (фиг. 45) составляетъ $^7/_8$ прямой KL, и $LN = 76^3/_4$ саж.; сколько сажень содержитъ прямая MN?

77) Прямая KL (фиг. 45) втрое больше LN, и $MN = 54^1/_2$ саж.; сколько сажень содержитъ прямая KM?

78) Сколько градусовъ и минутъ (фиг. 45) содержатъ углы LMK, KLM, MKL, MNL, если уголъ $MLN = 37^\circ 15'$ и уголъ $LMN = 40^\circ 55'$?

79) Прямыя EG, GH, HF, FE вмѣстѣ (фиг. 46) составляютъ 235 саж., и прямая EF равна $39^3/_4$ саж.; сколько сажень содержитъ прямая EG?

80) Прямыя EG, GH, HF, FE вмѣстѣ (фиг. 46) составляютъ 178 саж., и прямая EF составляетъ $^3/_5$ прямой EG; сколько сажень содержитъ прямая FH?

ТЕОРЕМЫ.

81) Если чрезъ вершину A равнобедреннаго треугольника ABC провести прямую DE параллельно къ основанію BC, то образуются равные углы DAB и EAC.

82) Если чрезъ точку G (фиг. 42) провести прямую GN, которою раздѣлится уголъ BGD на двѣ равныя части, и чрезъ точку H прямую HP, которою уголъ AHE раздѣлится по-поламъ, то прямыя GN и HP должны быть параллельны.

83) Если чрезъ вершину C (фиг. 36) прямоугольнаго треугольника ABC провести прямую DE параллельно къ AB, то образуется уголъ BCE, служащій углу ACB дополненіемъ до прямаго угла.

84) Геометрическое мѣсто точекъ, равно-отстоящихъ отъ двухъ параллельныхъ прямыхъ AB и CD (фиг. 46) есть прямая GH, проведенная чрезъ средину G прямой EF перпендикулярно къ этой прямой.

85) Если чрезъ точку M прямой AD (фиг. 37) провести прямую MN параллельно къ AB до пересѣченія N съ стороною AC, то образуется уголъ MNC, равный углу BAC, и уголъ AMN, равный половинѣ угла BAC.

86) Если основаніе BC равнобедреннаго треугольника ABC раз-

дѣлить въ точкахъ D и E на три равныя части и соединить эти точки съ вершиною A, то уголъ BAC раздѣлится на три угла BAD, DAE, CAE, изъ коихъ углы BAD и CAE равны между собою, но уголъ DAE не равенъ углу BAD (или CAE).

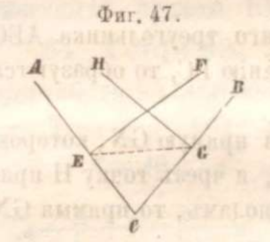
ШЕСТАЯ ГЛАВА.

Углы, стороны которыхъ соотвѣтственно параллельны или перпендикулярны. Сумма угловъ треугольника. Три замѣчательныя точки треугольника.

65. **Теорема**. *Двѣ прямыя, соотвѣтственно перпендикулярныя къ двумъ пересѣкающимся прямымъ, должны пересѣкаться.*

Дано (фиг. 47): EF ⊥ къ AC и GH ⊥ къ BC.

Фиг. 47.



Проведя прямую EG, узнаемъ, что каждый изъ внутреннихъ угловъ FEG и HGE меньше прямаго угла, и ихъ сумма меньше двухъ прямыхъ угловъ; а потому заключаемъ, что прямыя EF и GH не могутъ быть параллельны.

66. **Теорема.** *Два угла, стороны которыхъ соотвѣтственно параллельны, равны, или-же они взаимно дополняются до двухъ прямыхъ угловъ.*

1) Дано (фиг. 48): параллельныя стороны BA и ED направлены снизу вверхъ, а параллельныя стороны BC и EF направлены слѣва на право. Требуется доказать, что $\angle ABC = \angle DEF$.

Фиг. 48.

Продолжимъ сторону DE до пересѣченія H съ стороною BC; тогда $\angle ABC = \angle DHC$ (соотвѣтствующіе углы) по параллельности прямыхъ AB и DH, пересѣченныхъ прямою BC; также

$\angle$ DEF $=$ $\angle$ DHC (соотвѣтствующіе углы) по параллельности прямыхъ GF и BC, пересѣченныхъ прямою DH. Такъ какъ уголъ DHC равенъ $\angle$ ABC и равенъ $\angle$ DEF, то $\angle$ ABC $=$ $\angle$ DEF (10, 1).

2) Дано: сторона BA направлена снизу вверхъ и параллельная ей сторона EH направлена сверху внизъ; сторона BC направлена слѣва на право и параллельная ей сторона EG направлена справа на лѣво. Требуется доказать, что $\angle$ ABC $=$ $\angle$ GEH.

Продолживъ стороны GE и HE за вершину E, получимъ уголъ DEF, равный углу GEH (противоположные углы); но по предъидущему (1) $\angle$ DEF $=$ $\angle$ ABC, слѣдовательно $\angle$ ABC $=$ $\angle$ GEH (10, 1).

3) Дано: параллельныя стороны BA и ED направлены снизу вверхъ; сторона BC направлена слѣва на право, а параллельная ей сторона EG направлена справа на лѣво. Требуется доказать, что $\angle$ ABC $+$ $\angle$ DEG $= 180^0$.

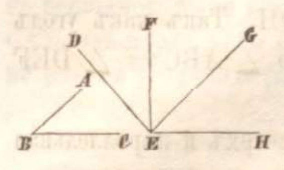
Продолживъ сторону GE за вершину E, получимъ уголъ DEF, равный углу ABC (1). Извѣстно, что $\angle$ DEF $+$ $\angle$ DEG $= 180^0$ (сумма двухъ смежныхъ угловъ). Замѣнивъ уголъ DEF равнымъ ему угломъ ABC, получимъ $\angle$ ABC $+$ $\angle$ DEG $= 180^0$.

Отсюда слѣдуетъ: два угла, которыхъ стороны соотвѣтственно параллельны, равны, если каждыя двѣ параллельныя стороны имѣютъ направленіе въ одну сторону, или если каждыя двѣ параллельныя стороны имѣютъ противоположное направленіе; два угла, которыхъ стороны параллельны, взаимно дополняются до двухъ прямыхъ угловъ, если двѣ параллельныя стороны имѣютъ направленіе въ одну сторону, а двѣ другія параллельныя стороны имѣютъ противоположное направленіе.

67. **Теорема.** *Два угла, которыхъ стороны соотвѣтственно перпендикулярны, равны, или они взаимно-дополняются до двухъ прямыхъ угловъ.*

Дано (фиг. 49): острые углы ABC и DEF, DE $\perp$ къ AB, и

Фиг. 49.



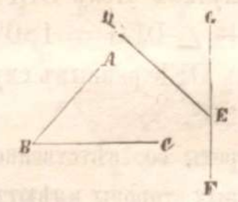
EF ⊥ къ BC. Требуется доказать, что
$\angle ABC = \angle DEF$.

Чрезъ точку E проведемъ EG ⊥ къ ED, и EH ⊥ къ EF; тогда $\angle DEF + \angle FEG = 90^0$ и $\angle GEH + \angle FEG = 90^0$, т. е. одинъ и тотъ-же уголъ FEG дополняется до прямаго угла угломъ DEF и также угломъ GEH; слѣдовательно эти дополненія равны, или $\angle DEF = \angle GEH$. Такъ какъ прямая DE перпендикулярна къ AB (по заданію) и перпендикулярна къ EG, то прямыя BA и EG параллельны. Прямая EF перпендикулярна къ BC и также перпендикулярна къ EH; слѣдовательно прямыя BC и EH параллельны. По предъидущему (теор. 66) $\angle GEH = \angle ABC$; но $\angle GEH = \angle DEF$, слѣдовательно $\angle ABC = \angle DEF$.

2) Точно такимъ-же образомъ доказывается равенство двухъ тупыхъ угловъ, которыхъ стороны соотвѣтственно перпендикулярны.

3) Дано (фиг. 50): острый уголъ ABC и тупой уголъ DEF,

Фиг. 50.



ED ⊥ къ BA и EF ⊥ къ BC. Требуется доказать, что $\angle ABC + \angle DEF = 180^0$.

Продолживъ сторону FE за вершину E, получимъ уголъ DEG, равный углу ABC (1). Также извѣстно, что $\angle DEG + \angle DEF = 180^0$ (сумма смежныхъ угловъ). Замѣнивъ уголъ DEG равнымъ ему угломъ ABC, получимъ $\angle ABC + \angle DEF = 180^0$.

68. **Теорема.** *Сумма угловъ треугольника равна двумъ прямымъ угламъ.*

Продолживъ (фиг. 51) сторону BC, проведемъ чрезъ точку C

Фиг. 51.

прямую CE параллельно къ BA; получимъ $\angle BAC = \angle ACE$ (внутренніе на-крестъ лежащіе углы) по параллельности прямыхъ BA и CE, пересѣченныхъ прямою AC, и $\angle ABC = \angle ECD$ (соотвѣтствующіе углы) по параллельности прямыхъ BA и CE, пере-

сѣченныхъ прямою BD. Зная, что (теор. 28)

$$\angle ACB + \angle ACE + \angle ECD = 180^0$$

и замѣнивъ углы ACE и ECD равными имъ углами BAC и ABC, получимъ

$$\angle ACB + \angle BAC + \angle ABC = 180^0.$$

Слѣдствіе 1. Уголъ ACD, образовавшійся продолженною стороною BC и смежною съ нею стороною AC, называется *внѣшнимъ угломъ* треугольника. Уголъ ACD $= \angle$ ACE $+ \angle$ ECD, но $\angle$ ACE $= \angle$ BAC и $\angle$ ECD $= \angle$ ABC, т. е. *внѣшній уголъ треугольника равенъ суммѣ двухъ внутреннихъ, съ нимъ несмежныхъ угловъ;* такъ напримѣръ если $\angle$ ABC $= 37^0 25'$ и $\angle$ BAC $= 43^0 45'$, то $\angle$ ACD $= 81^0 10'$.

Слѣдствіе 2. Треугольникъ не можетъ имѣть больше одного прямаго или больше одного тупаго угла. Въ треугольникѣ ABC (фиг. 36) уголъ BAC $= 90^0$, а потому $\angle$ ABC $+ \angle$ BCA $= 90^0$; слѣдовательно $\angle$ BAC $= \angle$ ABC $+ \angle$ BCA. Отсюда мы заключаемъ: если въ треугольникѣ уголъ BAC равенъ суммѣ угловъ ABC и BCA, то уголъ BAC долженъ быть прямой.

Слѣдствіе 3. Острые углы прямоугольнаго треугольника взаимно дополняются до прямаго угла; такъ напримѣръ если (фиг. 36) $\angle$ ABC $= 20^0 16'$, то $\angle$ ACB $= 90^0 - 20^0 16' = 69^0 44'$.

Слѣдствіе 4. Уголъ BAC $= 180^0 - (\angle$ ABC $+ \angle$ ACB$)$, т. е. всякій уголъ треугольника дополняетъ сумму двухъ остальныхъ угловъ до 180^0; такъ напримѣръ, если $\angle$ ABC $= 75^0 24'$ и $\angle$ ACB $= 28^0 48'$, то $\angle$ BAC $= 180^0 - (75^0 24' + 28^0 48') = 75^0 48'$.

69. **Теорема.** *Если стороны двухъ треугольниковъ соотвѣтственно параллельны или перпендикулярны, то соотвѣтствующіе углы равны.*

Назовемъ данные треугольники чрезъ ABC и DEF. Если въ нихъ стороны AB и DE, AC и DF, BC и EF параллельны или пер-

пендикулярны, то вслѣдствіе доказанныхъ теоремъ (66 и 67) мы имѣемъ

$\angle$ BAC = $\angle$ EDF или $\angle$ BAC + $\angle$ EDF = 180°,

$\angle$ ABC = $\angle$ DEF или $\angle$ ABC + $\angle$ DEF = 180°,

$\angle$ ACB = $\angle$ DFE или $\angle$ ACB + $\angle$ DFE = 180°;

слѣдовательно для этихъ угловъ представляются три случая:

1) когда $\angle$ BAC + $\angle$ EDF = 180°, $\angle$ ABC + $\angle$ DEF = 180°, $\angle$ ACB + $\angle$ DFE = 180°;

2) когда $\angle$ BAC = $\angle$ EDF, $\angle$ ABC + $\angle$ DEF = 180°, $\angle$ ACB + $\angle$ DFE = 180°; и

3) когда $\angle$ BAC = $\angle$ EDF, $\angle$ ABC = $\angle$ DEF, $\angle$ ACB = $\angle$ DFE.

Допустивъ, что

$\angle$ BAC + $\angle$ EDF = 180°, $\angle$ ABC + $\angle$ DEF = 180° и $\angle$ ACB + $\angle$ DFE = 180°, мы узнаемъ, что въ двухъ данныхъ треугольникахъ сумма угловъ равняется 540°; что не возможно. Если-же предположить, что въ данныхъ треугольникахъ $\angle$ BAC = $\angle$ EDF, $\angle$ ABC + $\angle$ DEF = 180° и $\angle$ ACB + $\angle$ DFE = 180°, то ихъ сумма угловъ окажется больше 360°. Отсюда мы заключаемъ, что для данныхъ треугольниковъ возможно допустить только случай, когда $\angle$ BAC = $\angle$ EDF, $\angle$ ABC = $\angle$ DEF, $\angle$ ACB = $\angle$ DFE.

70. Теорема. *Если точку пересѣченія прямыхъ, раздѣляющихъ два угла треугольника соотвѣтственно на двѣ равныя части, соединить съ вершиною третьяго угла прямою, то эта прямая раздѣлитъ также третій уголъ на двѣ равныя части.*

Фиг. 52.

Дано (фиг. 52): точка O пересѣченія прямыхъ, раздѣляющихъ углы ABC и ACB даннаго треугольника на двѣ равныя части, и прямая AO, соединяющая вершину A съ точкою O. Требуется доказать, что

$\angle$ BAO = $\angle$ CAO.

Изъ точки O опустимъ перпендикуляры OD, OE, OF на стороны BC, AC, AB; получимъ равные треугольники BOD и BOF, потому-что сторона BO общая и $\angle$ DBO = $\angle$ FBO (по заданію); слѣдовательно (53) OD = OF. Также прямоугольные треугольники CDO и CEO равны, потому-что сторона CO общая и $\angle$ DCO = $\angle$ ECO (по заданію); слѣдовательно (53) OD = OE. По равенству прямыхъ OD = OF и OD = OE мы имѣемъ OF = OE. Наконецъ прямоугольные треугольники AOF и AOE равны, потому-что сторона AO общая и OF = OE; слѣдовательно $\angle$ FAO = $\angle$ EAO.

Слѣдствіе. Прямыя, которыми раздѣляются углы треугольника соотвѣтственно на двѣ равныя части, пересѣкаются въ одной точкѣ, равно-отстоящей отъ сторонъ треугольника.

71. **Теорема**. *Если точку пересѣченія перпендикуляровъ, возставленныхъ къ двумъ сторонамъ треугольника изъ среднихъ точекъ, соединить прямою съ срединою третьей стороны, то эта прямая должна быть перпендикулярна къ третьей сторонѣ треугольника.*

Дано (фиг. 53): прямая OD перпендикулярна къ BC, прямая OE перпендикулярна къ AC, BD = CD, AF = BF, AE = CE. Требуется доказать, что прямая OF перпендикулярна къ AB.

Фиг. 53.

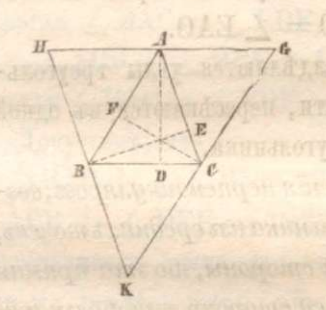
По предъидущему (65) извѣстно, что перпендикуляры DO и EO пересѣкаются. Потомъ извѣстно, что треугольникъ BOC долженъ быть равнобедренный, потому-что прямая OD, проведенная перпендикулярно къ BC, проходитъ чрезъ вершину O и средину D стороны BC; слѣдовательно OB = OC. Точно также доказывается, что треугольникъ AOC равнобедренный и OC = OA. Наконецъ треугольники BFO и AFO равны, потому-что сторона FO общая, OA = OB (по доказанному) и AF = BF (по заданію); слѣдовательно $\angle$ AFO = $\angle$ BFO. По равенству этихъ угловъ (22) мы заключаемъ, что они прямые и прямая FO перпендикулярна къ AB.

Слѣдствіе. Перпендикуляры, возставленные къ сторонамъ треугольника изъ среднихъ точекъ, пересѣкаются въ одной точкѣ, равно-отстоящей отъ вершинъ треугольника.

72. **Теорема**. *Перпендикуляры, опущенные изъ вершинъ треугольника на противолежащія стороны, пересѣкаются въ одной точкѣ.*

Прямыя AD, BE, CF соотвѣтственно перпендикулярны къ сторонамъ BC, AC и AB (фиг. 54). Чрезъ вершины A, B, C проведемъ прямыя: HG || къ BC, HK || къ AC, GK || къ AB. Такъ какъ параллельныя, заключающіяся между параллельными, равны (63), то BC = AG и BC = HA; слѣдовательно HA = AG. По той-же причинѣ AB = CG и AB = CK, также AC = BH и AC = BK; слѣдовательно CG = CK и BH = BK. По параллельности прямыхъ BC и HG, прямая AD перпендикулярна къ HG. Точно также доказывается, что прямая BE ⊥ къ HK и прямая CF ⊥ къ KG. Такъ какъ прямыя AD, BE, CF проведены чрезъ среднія точки A, B, C прямыхъ HG, HK и GK перпендикулярно къ этимъ прямымъ, то по предъидущему (70) эти перпендикуляры пересѣкутся въ одной точкѣ.

Фиг. 54.



ЧИСЛЕННЫЕ ВОПРОСЫ.

87) Сколько градусовъ содержитъ каждый уголъ равносторонняго треугольника?

88) Въ прямоугольномъ треугольникѣ ABC (фиг. 36) уголъ ACB = 37°48′; сколько градусовъ и минутъ въ углѣ ABC?

89) Въ равнобедренномъ треугольникѣ ABC сторона AB = AC и уголъ BAC = 72°35′; сколько градусовъ и минутъ въ углѣ ABC?

90) Зная, что AB = AC (фиг. 51) и ∠ BAC = 54°10′, узнать, сколько градусовъ содержитъ внѣшній уголъ ACD.

91) Зная, что AC = BC (фиг. 51) и ∠ ACD = 162°15′, узнать, сколько градусовъ содержитъ уголъ ABC.

92) Сколько градусовъ содержитъ уголъ ABC (фиг. 51), если ∠ ACE = 43°10′ и ∠ ACB = 36°?

93) Сколько градусовъ содержитъ уголъ BAC (фиг. 51), если ∠ DCE = 33°45′ и ∠ ACB = 54°?

94) Въ треугольникѣ ABC уголъ ABC = ∠ BAC + ∠ ACB и ∠ACB = 25°17′; сколько градусовъ и минутъ содержатъ углы ABC и BAC?

95) Продолженіемъ BG стороны AB прямоугольнаго треугольника ABC (фиг. 36) образуется внѣшній уголъ CBG; сколько градусовъ и минутъ содержитъ уголъ CBG, если ∠ ACB = 53°15′?

96) Въ треугольникѣ ABC (фиг. 51) AC = BC и ∠ BAC = 62°35′; сколько градусовъ и минутъ содержитъ уголъ ACD?

97) Чрезъ вершину A равнобедреннаго треугольника ABC проведена прямая DE параллельно къ основанію BC, составляющая съ стороною AB уголъ DAB = 47°25′; сколько градусовъ и минутъ содержитъ каждый уголъ даннаго треугольника?

98) Въ треугольникѣ ABC (фиг. 51), имѣющемъ равныя стороны AB и AC, проведена прямая AG перпендикулярно къ BC; сколько градусовъ и минутъ содержитъ уголъ BAG, если уголъ ACD = 146°15′?

99) Если въ треугольникѣ ABC (фиг. 51) уголъ ABC = 90° и уголъ ACE = 67°48′, то сколько градусовъ и минутъ въ углѣ BCA?

100) Въ треугольникѣ ABC (фиг. 51) уголъ BAC = 54°26′ и уголъ DCE = 68°28′; сколько градусовъ и минутъ содержатъ углы ABC и ACB?

101) Въ треугольникѣ ABC (фиг. 51) уголъ ACB = 47°48′ и уголъ DCE = 56°25′; сколько градусовъ и минутъ содержатъ углы ABC и BAC?

102) Если въ треугольникѣ ABC (фиг. 51) уголъ ACB = 90° и уголъ DCE = 38°43′, то сколько градусовъ и минутъ содержитъ уголъ BAC?

ТЕОРЕМЫ.

103) Если изъ точки D, взятой внутри угла ABC, опустить перпендикуляры DE и DF на стороны BA и BC, то образуется уголъ EDF, которымъ уголъ ABC дополняется до двухъ прямыхъ угловъ.

104) Если чрезъ точку C (фиг. 35) перпендикуляра CD проведены наклонныя CF и CG, то та изъ нихъ составляетъ съ сѣкущею AB наименьшій уголъ, которая наиболѣе отстоитъ отъ основанія D перпендикуляра.

105) Прямая AD, раздѣляющая на двѣ равныя части внѣшній уголъ CAE, расположенный при вершинѣ A равнобедреннаго треугольника ABC, параллельна къ основанію BC.

106) Если внутри треугольника ABC взять точку D и соединить ее съ точками A и C прямыми DA и DC, то уголъ ADC, образуемый этими прямыми, больше угла ABC.

107) Прямая CD, проведенная перпендикулярно къ боку AC равнобедреннаго треугольника ABC, составляетъ съ основаніемъ BC острый уголъ BCD, равный половинѣ угла BAC.

108) Если въ прямоугольномъ треугольникѣ изъ вершины B прямаго угла опустить перпендикуляръ BD на гипотенузу AC, то уголъ ABD, составляемый перпендикуляромъ BD съ катетомъ BA, равенъ углу ACB, составляемому гипотенузою съ катетомъ BC.

109) Если въ равнобедренномъ треугольникѣ ABC, коего уголъ BAC при вершинѣ равенъ половинѣ угла ABC при основаніи, проведена прямая BD, раздѣляющая уголъ ABC на двѣ равныя части, то образуются два равнобедренные треугольника ABD и BCD.

110) Если въ прямоугольномъ треугольникѣ ABC острый уголъ BAC вдвое больше остраго угла ACB, то меньшій катетъ AB равенъ половинѣ гипотенузы AC.

СЕДЬМАЯ ГЛАВА.

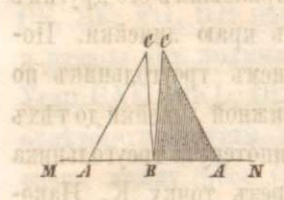
Рѣшеніе геометрическихъ задачъ построенія.

73. Для проведенія на бумагѣ параллельныхъ и перпендикулярныхъ линій употребляется обыкновенно линейка съ *чертежнымъ треугольникомъ* (фиг. 55). У чертежнаго треугольника два смежные края BA и BC составляютъ прямой уголъ, а край AC (гипотенуза), противолежащій прямому углу, дѣлается иногда скошеннымъ (срѣзаннымъ).

Фиг. 55.

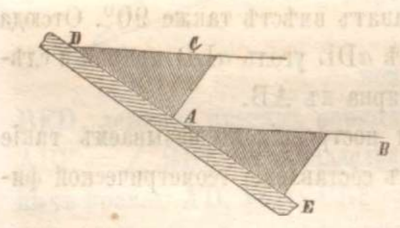
Въ вѣрномъ чертежномъ треугольникѣ края BA и BC (фиг. 56) должны быть взаимно-перпендикулярны. Для повѣрки этого условія проведемъ какую-нибудь прямую MN и, приложивъ къ ней чертежный треугольникъ краемъ AB, проведемъ прямую по краю BC. Потомъ обратимъ треугольникъ около точки B такимъ образомъ, чтобы его край AB совмѣстился съ прямою MN по другую сторону точки B, и проведемъ еще прямую по краю BC. Если проведенныя прямыя слились въ одну прямую, то значитъ: треугольникъ вѣренъ. Въ противномъ случаѣ, т. е. если проведенныя прямыя составляютъ уголъ CBC, то края AB и CB не перпендикулярны и треугольникъ не вѣренъ.

Фиг. 56.



74. Чтобы чрезъ точку C провести прямую параллельно къ прямой AB (фиг. 57), приложимъ чертежный треугольникъ гипотенузою къ прямой AB. Придержавъ его правою рукою, приложимъ линейку краемъ къ его катету. Потомъ придержимъ линейку лѣвою рукою, а правою рукою будемъ двигать треугольникъ по краю линейки вверхъ (или внизъ) до тѣхъ поръ, пока гипотенуза закроетъ точку C. Наконецъ по гипотенузѣ проведемъ прямую DC чрезъ точку C.

Фиг. 57.

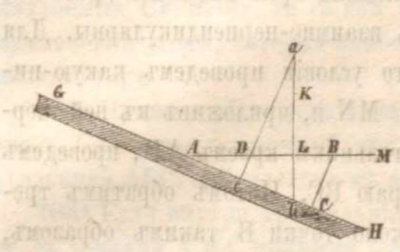


Прямая DC параллельна къ AB. Дѣйствительно, прямая DE составляетъ съ прямыми AB и DC соотвѣтствующіе углы EAB и EDC, которые равны.

Для проведенія параллельныхъ прямыхъ нѣтъ надобности, чтобы чертежный треугольникъ имѣлъ прямой уголъ.

75. Чтобы изъ точки K (фиг. 58) опустить перпендикуляръ на прямую AM, приложимъ чертежный треугольникъ гипотенузою къ AM, а линейку краемъ GH къ катету AC. Придержавъ линейку лѣ-

Фиг. 58.



вою рукою и снявъ треугольникъ съ бумаги, приложимъ его другимъ катетомъ къ краю линейки. Потомъ подвинемъ треугольникъ по краю неподвижной линейки до тѣхъ поръ, пока гипотенуза треугольника пройдетъ чрезъ точку K. Наконецъ придержавъ треугольникъ, проведемъ чрезъ K прямую KL по гипотенузѣ.

Прямая KL перпендикулярна къ AM. Въ самомъ дѣлѣ, отъ перемѣщенія чертежнаго треугольника прямой уголъ ACB принялъ положеніе acb и острый уголъ BAC перемѣстился въ bac; слѣдовательно $\angle BAC = \angle bac$. Уголъ $ADc = \angle aDL$ (вертикальные углы) и уголъ AcD прямой, потому-что смежный ему уголъ acb прямой. Такъ какъ въ прямоугольномъ треугольникѣ ADc уг. $ADc + \angle DAc = 90^{\circ}$, то равные имъ углы aDL и bac составятъ вмѣстѣ также 90°. Отсюда мы заключаемъ, что въ треугольникѣ aDL уголъ aLD прямой и слѣдовательно прямая aL перпендикулярна къ AB.

76. Геометрическими задачами построенія мы называемъ такіе вопросы, которыхъ рѣшеніе требуетъ составленіе геометрической фигуры.

Прямую AB раздѣлить на 5 (или на сколько угодно) равныхъ частей (фиг. 59).

Фиг. 59.

Чрезъ точку A проведемъ какую-нибудь прямую AD и на ней отложимъ циркулемъ пять равныхъ частей AC, CE, EF, FG, GH. Потомъ соединимъ точки B и H прямою BH и чрезъ точки C, E, F, G проведемъ прямыя CK, EL, FM, GN параллельно къ BH до пересѣченія съ прямою AB; тогда точками K, L, M, N прямая AB раздѣлится на пять равныхъ частей.

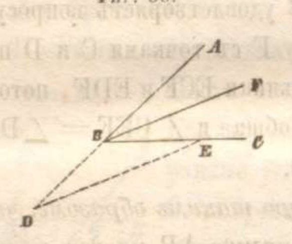
Доказательство. Чрезъ точки K, L, M, N проведемъ прямыя

KP, LO, MQ, NR параллельно къ AD. Вслѣдствіе теоремы (63) мы имѣемъ KP = CE, LO = EF, MQ = FG, NR = GH. Прямыя AC, CE, EF, FG, GH равны между собою по отложенію; слѣдовательно и равныя имъ прямыя AC, KP, LO, MQ, NR равны между собою. Углы CAK, PKL, OLM, QMN, RNB равны между собою, какъ соотвѣтствующіе углы, и также углы ACK, KPL, LOM, MQN, NRB равны между собою (теор. 66); слѣдовательно треугольники AKC, KLP, LMO, MNQ, NBR равны и ихъ стороны AK, KL, LM, MN, NB равны.

77. *Данный уголъ раздѣлить на двѣ равныя части (фиг. 60).*

На сторонѣ BC и на продолженіи стороны AB отложимъ равныя части BE и BD. Потомъ соединимъ точки D и E прямою DE и параллельно къ этой прямой проведемъ прямую BF чрезъ вершину B. Прямая BF раздѣлитъ данный уголъ на двѣ равныя части.

Фиг. 60.



Доказательство. Въ равнобедренномъ треугольникѣ DBE углы BDE и BED, лежащіе противъ равныхъ сторонъ BE и BD, равны. Уголъ ABF = ∠ BDE по параллельности прямыхъ BF и DE, пересѣченныхъ прямою AD. Уголъ CBF = ∠ BED по параллельности прямыхъ BF и DE, пересѣченныхъ прямою BC. Такъ какъ углы BDE и BED равны, то и равные имъ углы ABF и CBF должны быть равны; слѣдовательно ∠ ABF = ∠ CBF = $1/2$ ∠ ABC.

78. Геометрическіе вопросы часто рѣшаются *аналитическимъ* способомъ. Этотъ способъ примѣненъ къ рѣшенію слѣдующихъ задачъ.

На данной прямой AB *опредѣлить точку, равно-отстоящую отъ данныхъ точекъ* C *и* D (фиг. 61).

Предположимъ, что задача рѣшена и что на прямой AB найдена точка F, равно-отстоящая отъ точекъ C и D; слѣдовательно разстоянія FC и FD должны быть равны. Пересѣкающіяся прямыя

Фиг. 61.

FC и FD будутъ наклонныя относительно прямой CD, соединяющей данныя точки C и D. Такъ какъ эти наклонныя равны, то они должны находиться на равныхъ разстояніяхъ отъ основанія перпендикуляра FE, опущеннаго изъ точки F пересѣченія наклонныхъ на прямую CD (теор. 49); слѣдовательно должно быть CE = DE.

Рѣшеніе. Теперь уже легко произвести самое рѣшеніе задачи: *a*) должно соединить точки C и D прямою CD, *b*) прямую CD должно раздѣлить въ точкѣ E на двѣ равныя части (76), и *c*) изъ точки E должно возставить перпендикуляръ EF къ прямой CD (75). Точка F пересѣченія прямыхъ EF и AB удовлетворяетъ вопросу.

Доказательство. Соединивъ точку F съ точками C и D прямыми FC и FD, получимъ равные треугольники ECF и EDF, потому-что CE = DE по раздѣленію, сторона EF общая и $\angle$ CEF = $\angle$ DEF (прямые углы); слѣдовательно FC = FD.

79. *Чрезъ точку* C *провести прямую такимъ образомъ, чтобы эта прямая раздѣлила данную прямую* AB *на двѣ равныя части (фиг. 62).*

Предположимъ, что задача рѣшена и что прямая CD раздѣляетъ

Фиг. 62.

данную прямую AB на двѣ равныя части; слѣдовательно получимъ AE = EB и $\angle$ AED = $\angle$ BEC (вертикальные углы). Если теперь начертить при точкахъ A и B равные углы, то получатся равные треугольники (теор. 38). Для этого соединимъ точки B и C прямою BC и параллельно къ этой прямой проведемъ прямую AD чрезъ точку A; получимъ равные внутренніе на-крестъ лежащіе углы DAE и EBC. Изъ равныхъ треугольниковъ AED и BCE слѣдуетъ, что AD = BC.

Рѣшеніе. Для рѣшенія этой задачи: *a*) соединимъ точки B и C прямою BC, *b*) параллельно къ BC проведемъ прямую чрезъ точку A, *c*) на этой прямой отложимъ часть AD, равную BC, но въ сторону,

противоположную направленію BC, и *d*) соединимъ точки C и D прямою CD. Точкою E пересѣченія прямыхъ AB и CD раздѣлится прямая AB на двѣ равныя части.

Доказательство. Треугольники AED и BCE равны, потому-что AD = BC по отложенію, ∠ DAE = ∠ EBC по параллельности прямыхъ AD и BC, пересѣченныхъ прямою AB, ∠ ADE = ∠ BCE по параллельности прямыхъ AD и BC, пересѣченныхъ прямою DC; слѣдовательно AE = EB.

80. *Требуется провести двѣ прямыя такъ, чтобы первая прошла чрезъ точку* A *и вторая чрезъ* B, *и чтобы они, пересѣкаясь на данной прямой* MN, *образовали равные углы съ этою прямою* (фиг. 63).

Положимъ, что задача рѣшена, и что прямыя AC и BC составляютъ съ прямою MN равные углы ACM и BCN.

Фиг. 63.

Какимъ образомъ можно получить при точкѣ C эти равные углы? Продолживъ прямую BC за вершину C, получимъ уголъ MCD, равный углу BCN (вертикальные углы); слѣдовательно и ∠ ACM долженъ равняться ∠ MCD. Какимъ-же образомъ должно получить равные углы ACM и MCD? Сдѣлавъ CD = CA и проведя прямую AD, получимъ равнобедренный треугольникъ ACD, въ которомъ ∠ ACE = ∠ DCE, если прямая CE перпендикулярна къ основанію AD и проходитъ чрезъ средину E прямой AD.

Рѣшеніе. Изъ точки A опустимъ перпендикуляръ AE на MN и на его продолженіи отложимъ часть ED, равную AE. Соединивъ прямою DB точки D и B, и прямою AC точку A съ точкою C пересѣченія прямыхъ MN и DB, получимъ требуемыя прямыя BC и AC.

Доказательство. Треугольники ACE и DCE равны, потому-что сторона EC общая, AE = ED по отложенію и ∠ AEC = ∠ DEC (прямые углы); слѣдовательно ∠ ACE = ∠ DCE. Такъ какъ

∠ DCE = ∠ BCN (вертикальные углы), то ∠ ACE = ∠ BCN (10, 1).

81. *Чрезъ точку* D, *данную внутри угла* ABC, *требуется провести прямую такъ, чтобы она составляла съ прямыми* BA *и* BC *равные углы* (фиг. 64).

Положимъ, что задача рѣшена и что прямая FG, проходящая чрезъ данную точку D, составляетъ равные углы BFG и BGF съ сторонами BA и BC. Этимъ равнымъ угламъ должны противолежать равныя стороны BG и BF. Какимъ образомъ опредѣлятся точки F и G? Проведя чрезъ точку D прямую DE до пересѣченія съ прямою BA параллельно къ сторонѣ BC, получимъ ∠ EDF = ∠ BGF (соотвѣтствующіе углы); слѣдовательно ∠ EDF = ∠ EFD и EF = ED.

Фиг. 64.

Рѣшеніе. Проведя прямую DE параллельно къ BC, сдѣлаемъ EF = ED и чрезъ точки F и D проведемъ прямую FG.

Доказательство. Въ треугольникѣ DEF стороны ED и EF равны (по отложенію) и противъ этихъ равныхъ сторонъ лежатъ равные углы EFD и EDF. Потомъ по параллельности прямыхъ BC и ED уг. BGF = ∠ EDF. Такъ какъ ∠ BFG = ∠ EDF и ∠ BGF = ∠ EDF, то ∠ BFG = ∠ BGF.

82. *Между прямыми* AB *и* CD *требуется провести прямую такъ, чтобы она данною точкою* M *раздѣлилась на двѣ равныя части* (фиг. 65).

Предположимъ, что найдена прямая HK, которая точкою M раздѣляется на двѣ равныя части MH и MK. На прямыхъ MH и MK начертимъ два равные треугольника. Для этого проведемъ прямую HF параллельно къ AB, и чрезъ точку M прямую EF до пересѣченія съ прямою HF. Будутъ-ли треугольники MKE и MHF равны? Въ нихъ MK = MH, ∠ MKE = ∠ MHF (внутренніе на-

Фиг. 65.

крестъ лежащіе углы) и $\angle$ EMK = $\angle$ FMH; слѣдовательно ME = MF.

Рѣшеніе. Чрезъ точку M проведя прямую, сдѣлаемъ MF = ME. Потомъ проведемъ прямую FH чрезъ точку F параллельно къ AB до пересѣченія H съ прямою CD. Наконецъ проведемъ прямую чрезъ точки H и M.

Доказательство. Треугольники MKE и MHF равны, потому-что ME = MF, $\angle$ MEK = $\angle$ MFH и $\angle$ EMK = $\angle$ FMH; слѣдовательно MK = MH.

ЗАДАЧИ ДЛЯ УПРАЖНЕНІЯ.

111) Чрезъ три точки A, B и C, не лежащія на одной прямой, провести параллельныя прямыя, равно-отстоящія между собою.

112) Построить равнобедренный треугольникъ, котораго основаніе должно равняться данной прямой AB и перпендикуляръ, возставленный изъ средины основанія долженъ равняться прямой CD.

113) Внѣ даннаго треугольника ABC чрезъ его вершину A провести прямую, составляющую съ сторонами AB и AC равные углы.

114) На данной прямой AB опредѣлить точку, равно-отстоящую отъ точекъ C и D, когда точка C находится надъ прямою AB, а точка D лежитъ подъ прямою AB.

115) На гипотенузѣ AB прямоугольнаго треугольника ABC опредѣлить точку D, равно-отстоящую отъ вершины B и противолежащаго ей катета AC.

116) Даны: точка A надъ прямою MN и точка B подъ прямою MN. Требуется провести двѣ прямыя: первую чрезъ точку A и вторую чрезъ точку B такимъ образомъ, чтобы эти прямыя, пересѣкаясь на прямой MN, составляли съ нею равные углы.

117) Дана прямая EF внѣ угла ABC. Между сторонами этого угла требуется провести прямую, параллельную и равную прямой EF.

118) Требуется опредѣлить точку, коей разстояніе отъ двухъ данныхъ непараллельныхъ прямыхъ AB и CD должно равняться данной прямой EF.

119) Между двумя прямыми, которыя не могутъ быть продолжены до ихъ пересѣченія, провести прямую такимъ образомъ, чтобы она составляла съ данными прямыми равные углы.

120) Даны три точки A, B и C, не лежащія на одной прямой. Чрезъ точку A требуется провести прямую, равно-отстоящую отъ точекъ B и C.

121) Чрезъ точку P, данную внутри угла ABC, провести прямую DE между сторонами BA и BC такимъ образомъ, чтобы образовались на нихъ равные отрѣзки BD и BE.

122) Чрезъ точку P, данную внутри угла ABC, провести прямую между сторонамм BA и BC такъ, чтобы эта прямая раздѣлилась въ точкѣ P на двѣ равныя части.

123) На каждой изъ данныхъ прямыхъ AB и FG (фиг. 50) требуется построить равнобедренный треугольникъ такимъ образомъ, чтобы эти треугольники имѣли общую вершину. (Данныя прямыя должны быть основаніями искомыхъ треугольниковъ. Въ какомъ случаѣ вопросъ невозможенъ?)

124) Чрезъ точку P, данную внѣ угла ABC, провести прямую до пересѣченія съ дальнѣйшею стороною BC такимъ образомъ, чтобы искомая прямая раздѣлилась ближайшею стороною BA на двѣ равныя части.

125) Провести прямую перпендикулярно къ сторонѣ BC даннаго угла ABC такъ, чтобы этотъ перпендикуляръ, заключенный между сторонами BA и BC, равнялся данной прямой DE.

126) Въ данномъ треугольникѣ ABC требуется провести прямую DE параллельно къ AB между сторонами AC и BC такимъ образомъ, чтобы прямая DE равнялась отрѣзку AD.

127) Провести прямую такимъ образомъ, чтобы отъ нея равноотстояли двѣ данныя точки A и B. (Сколько рѣшеній допускаетъ этотъ вопросъ?)

Примѣчаніе. Вопросъ, допускающій безконечное число рѣшеній, называется *неопредѣленнымъ*.

128) Между сторонами AB и AC треугольника ABC провести прямую DE параллельно къ сторонѣ BC такимъ образомъ, чтобы прямая DE равнялась суммѣ отрѣзковъ BD и CE.

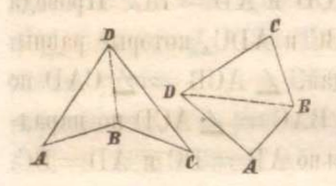
129) Провести двѣ параллельныя прямыя: первую чрезъ точку A и вторую чрезъ точку B такимъ образомъ, чтобы онѣ на данной прямой MN отрѣзали часть, равную прямой CD.

ВОСЬМАЯ ГЛАВА.

Четыреугольники и многоугольники.

83. Часть плоскости, ограниченная четырьмя прямыми линіями, называется *четыреугольникомъ* (фиг. 66). Прямыя AB, BC, CD, DA суть *стороны* четыреугольника. Прямая, соединяющая вершины B и D двухъ противолежащихъ угловъ четыреугольника, называется его *діагоналію*. Сумма сторонъ всякаго четыреугольника называется его *периметромъ*.

Фиг. 66.



Теорема. *Сумма угловъ четыреугольника равна 360°.*

Проведя діагональ BD (фиг. 66), получимъ два треугольника ABD и CBD, въ которыхъ

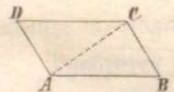
$$\angle BAD + \angle ADB + \angle ABD = 180^0 \text{ и}$$
$$\angle DBC + \angle BCD + \angle CDB = 180^0;$$

слѣдовательно

$$\angle BAD + \angle ADB + \angle ABD + \angle DBC + \angle BCD + \angle CDB = 360^0 \text{ или } \angle BAD + \angle ADC + \angle BCD + \angle ABC = 360^0.$$

84. Четыреугольникъ ABCD (фиг. 67), въ которомъ противолежащія стороны по-парно параллельны, называется *параллелограмомъ*.

Фиг. 67.



Теорема. *Въ параллелограмѣ: 1) противолежащіе углы равны, и 2) противолежащія стороны равны.*

Требуется доказать (фиг. 67), что $\angle ABC = \angle ADC$.

Зная, (теор. 60), что сумма внутреннихъ угловъ, образуемыхъ двумя параллельными съ сѣкущею, равна двумъ прямымъ угламъ, мы имѣемъ

$$\angle ABC + \angle BAD = 180^0 \text{ и}$$
$$\angle CDA + \angle BAD = 180^0.$$

Изъ этихъ двухъ равенствъ получимъ

$$\angle ABC + \angle BAD = \angle CDA + \angle BAD,$$

откуда $\angle ABC = \angle CDA$.

Такъ какъ углы ABC и CDA равны, то ихъ дополненія до двухъ прямыхъ также равны, т. е. $\angle BCD = \angle BAD$.

2) Требуется доказать, что $AB = CD$ и $AD = BC$. Проведя діагональ AC, получимъ треугольники ABC и ADC, которые равны. Дѣйствительно, въ нихъ сторона AC общая, $\angle ACB = \angle CAD$ по параллельности прямыхъ BC и AD и $\angle BAC = \angle ACD$ по параллельности прямыхъ AB и DC; слѣдовательно $AB = DC$ и $AD = BC$.

Слѣдствіе. Діагональю раздѣляется параллелограмъ на два равные треугольника.

Обратное предложеніе. *Четыреугольникъ, въ которомъ: 1) противолежащіе углы равны, или 2) противолежащія стороны равны, есть параллелограмъ.*

1) Дано (фиг. 67): $\angle BAD = \angle BCD$, $\angle ABC = \angle ADC$. Въ четыреугольникѣ ABCD сумма угловъ равна

$\angle BAD + \angle ABC + \angle BCD + \angle ADC = 2\angle BAD + 2\angle ABC$,

потому-что по заданію $\angle BAD = \angle BCD$ и $\angle ABC = \angle ADC$; эта-же сумма угловъ равна (теор. 83)

$$\angle BAD + \angle ABC + \angle BCD + \angle ADC = 360^0;$$

слѣдовательно

$$2\angle BAD + 2\angle ABC = 360^0 \text{ или}$$

$$\angle BAD + \angle ABC = 180^0.$$

Такъ какъ сумма угловъ BAD и ABC равна 180^0, то (теор. 60) прямыя AD и BC должны быть параллельны.

По доказанному извѣстно, что $\angle BAD + \angle ABC = 180^0$ и по заданію $\angle ABC = \angle ADC$. Замѣнивъ уголъ ABC угломъ ADC, получимъ $\angle BAD + \angle ADC = 180^0$; отсюда мы заключаемъ, (теор. 60), что прямыя AB и DC параллельны.

По параллельности сторонъ AD и BC, и сторонъ AB и DC мы заключаемъ, что четыреугольникъ ABCD параллелограмъ.

2) Дано (фиг. 67): AB = DC и AD = BC. Требуется доказать, что ABCD параллелограмъ.

Проведя діагональ AC, получимъ два равные треугольника ABC и ADC, потому-что въ нихъ сторона AC общая, AB = DC (по заданію) и AD = BC (по заданію); слѣдовательно ∠ ACD = ∠ BAC и ∠ CAD = ∠ ACB. По равенству внутреннихъ на-крестъ лежащихъ угловъ ACD и BAC мы заключаемъ, что стороны DC и AB параллельны, и по равенству внутреннихъ на-крестъ лежащихъ угловъ CAD и ACB стороны AD и BC должны быть параллельны.

86. **Теорема.** *Если въ четыреугольникѣ двѣ противолежащія стороны равны и параллельны, то и двѣ остальныя стороны равны и параллельны, и четыреугольникъ есть параллелограмъ.*

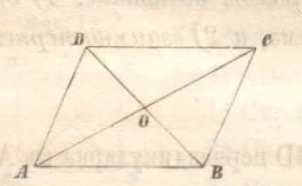
Дано (фиг. 67): AB = DC и AD параллельно къ DC. Требуется доказать, что AD = BC и AD параллельно къ BC.

Проведя діагональ AC, получимъ два равные треугольника ABC и ADC, потому-что въ нихъ сторона AC общая, AB = DC (по заданію) и ∠ BAC = ∠ DCA (по параллельности прямыхъ AB и DC); слѣдовательно BC = AD и ∠ BCA = ∠ CAD. По равенству этихъ угловъ мы заключаемъ, что стороны BC и AD параллельны.

87. **Теорема.** *Въ параллелограмѣ діагонали взаимно дѣлятся по-поламъ.*

Требуется доказать (фиг. 68), что AO = CO и BO = DO.

Фиг. 68.



Треугольники ABO и CDO равны, потому-что въ нихъ AB = DC, ∠ BAO = ∠ DCO и ∠ ABO = ∠ CDO (внутренніе на-крестъ лежащіе углы); слѣдовательно AO = CO и BO = DO.

88. **Теорема.** *Два параллелограма равны, если двѣ смежныя стороны одного соотвѣтственно равны двумъ смежнымъ сторонамъ другаго параллелограма, и углы, заключающіеся между этими сторонами, равны.*

Дано (фиг. 69): AB = EF, AD = EH, ∠ BAD = ∠ FEH. Требуется доказать, что ABCD = EFGH.

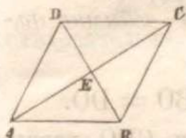
Фиг. 69.

Наложимъ параллелограмъ ABCD на параллелограмъ EFGH такимъ образомъ, чтобы стороны AB и EF совмѣстились; тогда по равенству угловъ BAD и FEH прямая AD пойдетъ по EH, и по равенству сторонъ AD и EH точка D упадетъ въ H. Прямая DC, параллельная къ AB, пойдетъ по прямой HG, параллельной къ EF, и вершина C упадетъ въ какую-нибудь точку прямой HG. Прямая BC, параллельная къ AD, пойдетъ по прямой FG, параллельной къ EH, и вершина C упадетъ въ какую-нибудь точку прямой FG. Такъ какъ вершина C должна находиться на прямыхъ HG и FG, то она упадетъ въ точку G пересѣченія этихъ прямыхъ; слѣдовательно параллелограмъ ABCD совмѣстится съ параллелограмомъ EFGH.

89. **Теорема.** *Если въ параллелограмѣ* ABCD *(фиг. 70) двѣ смежныя стороны* AB *и* BC *равны, то всѣ стороны равны между собою.*

По предъидущему (84) извѣстно, что AB = DC и AD = BC; но такъ какъ по заданію AB = BC, то AB = BC = DC = AD.

Фиг. 70.



Параллелограмъ, въ которомъ всѣ стороны равны, называется *ромбомъ*.

90. **Теорема.** *Въ ромбѣ діагонали: 1) дѣлятся взаимно по-поламъ, и 2) взаимно-перпендикулярны.*

1) См. доказательство теор. 87.

2) Требуется доказать, что прямая BD перпендикулярна къ AC (фиг. 70).

По равенству сторонъ AB и BC мы заключаемъ, что ABC равнобедренный треугольникъ. Такъ какъ по предъидущему (теор. 87) AE = CE, то прямая BE, соединяющая вершину B равнобедреннаго

треугольника ABC съ срединою E его основанія, должна быть перпендикулярна къ этому основанію; слѣдовательно прямая BD перпендикулярна къ AC.

90. **Теорема.** *Два ромба равны, если сторона и уголъ одного соотвѣтственно равны сторонѣ и углу другаго ромба.*

См. доказательство теор. 87.

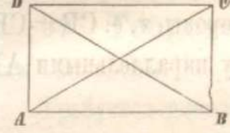
91. Параллелограмъ, содержащій прямые углы, называется *прямоугольникомъ.*

Теорема. *Въ прямоугольникѣ діагонали: 1) взаимно дѣлятся по-поламъ, и 2) равны.*

1) См. доказательство теор. 87.

2) Требуется доказать, что AC = BD (фиг. 71). Треугольники ABC и ABD равны, потому-что сторона AB общая, AD = BC (какъ разстоянія между параллельными AB и DC) и ∠ DAB = ∠ CBA; слѣдовательно AC = DB.

Фиг. 71.



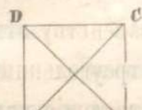
92. **Теорема.** *Два прямоугольника равны, если двѣ смежныя стороны одного соотвѣтственно равны двумъ смежнымъ сторонамъ другаго прямоугольника.*

См. доказательство теор. 88.

93. Параллелограмъ, въ которомъ всѣ стороны равны и всѣ углы прямые, называется *квадратомъ* (фиг. 72).

Теорема. *Въ квадратѣ діагонали: 1) дѣлятся взаимно по-поламъ, 2) взаимно-перпендикулярны, и 3) равны.*

Фиг. 72.



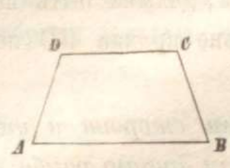
1) См. доказательство теор. 87.

2) См. доказательство теор. 90, 2.

3) См. доказательство теор. 91, 2.

94. **Теорема.** *Два квадрата равны, если сторона одного равна сторонѣ другаго квадрата.*

95. Четыреугольникъ ABCD (фиг. 73), въ которомъ только двѣ

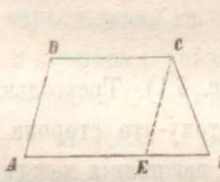


Фиг. 73.

противолежащія стороны AB и DC параллельны, называется *трапеціею*. Параллельныя стороны AB и DC суть *основанія* трапеціи, а непараллельныя прямыя AD и BC суть ея *стороны* или *бока*.

96. **Теорема.** *Если въ трапеціи углы, прилежащіе къ одному основанію, равны, то и ея стороны равны.*

Дано (фиг. 74) $\angle$ BAD = $\angle$ ABC; требуется доказать, что AD = BC.



Фиг. 74.

Проведя прямую CE параллельно къ DA, получимъ $\angle$ DAB = $\angle$ CEB (соотвѣтствующіе углы); но такъ какъ $\angle$ DAB = $\angle$ CBA (по заданію), то $\angle$ CEB = $\angle$ CBA. Въ треугольникѣ BCE равнымъ угламъ CEB и CBA противолежатъ равныя стороны, т. е. CB = CE; но DA = CE (параллельныя, заключенныя между параллельными AB и DC), слѣдовательно DA = CB.

Трапеція, имѣющая равныя стороны, называется *антипараллелограмомъ* или *равнобочною трапеціею*.

97. **Обратное предложеніе.** *Въ равнобочной трапеціи углы при одномъ изъ его основаній равны.*

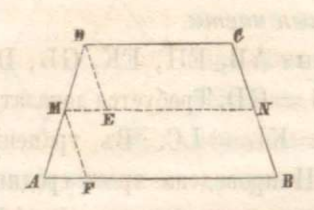
Дано (фиг. 74): AD = BC и прямая AB параллельна къ DC. Требуется доказать, что $\angle$ DAB = $\angle$ CBA.

Чрезъ C проведя прямую CE параллельно къ DA, получимъ CE = DA (параллельныя, заключенныя между параллельными); но по заданію DA = CB, слѣдовательно CE = CB. По равенству этихъ прямыхъ мы заключаемъ, что BCE равнобедренный треугольникъ и $\angle$ ABC = $\angle$ BEC; но $\angle$ BEC = $\angle$ BAD (соотвѣтствующіе углы), слѣдовательно $\angle$ ABC = $\angle$ BAD.

98. **Теорема.** *Прямая, проведенная чрезъ средину одной изъ сторонъ трапеціи параллельно къ основаніямъ, должна пройти чрезъ средину другой стороны.*

Дано (фиг. 75): AM = MD и прямая MN параллельна къ AB и DC; требуется доказать, что BN = NC.

Фиг. 75.



Чрезъ точки D и M проведя прямыя DE и MF параллельно къ CB, получимъ два равные треугольника AMF и MDE, потому-что AM = MD (по заданію), ∠ MAF = ∠ DME (соотвѣтствующіе углы) и ∠ AMF = ∠ MDE (соотвѣтствующіе углы); слѣдовательно MF = DE. По параллельности прямыхъ AB, MN и DC, и прямыхъ DE, MF и CB мы имѣемъ MF = NB и DE = CN (параллельныя, заключенныя между параллельными); слѣдовательно NB = CN (потому-что MF = DE).

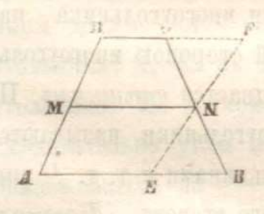
Прямая, соединяющая среднія точки сторонъ трапеціи, называется *хордою*.

99. **Теорема**. *Хорда трапеціи равна полусуммѣ обоихъ основаній.*

Требуется доказать (фиг. 76), что MN = ½(AB + DC).

Чрезъ точку N проведемъ прямую EF параллельно къ AD до

Фиг. 76.



пересѣченія F съ продолженною стороною DC; получимъ два равные треугольника BNE и CNF, потому-что BN = NC (теор. 98), ∠ BNE = ∠ CNF и ∠ NBE = ∠ NCF (внутренніе на-крестъ лежащіе углы); слѣвовательно BE = FC. Такъ какъ параллельныя прямыя, заключенныя между параллельными, равны, то MN = DF и MN = AE; но DF = DC + CF и AE = AB — EB; слѣдовательно MN = DC + CF и MN = AB — EB. Сложивъ эти два равенства по-членно, получимъ

2MN = DC + CF + AB — EB или

2MN = AB + DC (потому-что EB = CF);

откуда MN = ½(AB + DC).

100. **Теорема.** *Если одна сторона трапеціи раздѣлена*

на равныя части и чрезъ точки дѣленія проведены прямыя параллельно къ основаніямъ, то этими прямыми другая сторона трапеціи раздѣлится также на равныя части.

Дано (фиг. 77): параллельныя прямыя AB, EH, FK, GL, DC и AE = EF = FG = GD. Требуется доказать, что BH = HK = KL = LC. Въ трапеціи ABKF прямая EH проведена чрезъ средину E стороны AF параллельно къ основанію AB; слѣдовательно (теор. 98) BH = HK. Прямая FK, проведенная чрезъ средину F стороны EG трапеціи EHLG параллельно къ основанію EH, раздѣляетъ сторону HL на двѣ равныя части; слѣдовательно HK = KL. Въ трапеціи FKCD прямая GL, проведенная чрезъ средину G стороны FD параллельно къ основанію FK, раздѣляетъ сторону KC на двѣ равныя части KL и LC. Такъ какъ BH = HK, HK = KL и KL = LC, то BH = HK = KL = LC.

Фиг. 77.

101. Плоская фигура, имѣющая больше четырехъ сторонъ, называется вообще *многоугольникомъ* или *полигономъ.* Во всякомъ многоугольникѣ столько угловъ и столько вершинъ, сколько онъ имѣетъ сторонъ. Углы, составляемые сторонами многоугольника, называются *внутренними.* Уголъ, составляемый стороною многоугольника съ продолженіемъ смежной стороны, называется *внѣшнимъ.* По числу сторонъ (или по числу угловъ) многоугольники называются пятиугольниками, шестиугольниками, семиугольниками и т. д. *Периметромъ* многоугольника называется сумма его сторонъ. *Діагональ* есть прямая, соединяющая двѣ несмежныя вершины многоугольника.

Полигонъ, содержащій равныя стороны и равные углы, называется *правильнымъ.*

102. **Теорема.** *Число діагоналей, проведенныхъ въ многоугольникъ изъ одной вершины его, равно числу сторонъ, уменьшенному тремя.*

Между вершиною A (фиг. 78) и прочими вершинами B, C, D и

Фиг. 78.

т. д. возможно провести столько прямыхъ, сколько вершинъ въ многоугольникѣ безъ одной вершины; но такъ какъ прямыя AB и AF, проведенныя до ближайшихъ вершинъ B и F, суть стороны многоугольника, то число діагоналей, проведенныхъ изъ вершины A, равно числу вершинъ (или числу сторонъ), уменьшенному тремя; слѣдовательно въ многоугольникѣ, имѣющемъ n сторонъ, возможно провести $n-3$ діагоналей отъ одной вершины.

104. **Теорема.** *Сумма внутреннихъ угловъ многоугольника равна двумъ прямымъ угламъ, повторенным столько разъ, сколько въ немъ сторонъ безъ двухъ.*

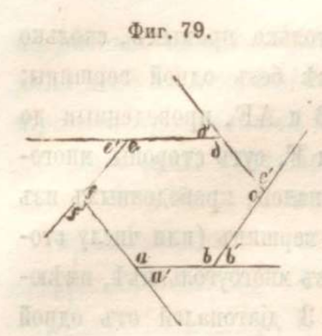
Діагоналями AC, AD, AE (фиг. 78) раздѣляется многоугольникъ на треугольники. Крайніе треугольники ABC и AFE содержатъ четыре стороны многоугольника, а въ среднихъ треугольникахъ находится только по одной сторонѣ его; слѣдовательно число среднихъ треугольниковъ равно числу сторонъ многоугольника, уменьшенному четырьмя, т. е. въ многоугольникѣ съ n сторонами число среднихъ треугольниковъ равно $n-4$. Въ этомъ многоугольникѣ должно быть $n-4$ треугольника и еще два крайніе треугольника, т. е. въ многоугольникѣ $n-4+2$ или $n-2$ треугольника. Во всякомъ треугольникѣ сумма угловъ равна 180°, слѣдовательно углы въ $n-2$ треугольникахъ составляютъ 180°, помноженныхъ на $n-2$, или сумма угловъ многоугольника равна $180^\circ.(n-2)$.

Слѣдствіе. Каждый изъ внутреннихъ угловъ правильнаго многоугольника съ n сторонами равенъ $\frac{180^\circ.(n-2)}{n}$.

103. **Теорема.** *Сумма внѣшнихъ угловъ многоугольника равна четыремъ прямымъ угламъ.*

Означивъ внутренніе углы многоугольника (фиг. 79) чрезъ a, b, c и т. д. и внѣшніе углы чрезъ a', b', c' и т. д., получимъ

Фиг. 79.



$$\angle a + \angle a' = 180^0$$
$$\angle b + \angle b' = 180^0$$
$$\angle c + \angle c' = 180^0 \text{ и т. д.}$$

Сложивъ эти равенства по-членно и означивъ сумму внутреннихъ угловъ чрезъ S и сумму внѣшнихъ угловъ чрезъ S', получимъ $S + S' = 180^0 n$; но $S = 180^0(n-2)$ или $S = 180^0 n - 360^0$, слѣдовательно $S' = 180^0 n - 180^0 n + 360^0 = 360^0$.

ЧИСЛЕННЫЕ ВОПРОСЫ.

130) Сколько аршинъ плинтуса потребно для комнаты, длина которой 25 и ширина 17 футъ?

131) Сколько аршинъ лентъ потребно для обшивки ковра, длина котораго $7^1/_2$ футъ и ширина $5^1/_2$ футъ?

132) Въ четыреугольникѣ ABCD (фиг. 66) уг. BAD $= 106^0 35'$, уг. BCD $= 123^0 46'$ и уг. ADC $= 87^0 52'$. Сколько градусовъ и минутъ въ углѣ ABC?

133) Для сада должно построить заборъ изъ вертикально-поставленныхъ досокъ, ширина которыхъ $^3/_4$ фута; сколько потребно такихъ досокъ, когда садъ имѣетъ видъ прямоугольника, длина котораго 120 и ширина 66 сажень?

134) Квадратный дворъ, длиною въ 24 сажени, требуется обвести тротуаромъ изъ квадратныхъ плитъ, длиною въ $1^1/_2$ фута каждая плита; сколько потребно такихъ плитъ?

135) Сколько пудовъ алебастру потребно на карнизъ комнаты, длина которой $9^1/_2$ аршинъ и ширина $6^3/_4$ аршина, когда извѣстно, что на 10 сажень длины карниза полагается $3^1/_2$ пуда алебастру?

136) Для кладки цоколя потребно 7 каменьщиковъ на 9 сажень каждаго ряда плитъ; сколько каменьщиковъ должно нанять для кладки цоколя, состоящаго изъ 4 рядовъ плитъ, когда длина зданія 20 саж. 2 ар. и ширина 15 саж. $1^1/_2$ ар.?

137) Прямоугольный лугъ, длиною въ 160 и шириною въ 120 сажень, должно огородить деревьями, отстоящими одно отъ другаго на 10 футъ; сколько потребно деревьевъ?

138) Строеніе, длиною въ 14 саж. 2 ар. и шириною въ 10 саж.,

требуется обвести заборомъ, отстоящимъ отъ длиннаго фаса строенія на $2^1/_2$ ар., а отъ короткаго на $3^1/_2$ ар.; какой длины долженъ быть заборъ?

139) Къ краю прямоугольной доски стола должно прибить клеенку гвоздиками; сколько потребно гвоздиковъ, когда длина доски стола 2 ар. 4 вершка, ширина 1 ар. 6 вершковъ и разстояніе между гвоздиками должно равняться 2 вершкамъ?

140) Прямоугольное поле, коего длина $142^6/_7$ сажени и ширина $114^2/_7$ сажени, требуется обратить въ ботаническій садъ, въ которомъ растенія должно расположить на прямыхъ, параллельныхъ къ сторонамъ прямоугольника въ разстояніи 2 футъ одно отъ другаго сколько помѣстится растеній въ этомъ саду?

140a) Чрезъ поле, имѣющее видъ трапеціи ABCD (фиг. 75) проведена дорога чрезъ средину M стороны AD параллельно къ AB. Зная, что периметръ этой трапеціи равенъ 725 саж., $AB = 204$ саж., $AD = 177$ саж. и $BC = 166$ саж., найти длину дороги MN.

141) Сторона квадрата содержитъ $25^1/_2$ саж., а его периметръ равенъ полу-периметру прямоугольника, котораго большая сторона равна 65 саж. Сколько сажень содержитъ меньшая сторона этого прямоугольника?

142) Въ трапеціи хорда равна 75 саж. и большее основаніе равно 96 саж. Сколько сажень содержитъ меньшее основаніе?

143) Периметръ антипараллелограма равенъ 107 саж., $AB = 35$ саж., $DC = 23$ саж. (фиг. 74). Сколько сажень содержатъ стороны AD и BC?

144) Зная, что $AB = 73^1/_2$ саж. и $DC = 58^3/_4$ саж., узнать, сколько сажень содержитъ каждая изъ прямыхъ EH, FK и GL (фиг. 77).

145) Сколько сажень содержитъ периметръ правильнаго восьмиугольника, сторона котораго равна $16^2/_3$ сажени?

146) Сколько градусовъ содержитъ сумма внутреннихъ угловъ въ пятиугольникѣ, семиугольникѣ и девятиугольникѣ?

147) Сколько градусовъ содержитъ внутренній уголъ правильныхъ многоугольниковъ съ 6, 12 и 24 сторонами?

148) Сколько градусовъ содержитъ внутренній уголъ правильныхъ многоугольниковъ съ 8, 16, 32 сторонами?

149) Сколько угловъ содержитъ правильный многоугольникъ, котораго сумма внутреннихъ угловъ равна 2520^0?

150) Сколько сторонъ содержитъ правильный многоугольникъ, коего внутренній уголъ равенъ 162°?

151) Чрезъ вершину A многоугольника съ 15 сторонами проведены всѣ возможныя діагонали. Сколько образовалось угловъ при точкѣ A?

152) Сколько сторонъ въ правильномъ многоугольникѣ, коего внѣшній уголъ равенъ 22°30′?

ТЕОРЕМЫ.

153) Параллелограмъ раздѣляется на два равные параллелограма прямою, соединяющею среднія точки двухъ противолежащихъ сторонъ.

154) Параллелограмъ раздѣляется на двѣ равныя части прямою, проведенною между двумя противолежащими сторонами чрезъ точку пересѣченія діагоналей.

155) Всякая прямая, проведенная между двумя противолежащими сторонами параллелограма чрезъ точку пересѣченія его діагоналей, дѣлится этою точкою на двѣ равныя части.

156) Если чрезъ какую-нибудь точку D основанія BC равнобедреннаго треугольника ABC провести прямую DE параллельно къ CA и прямую DF параллельно къ BA, то образуется параллелограмъ AEDF, котораго периметръ равенъ суммѣ сторонъ AB и AC.

157) Если соединить среднія точку E, F, G, H сторонъ прямоугольника прямыми EF, FG, GH и HE, то образуется ромбъ EFGH.

158) Если соединить среднія точки E, F, G, H сторонъ квадрата прямыми EF, FG, GH и HE, то образуется квадратъ EFGH.

159) Во всякомъ антипараллелограмѣ діагонали равны.

160) Въ четыреугольникѣ ABCD, котораго смежныя стороны AB и AD равны, и также смежныя стороны BC и DC равны, діагонали взаимно-перпендикулярны, меньшая діагональ BD дѣлится большею діагональю AC на двѣ равныя части, и большая діагональ дѣлитъ каждый изъ угловъ BAD и BCD на двѣ равныя части.

161) Прямая, соединяющая среднія точки основаній антипараллелограма, перпендикулярна къ основаніямъ.

162) Если на діагонали BD квадрата ABCD отложить часть BE, равную сторонѣ AB, и изъ точки E возставить перпендикуляръ EF къ діагонали BD до пересѣченія F съ стороною AD, то $EF = BD - AB$.

163) Если раздѣлить на двѣ равныя части каждый изъ угловъ, составляемыхъ діагоналями параллелограма, и точки пересѣченія прямыхъ раздѣла съ сторонами параллелограма соединить по двѣ между собою, то образуется ромбъ.

164) Если чрезъ оконечныя точки діагонали AC (фиг. 68) провести прямыя параллельно къ діагонали BD, и чрезъ точки B и D провести прямыя параллельно къ діагонали AC, то проведенными прямыми образуется параллелограмъ, который вдвое больше даннаго параллелограма ABCD.

165) Если средину E стороны AB параллелограма ABCD (фиг. 68) соединить съ вершиною D, и средину F стороны DC соединить съ вершиною B, то прямыми ED и FB раздѣлится діагональ AC на три равныя части.

166) Если изъ какой-нибудь точки D основанія BC равнобедреннаго треугольника ABC опустить перпендикуляръ DF на AC и перпендикуляръ DE на AB, то сумма этихъ перпендикуляровъ равна перпендикуляру BG, опущенному изъ точки B на противолежащую сторону AC.

ЗАДАЧИ ПОСТРОЕНІЯ.

167) На данной сторонѣ AB построить квадратъ.

168) Начертить квадратъ, котораго діагональ должна равняться данной прямой.

169) Начертить прямоугольникъ, котораго стороны должны равняться даннымъ прямымъ AB и CD.

170) По двумъ даннымъ діагоналямъ AB и CD построить ромбъ.

171) Даны три точки A, B и C, не лежащія на одной прямой. Чрезъ точку A требуется провести такую прямую MN, чтобы перпендикуляры, опущенные на нее изъ точекъ B и C, равно-отстояли отъ A.

172) Требуется провести прямую параллельно къ данной прямой AB и въ такомъ разстояніи отъ AB, чтобы сумма перпендикуляровъ, опущенныхъ на искомую прямую изъ данныхъ точекъ C и D, равнялась данной прямой m.

ОТДѢЛЪ II.

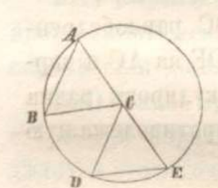
Окружность круга.

ПЕРВАЯ ГЛАВА.

Окружность круга. Свойства діаметра. Вписанный уголъ, стороны котораго проходятъ чрезъ концы діаметра. Перпендикуляръ, опущенный изъ центра на хорду. Касательная. Дуги, заключающіяся между параллельными хордами. Касающіяся и пересѣкающіяся окружности. Задачи построенія.

105. Представимъ себѣ, что какая-нибудь прямая CB (фиг. 80), вращаясь на плоскости около неподвижной точки C, сдѣлаетъ полный оборотъ; тогда точка B начертитъ сомкнутую кривую линію, точки которой равно-отстоятъ отъ неподвижной точки C. Эта кривая линія называется *круговою* или *окружностью круга*.

Фиг. 80.



Плоскость, ограниченная круговою линіею, называется *кругомъ*. Точка C, равно-отстоящая отъ точекъ окружности, называется *центромъ*. Прямая CB, соединяющая центръ съ точкою окружности, называется *радіусомъ*. Радіусы CA, CB, CD и т. д. одного и того-же круга равны, потому-что каждый изъ нихъ выражаетъ разстояніе между центромъ и окружностью, а эти разстоянія (вслѣдствіе сдѣланнаго опредѣленія окружности) равны между собою.

106. Два круга равны, если ихъ радіусы равны. Въ самомъ дѣлѣ, если мы наложимъ одинъ кругъ на другой такимъ образомъ, чтобы центры этихъ круговъ совпали, то по равенству радіусовъ всѣ точки первой окружности совпадутъ съ точками второй окружности. Отсюда мы заключаемъ, что данные круги равны.

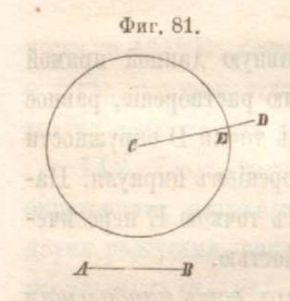
Какая-нибудь часть окружности, напримѣръ AB, называется *дугою* [1]. Дуга ADE равна суммѣ дугъ AD и DE. Дуга BD равна разности дугъ BE и DE.

---

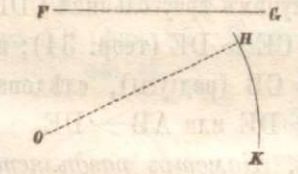
[1]) Въ письмѣ часто употребляется знакъ ◡ вмѣсто слова «дуга».

107. Для начертанія окружности на бумагѣ употребляется циркуль съ выдвижною ножкою. Въ этомъ циркулѣ, ослабивъ винтикъ ножки (фиг. 3), мы можемъ освободить ея стальную часть отъ мѣдной и въ эту мѣдную часть вставить трубочку съ карандашемъ. Если мы пожелаемъ начертить окружность такимъ образомъ, чтобы ея центръ находился въ точкѣ C (фиг. 81) и ея радіусъ равнялся прямой AB, мы возьмемъ циркуль, къ ножкѣ котораго привинчана трубочка съ карандашемъ, и дадимъ ему раствореніе, равное прямой AB. Потомъ поставимъ циркуль одною ножкою въ точкѣ C и, держа его за верхнюю часть, будемъ вращать его около точки C такимъ образомъ, чтобы оконечность карандаша скользила на бумагѣ. Этимъ дѣйствіемъ *мы опишемъ окружность изъ точки* C *радіусомъ, равнымъ прямой* AB, потому-что раствореніе циркуля равно прямой AB и равно также радіусу CE.

Фиг. 81.



Фиг. 82.



Точно такимъ-же образомъ мы опишемъ дугу HK (фиг. 82) изъ точки O радіусомъ, равнымъ прямой FG.

Двѣ дуги, описанныя равными радіусами, равны, если они могутъ быть наложены одна на другой такъ, чтобы ихъ оконечныя точки совпали.

108. **Теорема.** *Всякая прямая пересѣкаетъ окружность только въ двухъ точкахъ.*

Нельзя допустить, чтобы прямая EF (фиг. 83) и данная окружность имѣли больше двухъ общихъ точекъ, потому-что отъ центра C невозможно провести болѣе двухъ равныхъ наклонныхъ до точекъ пересѣченія прямой EF съ окружностью.

Фиг. 83.

Прямая EF, которою пересѣкается окружность, называется *сѣкущею*.

Прямая, соединяющая двѣ точки окружности, называется *хордою;* такъ напримѣръ прямыя AB и DE (фиг. 80) суть хорды. Дугѣ AB принадлежитъ хорда AB, или дуга AB *стягивается* хордою AB, потому-что эта хорда соединяетъ оконечныя точки дуги AB.

Хорда, проходящая чрезъ центръ круга, называется *діаметромъ*. Всѣ діаметры одного и того-же круга равны, потому-что каждый діаметръ есть удвоенный радіусъ.

109. Чтобы въ кругѣ провести хорду, равную данной прямой AB (фиг. 84), дадимъ циркулю раствореніе, равное AB. Потомъ изъ какой-нибудь точки D окружности опишемъ дугу даннымъ раствореніемъ циркуля. Наконецъ соединимъ точку D съ точкою E пересѣченія описанной дуги съ окружностью.

Фиг. 84.

110. Теорема. *Діаметръ есть наибольшая хорда въ кругѣ.*

Требуется доказать, что AB больше DE (фиг. 85). Проведя радіусы CD и CE, получимъ треугольникъ CDE, въ которомъ $CD + CE > DE$ (теор. 34); но $CD = CA$ и $CE = CB$ (радіусы), слѣдовательно $CA + CB > DE$ или $AB > DE$.

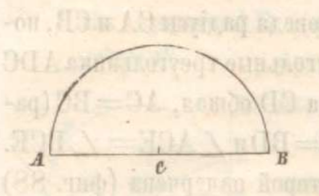
Фиг. 85.

111. Теорема. *Діаметръ раздѣляетъ окружность на двѣ равныя части.*

Согнемъ бумагу, на которой начерчена окружность (фиг. 85) по направленію діаметра AB такимъ образомъ, чтобы верхняя часть чертежа помѣстилась на нижней части; тогда радіусъ CE приметъ положеніе радіуса CF. Такъ какъ радіусы одной и той же окружности равны, то точка E упадетъ въ точку F. Точно также по равенству радіусовъ CD и CG точка D упадетъ въ точку G. Такимъ-же образомъ узнаемъ, что всякая точка дуги ADEB совпадетъ съ точкою дуги AGFB; слѣдовательно эти дуги совмѣстятся или они равны. Каждая изъ этихъ дугъ называется *полуокружностью*.

111. Чтобы описать *полуокружность на данной прямой* АВ (фиг. 86), мы раздѣлимъ эту прямую въ точкѣ С на двѣ равныя части, и потомъ изъ С радіусомъ СА опишемъ полуокружность.

Фиг. 86.



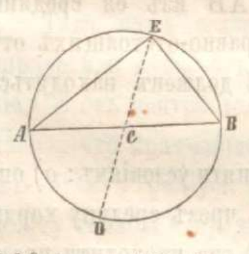
Всякая хорда, какъ напримѣръ DE (фиг. 85), раздѣляетъ окружность на двѣ неравныя дуги: DE, которая меньше полуокружности, и DGFE, которая больше полуокружности. Когда говорится о дугѣ, которая стягивается хордою, то обыкновенно подразумѣвается меньшая изъ дугъ, принадлежащихъ этой хордѣ.

112. Уголъ, составляемый двумя хордами, пересѣкающимися на окружности, называется *вписаннымъ угломъ*. Уголъ составляемый двумя радіусами, какъ напримѣръ ACD (фиг. 85), называется *центральнымъ угломъ*.

Теорема. *Вписанный уголъ, стороны котораго проходятъ чрезъ оконечности діаметра, есть прямой.*

Даны хорды АЕ и ВЕ, проходящія чрезъ точки А и В діаметра АВ (фиг. 87). Требуется доказать, что $\angle AEB = 90^0$.

Фиг. 87.



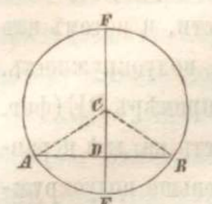
Проведя діаметръ ED, получимъ два равнобедренные треугольника АСЕ и ВСЕ, потому-что $CA = CE = CB$ (радіусы); слѣдовательно $\angle AEC = \angle CAE$ и $\angle BEC = \angle CBE$. Сложивъ равныя величины съ равными, получимъ равныя суммы $\angle AEC + \angle BEC = \angle CAE + \angle CBE$; слѣдовательно $\angle AEB = 90^0$ (теор. 68, 2).

Слѣдствіе. Окружность, описанная на гипотенузѣ прямоугольнаго треугольника, должна пройти чрезъ вершину прямаго угла.

113. **Теорема**. *Перпендикуляръ, опущенный изъ центра круга на хорду, раздѣляетъ на двѣ равныя части: эту хорду, соотвѣтствующій ей центральный уголъ и принадлежащую ей дугу.*

Дана (фиг. 88): прямая CE перпендикулярна къ хордѣ AB. Требуется доказать, что AD = BD, ∠ ACE = ∠ BCE и дуг. AE = дуг. BE. Проведя радіусы CA и CB, получимъ два равные прямоугольные треугольника ADC и BDC, потому-что сторона CD общая, AC = BC (радіусы); слѣдовательно AD = BD и ∠ ACE = ∠ BCE.

Фиг. 88.



Согнемъ бумагу, на которой начерчена (фиг. 88) по направленію діаметра FE такимъ образомъ, чтобы правая часть фигуры помѣстилась на лѣвой; тогда по равенству угловъ ADC и BDC прямая DB пойдетъ по DA, и по равенству этихъ прямыхъ точка B упадетъ въ A. По совпаденію оконечныхъ точекъ дуги BE съ оконечными точками дуги AE мы заключаемъ, что эти дуги равны.

114. **Обратное предложеніе**. *Перпендикуляръ, возставленный къ хордѣ изъ ея средины, долженъ пройти чрезъ центръ круга.*

Извѣстно, (фиг. 88), что центръ C круга равно-отстоитъ отъ оконечностей A и B хорды AB. Также извѣстно (51), что перпендикуляръ DC, возставленный къ прямой AB изъ ея средины D, есть геометрическое мѣсто всѣхъ точекъ, равно-отстоящихъ отъ оконечностей A и B; слѣдовательно центръ C долженъ находиться на перпендикулярѣ DC.

Примѣчаніе. Прямая CE удовлетворяетъ пяти условіямъ: *a*) она проходитъ чрезъ центръ C, *b*) она проходитъ чрезъ средину хорды AB, *c*) она перпендикулярна къ хордѣ AB, *d*) она проходитъ чрезъ средину дуги AEB, и *e*) она раздѣляетъ центральный уголъ ACB на двѣ равныя части.

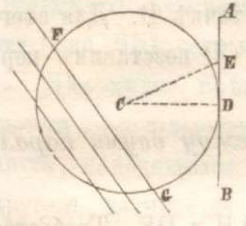
115. Прямая AB (фиг. 89), имѣющая съ окружностью только одну общую точку, называется *касательною*. Эта общая точка называется *точкою касанія*.

Теорема. *Прямая, проведенная перпендикулярно къ ра-*

діусу чрезъ его оконечную точку, касается къ окружности въ этой точкѣ.

Дана прямая AB ((фиг. 89), перпендикулярная къ CD. Требуется доказать, что прямая AB касается къ окружности въ точкѣ D.

Фиг. 89.



Соединимъ центръ C съ какою-нибудь точкою E прямой AB; тогда прямая CE будетъ наклонная относительно AB, потому-что отъ точки C до прямой AB возможно провести только одинъ перпендикуляръ CD. По предъидущему извѣстно, что наклонная CE больше перпендикуляра CD; слѣдовательно прямая CE больше радіуса данной окружности, и точка E находится внѣ круга. Точно такимъ-же образомъ мы узнаемъ, что всѣ точки прямой AB, кромѣ точки D, лежатъ внѣ круга; слѣдовательно прямая AB и окружность имѣютъ только одну общую точку D, т. е. прямая AB касается къ окружности въ точкѣ D.

116. **Обратное предложеніе.** *Касательная къ окружности должна быть перпендикулярна къ радіусу, проходящему чрезъ точку касанія.*

Такъ какъ всякая точка E касательной AB (фиг. 89), взятая вправо или влѣво отъ точки D, находится внѣ круга, то ея разстояніе CE отъ центра должно быть больше радіуса. Отсюда мы заключаемъ, что кратчайшее разстояніе между центромъ C и касательною AB будетъ радіусъ CD; но извѣстно, что кратчайшее разстояніе между точкою и прямою выражается перпендикуляромъ, опущеннымъ изъ этой точки на прямую; слѣдовательно радіусъ CD перпендикуляренъ къ AB, и на оборотъ: прямая AB перпендикулярна къ CD.

Примѣчаніе. Если сѣкущая проходитъ чрезъ центръ круга, то ея часть, находящаяся между точками окружности, есть наибольшая хорда или діаметръ круга. По мѣрѣ удаленія этой сѣкущей отъ центра, хорда FG (фиг. 89) постепенно уменьшается и точки F и G все болѣе и болѣе сближаются. Наконецъ, если сѣкущая отой-

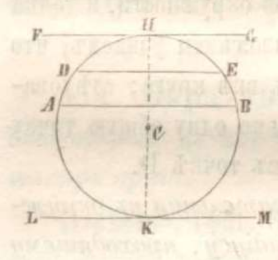
детъ отъ центра на разстояніе, равное радіусу круга, то хорда FG изчезнетъ, точки F и G совпадутъ въ одну точку окружности и сѣкущая сдѣлается касательною.

117. Основываясь на доказанной теоремѣ, проведемъ прямую, касающуюся къ данной окружности въ данной точкѣ D. Для этого соединимъ центръ C съ точкою D и къ прямой CD возставимъ перпендикуляръ изъ точки D.

118. **Теорема.** *Дуги, заключенныя между двумя параллельными прямыми, равны между собою.*

1) Даны (фиг. 90) параллельныя хорды AB и DE. Требуется доказать, что дуга AD равна дугѣ BE.

Фиг. 90.



Изъ центра C опустимъ перпендикуляръ CH на хорды AB и DE. Этимъ перпендикуляромъ раздѣлится на двѣ равныя части каждая изъ дугъ AHB и DHE, стягиваемыхъ хордами AB и DE (теор. 113); слѣдовательно дуг. AH = дуг. BH и дуг. DH = дуг. EH. Вычтя равныя величины изъ равныхъ, получимъ равныя разности, т. е.

дуг. AH — дуг. DH = дуг. BH — дуг. EH или дуг. AD = дуг. BE.

2) Даны хорда AB и параллельная къ ней касательная FG.

Радіусъ CH, проходящій чрезъ точку H касанія, перпендикуляренъ къ касательной FG и къ хордѣ AB, параллельной къ FG. Этимъ перпендикуляромъ раздѣлится на двѣ равныя части дуга AHB, соотвѣтствующая хордѣ AB; слѣдовательно дуг. AH = дуг. BH.

3) Даны двѣ параллельныя касательныя FG и LM.

Радіусы CH и CK, соотвѣтственно перпендикулярные къ касательнымъ FG и LM, составляютъ одну прямую HK, потому-что прямая, проведенная чрезъ точку C перпендикулярно къ FG, должна быть также перпендикулярна къ прямой LM, параллельной къ FG. Такъ какъ прямая HK проходитъ чрезъ центръ, то каждая изъ

дугъ KAH и KBH составляетъ полуокружность; слѣдовательно дуг. KAH = дуг. KBH.

119. Окружность называется *внѣшнею* относительно другой окружности (фиг. 94), если всѣ точки первой лежатъ внѣ второй. Окружность называется *внутреннею* относительно другой окружности (фиг. 95), если всѣ точки первой лежатъ внутри второй.

Два круга, имѣющіе общій центръ, но разные радіусы, называются *концентрическими* или *одноцентренными*. Часть большаго круга, находящаяся между окружностями двухъ концентрическихъ круговъ, называется *круговымъ кольцомъ*.

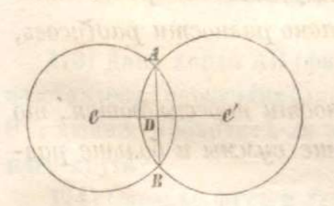
Двѣ окружности касаются, если у нихъ только одна общая точка (точка касанія). Двѣ окружности могутъ касаться изъ-внѣ (фиг. 92) или изъ-внутри (фиг. 93).

Двѣ окружности, имѣющія двѣ общія точки, пересѣкаются (фиг. 91).

120. **Теорема.** *Если двѣ окружности пересѣкаются, то прямая, соединяющая ихъ центры, перпендикулярна къ общей хордѣ окружностей и раздѣляетъ ее на двѣ равныя части.*

Извѣстно (фиг. 91), что перпендикуляръ DC, возставленный къ хордѣ AB изъ ея средины D, долженъ пройти чрезъ центръ C, и перпендикуляръ DC′, находящійся на продолженіи прямой CD, долженъ пройти чрезъ центръ C′.

Фиг. 91.



Слѣдствіе. Положимъ, что окружность C (обыкновенно означается окружность буквою, поставленною при центрѣ) не измѣняетъ своего положенія, а окружность C′ вращается около неподвижной точки A такимъ образомъ, что точка B все болѣе и болѣе приближается къ A. Наконецъ когда точка B совпадетъ съ A, то окружности сдѣлаются касающимися. Такъ какъ *центральная линія* CC′ (разстояніе между центрами C и C′) находится въ (фиг. 91) между точками A и B, то

совпаденіе точекъ А и В должно совершиться на прямой CC′; слѣдовательно точка касанія двухъ окружностей должна находиться на центральной линіи (фиг. 92).

121. **Теорема.** *Если двѣ окружности касаются изъ-внѣ, то центральная линія равна суммѣ радіусовъ (фиг. 92).*

Фиг. 92.

Такъ какъ точка касанія А находится на центральной линіи между центрами C и C′, то CC′ = CA + C′A.

Отсюда слѣдуетъ: *если разстояніе между центрами двухъ окружностей равно суммѣ радіусовъ, то окружности касаются изъ-внѣ.*

122. **Теорема.** *Если двѣ окружности касаются изъ-внутри, то центральная линія равна разности радіусовъ (фиг. 93).*

Фиг. 93.

Такъ какъ точка касанія А находится на центральной линіи и меньшій кругъ лежитъ внутри большаго, то центръ C′ меньшаго круга долженъ находиться между центромъ C и точкою касанія; слѣдовательно CC′ = CA — C′A. Отсюда слѣдуетъ: *если разстояніе между центрами двухъ окружностей равно разности радіусовъ, то окружности касаются изъ-внутри.*

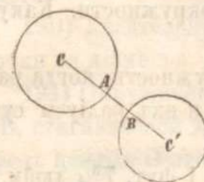
123. **Теорема.** *Если двѣ окружности пересѣкаются, то разстояніе между ихъ центрами меньше суммы и больше разности радіусовъ.*

Проведя прямыя CA и C′A (фиг. 91), получимъ треугольникъ CC′A, въ которомъ CC′ < CA + C′A и CC′ > CA — CA′ (теор. 34).

Отсюда слѣдуетъ: *если разстояніе между центрами двухъ окружностей меньше суммы и больше разности радіусовъ, то окружности пересѣкаются.*

124. **Теорема.** *Если одна окружность находится внѣ другой, то разстояніе между центрами больше суммы радіусовъ.*

Такъ какъ разстояніе CC′ (фиг. 94) между центрами состоитъ изъ радіусовъ CA и C′B и прямой AB, находящейся между окружностями, то

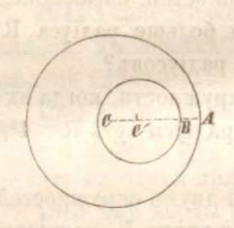


Фиг. 94.

$$CC' > CA + CB.$$

Отсюда слѣдуетъ: *если разстояніе между центрами двухъ окружностей больше суммы радіусовъ, то одна окружность находится внѣ другой.*

125. **Теорема.** *Если одна окружность находится внутри другой, то разстояніе между центрами меньше суммы радіусовъ (фиг. 95).*



Фиг. 95.

Прямая CC′ равна CA — C′A или равна CA — C′B — BA; слѣдовательно

$$CC' < CA - C'B.$$

Отсюда слѣдуетъ: *если разстояніе между центрами двухъ окружностей меньше разности радіусовъ, то одна окружность находится внутри другой.*

ЧИСЛЕННЫЕ ВОПРОСЫ.

173) Дана хорда AB (фиг. 88), равная 3 фут. $5\frac{1}{2}$ дюйм., и къ ней возставленъ перпендикуляръ DC, отстоящій отъ точки A на 1 футъ $8\frac{3}{4}$ дюйма. Проходитъ-ли этотъ перпендикуляръ чрезъ центръ даннаго круга?

174) Сколько футъ и дюймовъ содержитъ наибольшая хорда, проведенная въ кругѣ, коего радіусъ равенъ 3,65 фута?

175) Уголъ $ACB = 57°35'$ и уг. $ACD = 28°45'$ (фиг. 88). Проходитъ-ли прямая CD чрезъ средину хорды AB?

176) Дуга AE (фиг. 88) составляетъ $\frac{5}{16}$ полуокружности. Какую часть окружности составляетъ дуга AF?

177) Центральный уголъ $ACB = 90°$ (фиг. 88) и хорда $AB = 5\frac{3}{4}$ дюйм. Узнать, на сколько дюймовъ отстоитъ эта хорда отъ центра C?

178) Въ какомъ положеніи находятся двѣ окружности, когда раз-

стояніе между ихъ центрами содержитъ $10^1/_2$ футъ и ихъ радіусы суть $R = 6^3/_4$ фут. и $R' = 3^5/_6$ фут.?

179) Дуга AK (фиг. 90) составляетъ $^8/_{15}$ полуокружности. Какую часть окружности составляетъ дуга BH?

180) Въ какомъ положеніи находятся двѣ окружности, когда разстояніе между ихъ центрами равно $1^1/_{12}$ фута и ихъ радіусы суть $R = 6^1/_8$ фут. и $R' = 4^5/_6$ фут.?

181) Зная, что радіусъ CD (фиг. 89) равенъ 1 фут. $7^3/_4$ дюйм. и уг. DCE равенъ 45^0, опредѣлить разстояніе точки E отъ точки касанія D.

182) Въ какомъ положеніи находятся двѣ окружности, когда ихъ центральная линія содержитъ $2^{13}/_{16}$ фут. и ихъ радіусы суть $R = 7^1/_4$ фут. и $R' = 4^7/_{16}$ фут.?

183) Разстояніе между центрами двухъ окружностей, касающихся изъ-внѣ, равно $14^3/_5$ дюйм. и радіусъ R вдвое больше радіуса R′. Сколько дюймовъ содержитъ каждый изъ этихъ радіусовъ?

184) Въ какомъ положеніи находятся двѣ окружности, когда ихъ центральная линія содержитъ $9^1/_2$ дюйм. и ихъ радіусы суть $R = 4^2/_3$ дюйм. и $R' = 6^3/_8$ дюйм.?

185) Опредѣлить разстояніе между центрами двухъ окружностей, касающихся изъ-внутри, если центральная линія равна $^2/_3$ меньшаго радіуса и большій радіусъ содержитъ $7^3/_4$ дюйм.

186) Въ какомъ положеніи находятся двѣ окружности, если ихъ центральная линія содержитъ $11^5/_{24}$ фут. и ихъ радіусы суть $R = 8^5/_6$ фут. и $R' = 2^3/_8$ фут.?

187) Зная, что дуга $AD = {}^3/_4$ дуги DH (фиг. 90) и дуга DH составляетъ $^1/_3$ полуокружности, узнать, какую часть окружности составляетъ дуга BH.

188) Радіусы двухъ окружностей суть $R = 7^5/_8$ дюйм. и $R' = 3^4/_5$ дюйм. Сколько дюймовъ должна содержать центральная линія, чтобы окружности касались изъ-внутри?

ТЕОРЕМЫ.

189) Двѣ окружности C и C′ касаются изъ-внутри и меньшая изъ нихъ проходитъ чрезъ центръ C большей окружности. Требуется доказать, что всякая хорда AB большей окружности, проведенная чрезъ

точку касанія A, дѣлится меньшею окружностью на двѣ равныя части.

190) Касательныя, проведенныя къ окружности чрезъ оконечныя точки ея діаметра, параллельны между собою.

191) Окружность, описанная радіусомъ CA изъ средины C хорды AB, стягивающей дугу, равную четверти окружности, должна пройти чрезъ центръ O этой четверти окружности.

192) Въ большемъ изъ двухъ концентрическихъ круговъ проведена хорда AB, пересѣкающая меньшую окружность въ точкахъ C и D. Требуется доказать, что отрѣзки AC и BD хорды AB равны.

193) Если двѣ равныя пересѣкающіяся окружности описаны изъ точекъ A и C такимъ образомъ, что общая хорда BD равна центральной линіи AC, то радіусы AB, AD, CB и CD образуютъ квадратъ.

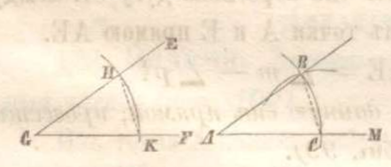
194) Геометрическое мѣсто вершинъ прямоугольныхъ треугольниковъ, имѣющихъ общую гипотенузу, есть окружность, описанная на этой гипотенузѣ.

195) Если отъ точки A пересѣченія двухъ окружностей провести діаметры AD и AE, то оконечности D и E этихъ діаметровъ должны лежать на одной прямой съ точкою B общей хорды AB.

196) Двѣ хорды (не діаметры), пересѣкающіяся внутри круга, не могутъ дѣлиться взаимно на двѣ равныя части.

126. **Задача.** *При точкѣ* A *прямой* AM *построить уголъ, равный данному углу* EGF *(фиг. 96).*

Фиг. 96.



Изъ вершины G какимъ нибудь радіусомъ опишемъ дугу HK и изъ точки A тѣмъ же самымъ радіусомъ опишемъ дугу BC. Потомъ изъ точки C радіусомъ, равнымъ разстоянію KH, опишемъ дугу такимъ образомъ, чтобы она пересѣкла дугу CB. Наконецъ соединимъ точку A съ точкою B прямою AB.

Доказательство. Проведя прямыя BC и HK, получимъ равные треугольники ABC и GHK, потому-что стороны AB, AC, GH и GK равны (равные радіусы) и BC = HK; слѣдовательно $\angle$ BAC $= \angle$ HGK.

127. **Задача.** *При точкѣ* A *прямой* AM *построить уголъ, равный суммѣ или разности данныхъ угловъ* m *и* p *(фиг. 97).*

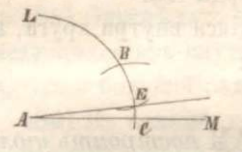
Фиг. 97.

1) Какимъ-нибудь радіусомъ опишемъ дугу CL изъ точки A и еще двѣ дуги изъ вершинъ данныхъ угловъ m и p. Потомъ мы опишемъ дугу изъ точки C радіусомъ, равнымъ хордѣ, соотвѣтствующей углу m. Изъ точки D пересѣченія этой дуги съ дугою CL опищемъ дугу радіусомъ, равнымъ хордѣ, соотвѣтствующей углу p. Наконецъ соединивъ точку B пересѣченія послѣдней дуги съ дугою CL, получимъ $\angle BAC = \angle m + \angle p$.

Доказательство. Уголъ $BAC = \angle DAC + \angle BAD$, но $\angle DAC = \angle m$ и $\angle BAD = \angle p$ (126), слѣдовательно $\angle BAC = \angle m + \angle p$.

2) Какимъ-нибудь радіусомъ опишемъ дугу CL (фиг. 98) изъ точки A и еще двѣ дуги изъ вершинъ угловъ m и p (фиг. 97). Потомъ изъ точки C опишемъ дугу радіусомъ, равнымъ хордѣ, соотвѣтствующей углу m; получимъ точку B пересѣченія этой дуги съ дугою CL. Послѣ этого опишемъ дугу изъ точки B радіусомъ, равнымъ хордѣ, соотвѣтствующей углу p, такимъ образомъ, чтобы она пересѣкла дугу CL между точками B и C. Наконецъ соединимъ точки A и E прямою AE.

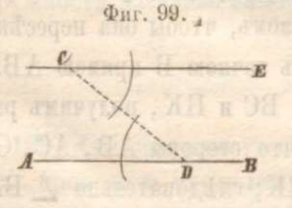
Фиг. 98.



Какъ доказывается, что $\angle CAE = \angle m - \angle p$?

128. **Задача.** *Чрезъ точку, данную внѣ прямой, провести параллельную къ этой прямой (фиг. 99).*

Фиг. 99.



Отъ данной точки C проведемъ какую-нибудь наклонную CD до данной прямой AB, и при точкѣ C прямой CD построимъ уголъ DCE, равный (126) углу ADC.

Какъ доказывается параллельность прямыхъ AB и CE?

129. **Задача.** *По двумъ угламъ a и b треугольника построить третій уголъ (фиг. 100).*

Фиг. 100.

Проведемъ какую-нибудь прямую MN и при точкѣ A ея построимъ уголъ $MAH = \angle a$ (см. 126). Потомъ при точкѣ A прямой AH построимъ $\angle HAK = \angle b$; получимъ требуемый уголъ KAN.

Доказательство. Въ треугольникѣ, содержащемъ углы a, b, x, сумма угловъ равна $\angle a + \angle b + \angle x = 180^0$, и вслѣдствіе (теор. 28)

$$\angle MAH + \angle HAK + \angle KAN = 180^0$$

или $\angle a + \angle b + \angle KAN = 180^0$.

Сравнивая послѣднее равенство съ равенствомъ $\angle a + \angle b + \angle x = 180^0$, мы заключаемъ, что $\angle x = \angle KAN$.

130. **Задача.** *Найти центръ дуги или окружности круга (фиг. 101).*

Проведемъ какую-нибудь хорду AB и изъ ея средины F возставимъ перпендикуляръ. Потомъ проведемъ еще хорду DE и изъ ея средины G возставимъ также перпендикуляръ. Точкою C пересѣченія проведенныхъ перпендикуляровъ опредѣляется требуемый центръ.

Фиг. 101.

Доказательство. См. 114.

131. **Задача.** *Данную прямую* AB *раздѣлить на двѣ равныя части (фиг. 102).*

Изъ точки A какимъ-нибудь радіусомъ, большимъ половины прямой AB, опишемъ двѣ дуги: первую надъ прямою AB и вторую подъ AB. Потомъ изъ точки B опишемъ двѣ такія-же дуги тѣмъ-же самымъ радіусомъ. Наконецъ соединимъ прямою CD точку C пересѣченія дугъ, лежащихъ надъ прямою AB, съ точкою D пересѣченія дугъ, находящихся подъ

Фиг. 102.

AB. Прямая CD раздѣлитъ прямую AB въ точкѣ E на двѣ равныя части.

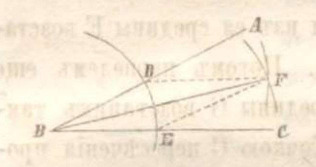
Доказательство. Проведя прямыя AC, AD, BC, BD, получимъ равные треугольники ACD и BCD, потому-что сторона CD общая, CA = CB и DA = DB (равные радіусы); слѣдовательно ∠ ACE = ∠ BCE. Отсюда мы заключаемъ, что прямая CE, раздѣляющая уголъ ACB равнобедреннаго треугольника ABC на двѣ равныя части, должна пройти чрезъ средину E основанія AB.

Примѣчаніе. Раздѣливъ каждую половину AE и EB данной прямой AB на двѣ равныя части, получимъ четвертыя части прямой AB. Тѣмъ-же самымъ способомъ мы можемъ раздѣлить каждую четверть на двѣ равныя части; получимъ восьмыя части прямой AB.

132. **Задача**. *Данный уголъ* ABC (фиг. 103) *раздѣлить на двѣ равныя части* (2-е рѣшеніе задачи 77 на 55 стр.).

Произвольнымъ радіусомъ опишемъ дугу DE изъ вершины B угла ABC. Потомъ изъ точекъ D и E произвольными равными радіусами опишемъ двѣ дуги такимъ образомъ, чтобы они пересѣклись внутри угла ABC. Наконецъ соединимъ точку F пересѣченія описанныхъ дугъ съ вершиною B; прямая BF раздѣлитъ данный уголъ на двѣ равныя части.

Фиг. 103.



Доказательство. Проведя прямыя DF и EF, получимъ равные треугольники BDF и BEF, потому-что сторона BF общая, BD = BE (радіусы дуги DE), DF = EF (равные радіусы); слѣдовательно ∠ DBF = ∠ EBF.

Примѣчаніе. Этимъ способомъ возможно раздѣлить уголъ на 4, на 8, на 16 и т. д. равныхъ частей.

ЗАДАЧИ ДЛЯ УПРАЖНЕНІЯ.

197) Построить уголъ, равный удвоенному данному углу ABC.

198) Чрезъ точку C, данную внѣ прямой AB, провести прямую,

которая съ данною прямою должна составлять уголъ, равный данному углу m.

199) Радіусомъ, равнымъ данной прямой AB, описать окружность, которая должна пройти чрез данныя точки E и F.

200) Въ данномъ кругѣ провести хорду, которой разстояніе отъ центра должно равняться данной прямой AB.

201) Описать окружность такимъ образомъ, чтобы она прошла чрезъ данныя точки E и F, и чтобы ея центръ находился на данной прямой AB.

202) Между сторонами угла ABC провести прямую, которая должна равняться данной прямой DE и должна составлять съ стороною BC уголъ, равный данному углу m.

203) Даны прямая AB и внѣ ея точка C. Требуется изъ точки C описать окружность, которая пересѣкла бы прямую AB въ двухъ точкахъ, между которыми разстояніе должно равняться данной прямой DE.

204) На сторонѣ AB даннаго угла ABC требуется найти точку, равно-отстоящую отъ стороны BC и точки D, данной на AB.

205) Внутри угла ABC найти точку, которой разстояніе отъ сторонъ BA и BC должно равняться данной прямой a.

206) Къ данной окружности провести касательную параллельно къ данной прямой AB.

207) Къ данной окружности провести касательную, которая должна составлять съ данною прямою AB уголъ, равный данному углу m.

208) Въ кругѣ провести хорду, равную данной прямой a, и параллельную къ данной прямой AB.

209) Въ кругѣ провести двѣ хорды, равныя даннымъ прямымъ a и b, такимъ образомъ, чтобы они пересѣклись подъ угломъ, равнымъ данному углу m.

210) По данному углу ABC построить уголъ, равный $90^0 + {}^1/_2$угла ABC.

211) Чрезъ данную точку O провести прямыя, равныя даннымъ прямымъ AB, CD, EF, такимъ образомъ, чтобы точки A, C, E совпали въ точкѣ O, а точки B, D, F лежали на одной прямой.

212) Найти прямую, раздѣляющую на двѣ равныя части уголъ,

составляемый двумя прямыми, которыхъ точка пересѣченія не можетъ быть опредѣлена.

213) Дана окружность, центръ которой не можетъ быть опредѣленъ. Къ ней требуется провести касательную чрезъ точку A, данную на ней.

ВТОРАЯ ГЛАВА.

Зависимость между центральными углами и соотвѣтствующими имъ хордами и дугами. Задачи построенія.

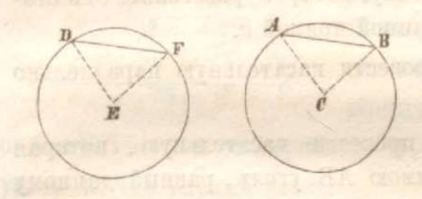
133. **Теорема.** *Въ кругѣ или въ двухъ равныхъ кругахъ равнымъ центральнымъ угламъ соотвѣтствуютъ равныя дуги и равныя хорды.*

Дано (фиг. 104): $\angle ACB = \angle DEF$. Требуется доказать, что

1) дуг. $AB =$ дуг. DF и

2) хор. $AB =$ хор. DF.

Фиг. 104.



1) Наложимъ кругъ C на кругъ E такимъ образомъ, чтобы центръ C совпалъ съ центромъ E и радіусъ CA принялъ направленіе радіуса ED; тогда по равенству этихъ радіусовъ точка A упадетъ въ D, и по равенству угловъ ACB и DEF радіусъ CB приметъ направленіе радіуса EF. По равенству этихъ радіусовъ точка B упадетъ въ F. Такъ какъ оконечныя точки A и B дуги AB совпали съ оконечными точками D и F дуги DF, то мы заключаемъ, что эти дуги равны.

2) По совмѣщенію точекъ A и B съ точками D и F мы заключаемъ, что хорда AB равна хордѣ DF.

134. *Примѣчаніе.* Если равные центральные углы находятся въ томъ-же самомъ кругѣ, то для доказательства этой теоремы проведемъ діаметръ GH (фиг. 105) чрезъ средину G дуги AD. Потомъ

перегнемъ бумагу, на которой начерчена окружность по направленію

Фиг. 105.



діаметра GH такимъ образомъ, чтобы нижняя часть фигуры помѣстилась на верхней; тогда по равенству дугъ AG и DG точка D упадетъ въ A, и по равенству угловъ DCF и ACB радіусъ CF пойдетъ по направленію радіуса CB. По равенству этихъ радіусовъ точка F упадетъ въ B. Отсюда слѣдуетъ, что дуги DF и AB совмѣстятся и также хорды DF и AB совмѣстятся, слѣдовательно дуг. DF = дуг. AB и хор. DF = хор. AB.

135. **Обратное предложеніе 1.** *Въ кругѣ или въ двухъ равныхъ кругахъ равнымъ хордамъ соотвѣтствуютъ равныя дуги и равные центральные углы.*

Дано (фиг. 104): хор. AB = хор. DF. Требуется доказать, что 1) ∠ ACB = ∠ DEF и 2) дуг. AB = дуг. DF.

1) Треугольники ABC и DEF равны, потому-что CA = CB = ED = EF (равные радіусы) и AB = DF (по заданію); слѣдовательно ∠ ACB = ∠ DEF.

2) Такъ какъ равнымъ центральнымъ угламъ ACB и DEF соотвѣтствуютъ равныя дуги, то дуг. AB = дуг. DF.

Обратное предложеніе 2. *Въ кругѣ или въ двухъ равныхъ кругахъ равнымъ дугамъ соотвѣтствуютъ равные центральные углы и равныя хорды.*

Дано (фиг. 104): дуг. AB = дуг. DF. Требуется доказать что ∠ ACB = ∠ DEF и хор. AB = хор. DE.

Наложимъ кругъ C на кругъ E такимъ образомъ, чтобы центры C и E совпали и также точки A и D совпали (совпаденіе точекъ A и D возможно, потому-что радіусы CA и ED равны); тогда по равенству дугъ AB и DF, точка B упадетъ въ F. Такъ какъ точки A и B совпали съ точками D и F, то мы заключаемъ, что хорды AB и DF равны. По равенстну хордъ AB и DF, мы имѣемъ ∠ ACB = ∠ DEF.

136. **Теорема**. *Если въ кругѣ или въ двухъ равныхъ кругахъ взяты двѣ неравныя дуги, то бо́льшая изъ нихъ стягивается бо́льшею хордою.*

Дано (фиг. 105): дуг. EAB > дуг. DF. Требуется доказать, что хор. EB > хор. DF.

Проведемъ радіусы CD, CF, CB, CE. Потомъ проведемъ діаметръ HG чрезъ средину H дуги BF и согнемъ бумагу, на которой начерчена окружность по направленію діаметра HG такимъ образомъ, чтобы полуокружность GDH помѣстилась на полуокружности GAH; тогда по предъидущему (134) хорда DF приметъ положеніе хорды AB. Изъ образовавшихся треугольниковъ EBC и ABC получимъ CE = CA, сторона CB общая и ∠ ECB > ∠ ACB; но извѣстно (теор. 39): если двѣ стороны одного треугольника соотвѣтственно равны двумъ сторонамъ другаго треугольника, но углы, заключающіеся между этими сторонами не равны, то наибольшему углу противолежитъ наибольшая сторона; слѣдовательно EB > AB или EB > DF.

137. **Обратное предложеніе.** *Если въ кругѣ или въ двухъ равныхъ кругахъ проведены двѣ неравныя хорды, то наибольшая изъ нихъ стягиваетъ наибольшую дугу.*

Дано (фиг. 105): хор. EB > хор. DF. Требуется доказать, что дуг. EAB > дуг. DF.

Проведя діаметръ HG чрезъ средину H дуги BF, перегнемъ бумагу, на которой начерчена окружность по направленію этого діаметра такимъ образомъ, чтобы полуокружность GDH помѣстилась на полуокружности GAH; тогда дуга DF приметъ положеніе дуги AB. Такъ какъ дуга AB, составляющая часть дуги EB, меньше дуги EB, и дуга AB равна дугѣ DF, то дуг. EB > дуг. DF.

138. **Теорема.** *Равныя хорды равно-отстоятъ отъ центра круга.*

Дано (фиг. 106): прямая CF перпендикулярна къ AB, прямая

CG перпендикулярна къ DE и хор. AB = хор. DE. Требуется доказать, что CF = CG. Проведя радіусы CB и CE, получимъ равные прямоугольные треугольники CBF и CEG, потому-что CB = CE (радіусы) и BF = EG (потому-что AB = DE по заданію и BF = $^1/_2$AB и EG = $^1/_2$DE); слѣдовательно CF = CG.

Фиг. 106.



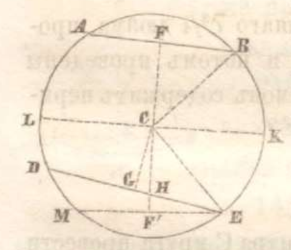
139. **Обратное предложеніе**. *Хорды, равно-отстоящія отъ центра круга, должны быть равны.*

Дано (фиг. 106): CF = CG; требуется доказать, что AB = DE. Прямоугольные треугольники BCF и ECG равны, потому-что CB = CE и CF = CG; слѣдовательно FB = GE и 2FB = 2GE или AB = DE.

140. **Теорема**. *Меньшая изъ двухъ неравныхъ хордъ дальше отстоитъ отъ центра круга, нежели большая хорда.*

Дано (фиг. 107): хор. AB < хор. DE, прямая CF перпендикулярна къ AB и прямая CG перпендикулярна къ DE. Требуется доказать, что CF > CG. Проведемъ радіусы CB и CE, и чрезъ средину K дуги BE діаметръ KL. Потомъ перегнемъ бумагу, на которой начерчена окружность по направленію діаметра KL такъ, чтобы верхняя часть фигуры помѣстилась на нижней; тогда радіусъ CB совмѣстится съ радіусомъ CE, хорда AB приметъ положеніе EM и перпендикуляръ CF пойдетъ по направленію CF'. Прямая CF', пересѣкающая хорду DE въ точкѣ H между точками G и E, больше прямой CH; но прямая CH больше CG, потому-что CG перпендикуляръ и CH наклонная относительно прямой DE. Такъ какъ CF' > CH и CH > CG, то непремѣнно CF' > CG или CF > CG.

Фиг. 107.



ЧИСЛЕННЫЕ ВОПРОСЫ.

214) Дуга AB равна дугѣ DF (фиг. 105), ∠ BCF = 85°35′ и ∠ ACD = 163°45′. Сколько градусовъ и минутъ содержитъ уголъ DCF?

215) Уголъ a (фиг. 100) составляетъ $^3/_4$ угла b и $\angle$ KAN $= 76^\circ 35'$. Сколько градусовъ и минутъ содержитъ уголъ HAK?

216) Дуга HK (фиг. 96) описана радіусомъ въ 3,25 дюйма и уголъ EGF содержитъ 60°. Сколько дюймовъ содержитъ хорда HK?

217) Радіусъ CB (фиг. 106) содержитъ 3,25 фута и $\angle$ BCF$=30^\circ$. Сколько футъ содержитъ хорда AB?

218) Хорда DE (фиг. 107) содержитъ 6,35 дюйма и $\angle$ ECG$=45^\circ$, на сколько дюймовъ отстоитъ хорда DE отъ центра круга?

219) Уголъ ACE (фиг. 105) составляетъ $^3/_8$угла DCF и уг. BCE $=118^\circ 4'$. Сколько градусовъ и минутъ содержитъ уголъ ACB?

220) Радіусъ CK круга содержитъ $4^3/_4$ дюйма (фиг. 107) и $\angle$BCK $=60^\circ$. Сколько дюймовъ содержитъ хорда AB?

221) Уголъ BAC равенъ суммѣ угловъ m и p (фиг. 97) и $\angle m= 17^\circ 45'$. Сколько градусовъ и минутъ содержитъ уголъ p, если въ равнобедренномъ треугольникѣ ABC уголъ BAC при вершинѣ равенъ $^3/_4$ угла ABC?

222) Уголъ CHE $= 135^\circ$ (фиг. 107), разстояніе CG равно половинѣ хорды DE и точка H отстоитъ отъ G на 3,45 фута. Сколько футъ содержитъ хорда DE?

223) Чрезъ средину D радіуса CA, содержащаго $7^3/_4$ дюйма, проведена къ нему перпендикулярно хорда BE, и потомъ проведены прямыя AB, BC, CE и EA. Сколько футъ и дюймовъ содержитъ периметръ образовавшагося четыреугольника ABCE?

ТЕОРЕМЫ.

224) Если въ равныхъ разстояніяхъ отъ центра C круга провести двѣ параллельныя хорды AB и DE, и соединить точки A и D, и точки B и E, то образуется прямоугольникъ ABED.

225) Если точку D, лежащую внутри круга соединить съ его центромъ C и на прямой CD описать окружность, то всякая хорда AB большой окружности, проведенная чрезъ D, раздѣлится малою окружностью въ точкѣ E на двѣ равныя части.

226) Если чрезъ точку P, данную внутри круга, провести хорду перпендикулярно къ діаметру, проходящему чрезъ P, то эта хорда меньше всякой другой хорды, проведенной чрезъ P.

227) Чрезъ точку A, данную внѣ окружности, проведена сѣкущая AD, которой внѣшній отрѣзокъ AE (часть сѣкущей, лежащая внѣ

круга) равенъ радіусу CE даннаго круга; потомъ чрезъ точку A проведена сѣкущая AB, проходящая чрезъ центръ C, и наконецъ проведенъ еще радіусъ CD. Требуется доказать, что уголъ ACE равенъ третьей части угла BCD.

228) Если чрезъ точку A, данную на окружности C, провести нѣсколько хордъ, то другая окружность, имѣющая діаметръ CA, есть геометрическое мѣсто среднихъ точекъ проведенныхъ хордъ.

229) Отъ точки P, данной внутри круга, проведены прямыя PA, PD, PE, PF до пересѣченія съ окружностью. Требуется доказать, что наибольшая изъ этихъ прямыхъ будетъ прямая PA, проходящая чрезъ центръ, а наименьшая будетъ прямая PB, находящаяся на продолженіи прямой AP.

141. **Задача.** *Данную дугу раздѣлить на двѣ равныя части* (фиг. 108).

1) Проведя радіусы CA и CB, раздѣлимъ центральный уголъ ACB на двѣ равныя части (132) прямою CD. Этою-же прямою раздѣлится также дуга ADB на двѣ равныя части (133).

Фиг. 108.

2) Проведя хорду AB, раздѣлимъ ее на двѣ равныя части (131) прямою CD. Эта прямая раздѣлитъ также дугу ADB на двѣ равныя части (133).

142. **Задача.** *Изъ точки, данной на прямой, возставить перпендикуляръ къ этой прямой.*

1) На данной прямой отъ данной точки C (фиг. 109) отложимъ произвольныя равныя части CA и CB, и изъ точекъ A и B равными радіусами опишемъ двѣ дуги, пересѣкающіяся въ точкѣ D. Наконецъ соединимъ точки D и C прямою DC.

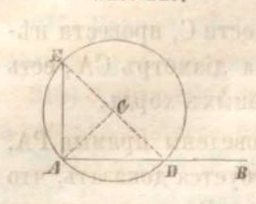
Фиг. 109.

Доказательство. Проведя прямыя AD и BD, получимъ равные треугольники ADC и BDC, потому-что сторона CD общая, CA = CB (по отложенію), AD = BD (равные радіусы); слѣдовательно $\angle$ ACD = $\angle$ BCD. По равенству

этихъ угловъ мы заключаемъ, что прямая CD перпендикулярна къ AB (теор. 24).

2) Чтобы возставить перпендикуляръ изъ оконечной A точки такой прямой AB (фиг. 110), которая не можетъ быть продолжена за точкою A, мы опишемъ окружность изъ точки C, взятой внѣ прямой AB, радіусомъ, равнымъ прямой CA. Чрезъ точку D пересѣченія этой окружности съ прямою AB проведемъ діаметръ DE и соединимъ его оконечность E съ точкою A. Прямая AE требуемый перпендикуляръ.

Фиг. 110.

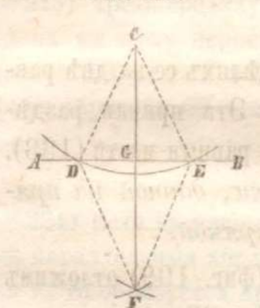


Доказательство. Уголъ DAE прямой, потому-что его стороны AD и AE проходятъ чрезъ оконечности діаметра (теор. 112).

143. **Задача.** *Изъ точки C, данной внѣ прямой AB, опустить перпендикуляръ на эту прямую.*

Изъ точки C (фиг. 111) опишемъ дугу такимъ радіусомъ, чтобы она пересѣкла прямую AB въ точкахъ D и E. Потомъ изъ точекъ D и E опишемъ равными радіусами двѣ пересѣкающіяся дуги. Наконецъ соединимъ точку F пересѣченія этихъ дугъ съ точкою C; получимъ требуемый перпендикуляръ CF.

Фиг. 111.

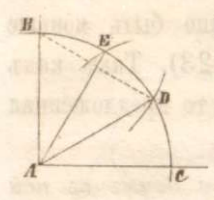


Доказательство. Проведя прямыя CD, FD, CE, FE, получимъ равные треугольники CDF и CEF, потому-что сторона CF общая, CD = CE (радіусы дуги DE), FD = FE (равные радіусы); слѣдовательно ∠ DCF = ∠ ECF. Такъ какъ въ равнобедренномъ треугольникѣ DCE прямая CG составляетъ съ его сторонами CD и CE равные углы DCG и ECG, то мы заключаемъ, что прямая CG перпендикулярна къ основанію DE этого треугольника (теор. 43, 1).

144. **Задача.** *Прямой уголъ раздѣлить на три равныя части.*

Изъ вершины А (фиг. 112) прямаго угла опишемъ какимъ-нибудь радіусомъ дугу ВС, которая пересѣчетъ стороны угла въ точкахъ В и С. Потомъ опишемъ тѣмъ-же самымъ радіусомъ дугу изъ точки В и еще дугу изъ точки С; первая дуга пересѣчетъ дугу ВС въ точкѣ D и вторая въ точкѣ Е. Наконецъ проведя прямыя АЕ и АD, получимъ $\angle$ ВАЕ $= \angle$ ЕАD $= \angle$ DАС $= {}^1/_3 \angle$ ВАС.

Фиг. 112.

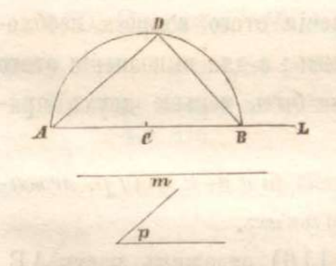


Доказательство. Проведя хорду ВD, получимъ равносторонній треугольникъ АВD, въ которомъ уг. ВАD $= 60^0$; слѣдовательно уг. DАС $= 30^0$. Такимъ-же образомъ доказывается, что уг. ВАЕ $= 30^0$; слѣдовательно и уг. ЕАD $= 30^0$.

145. **Задача**. *По данной гипотенузѣ и извѣстному острому углу построить прямоугольный треугольникъ.*

На какой-нибудь прямой АL (фиг. 113) отложимъ часть АВ, равную данной прямой *m*, и на ней опишемъ полуокружность. Потомъ при точкѣ А построимъ уголъ ВАD, равный данному углу *p*, и наконецъ соединимъ точки В и D.

Фиг. 113.

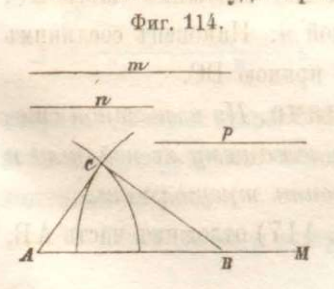


Доказательство. Такъ какъ хорды АD и ВD проходятъ чрезъ оконечности діаметра АВ, то вписанный уголъ АDВ долженъ быть прямой (112).

146. **Задача**. *По тремъ сторонамъ m, n и p построить треугольникъ.*

На какой-нибудь прямой АМ (фиг. 114) отложимъ часть АВ, равную данной прямой *m*. Потомъ изъ точки А опишемъ дугу радіусомъ, равнымъ прямой *n*, и еще дугу изъ точки В радіусомъ, равнымъ прямой *p*. Наконецъ соединимъ точку С пересѣченія описанныхъ дугъ съ точками А и В.

Фиг. 114.



Для рѣшенія этого вопроса необходимо, чтобы пересѣклись дуги, описанныя изъ точекъ A и B радіусами *n* и *p*; а для выполненія этого условія разстояніе *m* между центрами должно быть меньше суммы радіусовъ *n* и *p*, и больше ихъ разности (123). Такъ какъ описанныя дуги пересѣкаются въ двухъ точкахъ, то предложенная задача даетъ два рѣшенія.

147. **Задача.** *По извѣстной сторонѣ m и двумъ къ ней прилежащимъ угламъ n и p построить треугольникъ (фиг. 115).*

На какой-нибудь прямой AM отложимъ часть AB, равную прямой *m*. Потомъ при точкѣ A построимъ уголъ BAL, равный углу *n*, и при точкѣ B построимъ уголъ ABN, равный углу *p*. Точкою C пересѣченія прямыхъ AL и BN опредѣлится третья вершина треугольника.

Фиг. 115.

Для рѣшенія этого вопроса необходимо, чтобы прямыя AL и BN пересѣклись; а для выполненія этого условія сумма угловъ CAB и CBA должна быть меньше двухъ прямыхъ угловъ.

148. **Задача.** *По двумъ сторонамъ m и n, и углу p, лежащему между ними, построить треугольникъ.*

На какой-нибудь прямой AM (фиг. 116) отложимъ часть AB, равную прямой *m*. Потомъ при точкѣ A построимъ уголъ MAL, равный углу *p*, и на прямой AL отложимъ часть AC, равную прямой *n*. Наконецъ соединимъ точки B и C прямою BC.

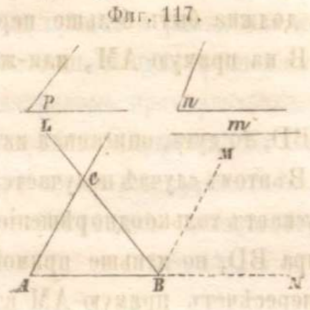
Фиг. 116.

149. **Задача.** *По извѣстной сторонѣ m, прилежащему къ ней углу n и противолежащему ей углу p, построить треугольникъ.*

1) На какой-нибудь прямой AN (фиг. 117) отложимъ часть AB,

равную прямой *m*. Потомъ при точкѣ B построимъ уголъ ABL, равный углу *p*, и на прямой BL построимъ уголъ LBM, равный углу *n*. Наконецъ чрезъ точку A проведя прямую AC параллельно къ BM, получимъ требуемый треугольникъ ABC, потому-что AB = *m*, ∠ ABC = ∠ *p* и ∠ ACB = ∠ CBM = ∠ *n* (по параллельности прямыхъ AC и BM, пересѣченныхъ прямою BC).

Фиг. 117.



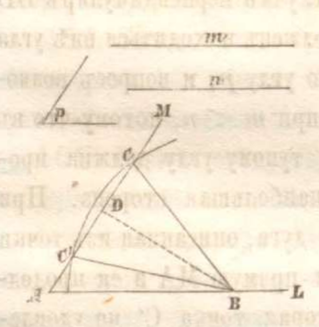
2) На какой-нибудь прямой AN (фиг. 118) отложимъ часть AB, равную прямой *m*, и при точкѣ B построимъ уголъ ABL, равный углу *n*. Потомъ при какой-нибудь точкѣ D прямой BL построимъ уголъ BDE, равный углу *p*, и наконецъ чрезъ точку A проведемъ прямую AC параллельно къ ED.

Фиг. 118.

150. Задача. *По двумъ сторонамъ и углу, противолежащему одной изъ нихъ, построить треугольникъ.*

Проведя какую-нибудь прямую AL (фиг. 119), отложимъ на ней часть AB, равную прямой *m*, и при точкѣ A построимъ уголъ LAM, равный углу *p*. Потомъ изъ точки B опишемъ дугу радіусомъ, равнымъ прямой *n*. Если эта дуга пересѣчетъ прямую AM въ точкѣ C, то, соединивъ точки B и C, получимъ требуемый треугольникъ ABC.

Фиг. 119.



Изслѣдуемъ этотъ вопросъ, т. е. найдемъ условія, которымъ должны удовлетворять данныя стороны и извѣстный уголъ, чтобы рѣшеніе было возможное, и узнаемъ, сколько возможныхъ рѣшеній допускаетъ предложенная задача.

1) *Когда уголъ p острый.* Для полученія возможнаго рѣшенія,

дуга, описанная изъ точки B, должна встрѣтиться съ прямою AM; а для выполненія этого условія, прямая n должна быть больше перпендикуляра BD, опущеннаго изъ точки B на прямую AM, или-же должна равняться этому перпендикуляру.

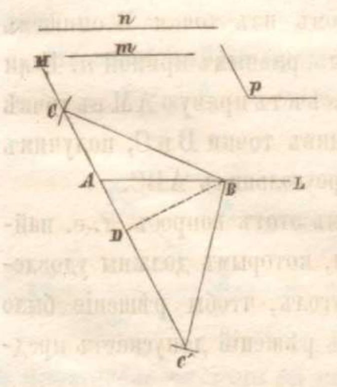
Если прямая n равна перпендикуляру BD, то дуга, описанная изъ точки B, касается къ прямой AM въ точкѣ D. Въ этомъ случаѣ получается прямоугольный треугольникъ и вопросъ допускаетъ только одно рѣшеніе.

Если прямая n больше перпендикуляра BD, но меньше прямой m, то дуга, описанная изъ точки B, пересѣчетъ прямую AM въ двухъ точкахъ C и C′, лежащихъ по одну сторону вершины A. Въ этомъ случаѣ получаются два треугольника ABC и ABC′, удовлетворяющіе заданнымъ условіямъ.

Наконецъ если прямая n больше m и больше перпендикуляра BD, то дуга, описанная изъ точки B, пересѣчетъ прямую MA и ея продолженіе. Такъ какъ вторая точка пересѣченія относится къ треугольнику, въ которомъ сторонѣ n противолежитъ уголъ, которымъ дополняется уголъ p до двухъ прямыхъ угловъ, то этотъ треугольникъ не удовлетворяетъ заданному вопросу; слѣдовательно въ этомъ случаѣ получается только одно рѣшеніе.

2) *Когда уголъ p тупой.* Въ этомъ случаѣ перпендикуляръ BD (фиг. 120) долженъ находиться внѣ угла BAC, равнаго углу p, и вопросъ возможенъ только при $m < n$, потому-что въ треугольникѣ тупому углу должна противолежать наибольшая сторона. При этомъ условіи дуга, описанная изъ точки B, пересѣчетъ прямую MA и ея продолженіе; но вторая точка C′ не удовлетворяетъ данному вопросу, потому-что она принадлежитъ треугольнику ABC′, въ которомъ сторона BC′ противолежитъ углу $BAC' = 180^0 - \angle BAC$, а не данному углу p.

Фиг. 120.

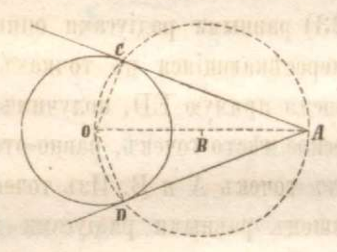


Когда уголъ p прямой. При этомъ углѣ вопросъ невозможенъ, если прямая *n* равна или меньше *m*. При *n* больше *m* вопросъ имѣетъ только одно рѣшеніе, потому-что въ этомъ случаѣ получаются два равные прямоугольные треугольника.

151. **Задача.** *Къ данной окружности провести касательную чрезъ точку, находящуюся внѣ круга.*

Соединимъ данную точку A (фиг. 121) съ центромъ O данной окружности и изъ средины B прямой OA радіусомъ BO опишемъ окружность, которая пересѣчетъ данную окружность въ точкахъ C и D. Соединивъ точку A съ точками C и D, получимъ двѣ касательныя AC и AD, удовлетворяющія данному вопросу.

Фиг. 121.



Доказательство. Проведя прямыя OC и OD, получимъ вписанные углы OCA и ODA, стороны которыхъ проходятъ чрезъ оконечности діаметра OA; слѣдовательно эти углы прямые, и прямыя AC и AD соотвѣтственно перпендикулярны къ радіусамъ OC и OD (теор. 112).

152. Слѣдствіе. Треугольники ACO и ADO равны, потому-что сторона AO общая, OC = OD (радіусы) и углы ACO и ADO прямые; слѣдовательно AC = AD, ∠ CAO = ∠ DAO и ∠ AOC = ∠ AOD. Отсюда слѣдуетъ, что *1) двѣ касательныя, проведенныя къ окружности изъ одной и той-же точки, равны, и 2) прямая, соединяющая центръ данной окружности съ данною точкою, изъ которой проведены касательныя, раздѣляетъ на двѣ равныя части уголъ, составляемый касательными, и центральный уголъ составляемый радіусами, проходящими чрезъ точки касанія.*

153. **Задача.** *Описать окружность такимъ образомъ, чтобы она прошла чрезъ три данныя точки* A, B *и* C, *не лежащія на одной прямой (фиг. 122).*

Фиг. 122.

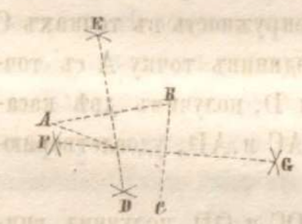


1) Проведя прямыя AB и AC, возставимъ перпендикуляръ изъ средины F прямой AB и еще перпендикуляръ изъ средины D прямой AC. Въ точкѣ O пересѣченія этихъ перпендикуляровъ получится центръ искомой окружности.

Доказательство. См. доказательство (71).

2) Изъ точекъ A и B (фиг. 123) равными радіусами опишемъ

Фиг. 123.



дуги, пересѣкающіяся въ точкахъ E и D. Проведя прямую ED, получимъ геометрическое мѣсто точекъ, равно-отстоящихъ отъ точекъ A и B. Изъ точекъ B и C опишемъ равными радіусами дуги, пересѣкающіяся въ точкахъ F и G, и проведемъ прямую FG. Эта прямая есть геометрическое мѣсто точекъ, равно-отстоящихъ отъ точекъ B и C. Пересѣченіемъ прямыхъ ED и FG опредѣлится точка, равно-отстоящая отъ точекъ A, B и C; слѣдовательно если изъ этой точки радіусомъ, равнымъ ея разстоянію до A, описать окружность, то эта окружность должна пройти чрезъ точки A, B и C.

154. *Примѣчаніе.* Извѣстно (71), что перпендикуляры, возставленные къ прямымъ AB, AC, BC (фиг. 122) изъ ихъ среднихъ точекъ, пересѣкаются въ одной точкѣ. Отсюда мы заключаемъ, что *чрезъ три данныя точки возможно провести только одну окружность*, и что *двѣ окружности, у которыхъ три общія точки, должны совмѣститься.*

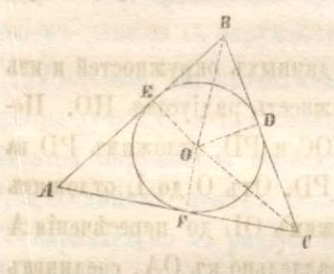
155. *Примѣчаніе.* Изложенными способами возможно *описать окружность около треугольника*, т. е. провести окружность такъ, чтобы она прошла чрезъ вершины треугольника. Если въ кругѣ построенъ треугольникъ такимъ образомъ, что его стороны сдѣлались хордами данной окружности, то этотъ треугольникъ *вписанъ въ*

кругъ. Въ (фиг. 122) окружность описана около треугольника ABC, а треугольникъ вписанъ въ кругѣ O.

156. **Задача.** *Въ данномъ треугольникѣ вписать окружность круга.*

Треугольникъ ABC, котораго стороны касаются къ данной окружности, называется *описаннымъ около круга*, а кругъ называется *вписаннымъ въ треугольникѣ (фиг. 124).*

Фиг. 124.



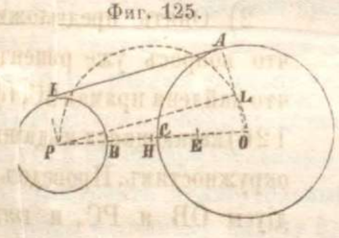
Предположимъ, что вопросъ рѣшенъ, и что въ данномъ треугольникѣ ABC вписана окружность круга. Извѣстно (152), что прямая CO, соединяющая точку C пересѣченія касательныхъ CD и CF съ центромъ O, раздѣляетъ уголъ ACB на двѣ равныя части. Также прямаяBO, соединяющая точку B пересѣченія касательныхъ BE и BD съ центомъ O, раздѣляетъ уголъ ABCна двѣ равныя части; слѣдовательно центръ O долженъ находиться въ пересѣченіи прямыхъ CO и BO.

Рѣшеніе. Раздѣлимъ уголъ ACB на двѣ равныя части и также уголъ ABC. Потомъ изъ точки O пересѣченія прямыхъ CO и BO опустимъ перпендикуляръ OD на сторону BC и наконецъ опишемъ окружость изъ точки O радіусомъ OD.

157. **Задача.** *Къ двумъ окружностямъ провести общую касательную.*

1) Положимъ, что вопросъ рѣшенъ, и что прямая AB (фиг. 125) касается къ даннымъ окружностямъ.

Фиг. 125.



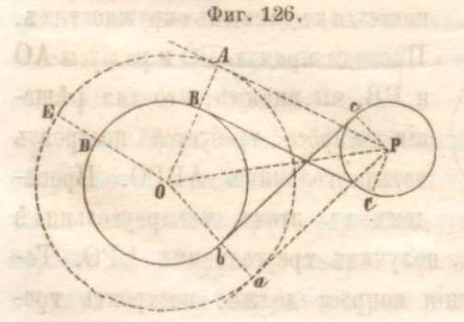
Проведя прямую PO и радіусы AO и PB, мы видимъ, что для рѣшенія вопроса требуется построить четыреугольникъ ABPO. Проведемъ въ этомъ четыреугольникѣ прямую PL параллельно къ BA, получимъ треугольникъ LPO. Теперь мы видимъ, что для рѣшенія вопроса должно построить тре-

угольникъ LPO. Прямыя LA и PB, перпендикулярныя къ AB, должны быть перпендикулярны и къ прямой PL, параллельной къ BA; слѣдовательно $\angle ALP = \angle OLP = 90^0$ и также $\angle LPB = 90^0$. Отсюда мы заключаемъ, что ABLP прямоугольникъ и $AL = BP$; слѣдовательно $OL = OA - LA$ или $OL = OA - BP$. По извѣстнымъ прямымъ PO и OL, и прямому углу PLO легко построить треугольникъ LPO.

Рѣшеніе. Соединимъ центры P и O данныхъ окружностей и изъ средины H прямой PO опишемъ полуокружность радіусомъ HO. Потомъ, чтобы найти разность радіусовъ OC и PD, отложимъ PD на OC отъ O до E; получимъ $CE = OC - PD$. Отъ O до L отложимъ хорду OL, равную прямой CE, и продолжимъ OL до пересѣченія A съ окружностью. Проведя радіусъ PB параллельно къ OA, соединимъ точки A и B прямою AB. Полученная касательная AB называется *внѣшнею.* Такимъ-же образомъ возможно провести еще одну внѣшнюю касательную къ даннымъ окружностямъ.

Доказательство. Зная, что $OL = OA - LA$ и $OL = OA - PB$, мы заключаемъ, что $LA = PB$. По равенству и параллельности прямыхъ LA и PB четыреугольникъ ABPL долженъ быть параллелограмъ (84). Такъ какъ уголъ PLO прямой, то и уголъ ALP прямой и, по параллельности прямыхъ LA и PB, также уголъ LPB прямой. По равенству прямыхъ LA и PB и ихъ перпендикулярности къ прямой PL, мы заключаемъ, что параллелограмъ ABPL есть прямоугольникъ; слѣдовательно прямая AB перпендикулярна къ радіусамъ AO и BP.

Фиг. 126.



2) Опять предположимъ, что вопросъ уже рѣшенъ, и что найдена прямая BC, (фиг. 126) касающаяся къ даннымъ окружностямъ. Проведемъ радіусы OB и PC, и прямую PA параллельно къ CB до пересѣченія A съ продолжен-

нымъ радіусомъ OB. Отсюда мы видимъ, что для рѣшенія предложенной задачи должно построить прямоугольникъ ABCP, а для этого построенія необходимо опредѣлить точки A и B. Зная, что BA $=$ CP и OA $=$ OB $+$ PC, опишемъ изъ точки O окружность радіусомъ OA. Эта окружность должна касаться къ прямой PA въ точкѣ A, а радіусъ OA, проходящій чрезъ эту точку касанія, своимъ пересѣченіемъ данною съ окружностью O, опредѣляетъ точку B.

Рѣшеніе. На продолженіи радіуса OD отложимъ часть DE, равную радіусу PC, и изъ точки O опишемъ окружность радіусомъ OE. Къ этой окружности проведемъ (151) касательную PA изъ центра P, и соединимъ центръ O съ точкою касанія A. Проведя радіусъ PC параллельно къ радіусу OA, соединимъ точки B и C прямою BC. Полученная касательная BC называется *внутреннею.* Такимъ-же образомъ можно провести еще одну внутреннюю касательную bc къ даннымъ окружностямъ.

Доказательство. Уголъ PAO прямой и, по параллельности прямыхъ AO и PC, также уголъ APC прямой. Такъ какъ въ четыреугольникѣ ABCP стороны AB и PC равны и параллельны и углы PAO и APC прямые, то ABCP прямоугольникъ и $\angle ABC = \angle BCP = 90^0$, слѣдовательно и $\angle CBO = 90^0$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ УПРАЖНЕНІЯ.

230) Описать окружность такъ, чтобы она прошла чрезъ данную точку C и касалась къ данной прямой AB въ точкѣ D.

231) Къ данной окружности провести двѣ касательныя, составляющія уголъ, равный данному углу m.

233) Радіусомъ, равнымъ данной прямой a, описать окружность, касающуюся къ непараллельнымъ прямымъ AB и CD.

234) Построить прямоугольный треугольникъ: a) по извѣстной гипотенузѣ a и данному катету b;

b) по извѣстному катету a и противолежащему ему углу m.

234) По данной гипотенузѣ a и перпендикуляру b, опущенному

на нее изъ вершины прямаго угла, построить прямоугольный треугольникъ.

235) Радіусомъ, равнымъ данной прямой *m*, описать окружность, проходящую чрезъ данную точку C и касающуюся къ данной прямой AB.

236) Построить равнобедренный треугольникъ:

a) по данному основанію *a* и прилежащему къ нему углу *m*;

b) по данному основанію *a* и углу *m* при вершинѣ;

c) по данной сторонѣ *m* и углу *p*, равному суммѣ угловъ, прилежащихъ къ этой сторонѣ;

d) по извѣстной сторонѣ *m* и перпендикуляру *n*, опущенному изъ вершины на основаніе.

237) Построить прямоугольникъ

a) по даннымъ: сторонѣ *a* и діагонали *b*;

b) по данной сторонѣ *a* и противолежащему ей углу *m*, составляемому діагоналями.

238) Требуется провести прямую такимъ образомъ, чтобы ея разстоянія отъ данныхъ точекъ A и B соотвѣтственно равнялись даннымъ прямымъ *m* и *n*.

239) Построить равносторонній треугольникъ, когда извѣстно, что данная прямая *m* равна суммѣ его стороны и перпендикуляра, опущеннаго на эту сторону изъ вершины противолежащаго угла.

240) Описать окружность, проходящую чрезъ данную точку A и касающуюся къ данной окружности въ точкѣ B.

241) Начертить ромбъ

a) по извѣстной сторонѣ *a* и данному углу *m*;

b) по извѣстнымъ: сторонѣ *a* и діагонали *b*;

c) по извѣстной діагонали *b* и противолежащему ей углу *m*;

d) по извѣстной сторонѣ *a* и ея разстоянію *h* до противолежащей стороны.

242) Описать окружность, касающуюся къ данной прямой AB и къ данной окружности въ точкѣ C.

243) Описать окружность, касающуюся къ данной прямой AB, а къ данной прямой CD въ точкѣ E.

244) Построить параллелограмъ

a) по двумъ сторонамъ *a* и *b*, и разстоянію *h* между двумя противолежащими сторонами;

b) по діагонали *d*, сторонѣ *a* и ея разстоянію *h* до противолежащей стороны;

c) по діагоналямъ *c* и *d*, и углу *m*, заключенному между ними;

d) по діагоналямъ *c* и *d*, и разстоянію *h* между параллельными сторонами.

245) Описать окружность, касающуюся къ даннымъ прямымъ CD и EF, и чтобы ея центръ находился на данной прямой AB.

246) Построить трапецію.

a) по извѣстнымъ основаніямъ *a* и *b*, сторонѣ *c* и углу *m*, противолежащему сторонѣ *c*;

b) по извѣстнымъ основаніямъ *a* и *b*, и угламъ *m* и *n*, прилежащимъ къ бо̀льшему основанію.

247) Построить равнобедренный треугольникъ по данному основанію *a* и извѣстной разности *p* между стороною и перпендикуляромъ, опущеннымъ изъ вершины на основаніе.

248) Построить треугольникъ по данной сторонѣ *a*, прилежащему къ ней углу *m* и разности *p* между двумя остальными сторонами.

249) Описать такую окружность, коей дуга, соотвѣтствующая хордѣ AB, была вдвое меньше дуги, которой соотвѣтствуетъ хорда CD.

250) Построить прямоугольный треугольникъ по данному катету *a* и извѣстной суммѣ *p* гипотенузы и другаго катета.

251) По данному периметру *p* и углу *m*, прилежащему къ основанію, построить равнобедренный треугольникъ.

252) Построить треугольникъ по данному периметру *p* и двумъ угламъ *m* и *n*.

253) На сторонѣ AB угла ABC дана точка D. Требуется опредѣлить на сторонѣ BC такую точку E, чтобы сумма DE + BE равнялась данной прямой *m*.

Результаты численныхъ вопросовъ, доказательства теоремъ и рѣшенія задачъ построенія.

2) AD = 9 саж.

6) $1^{3}/_{4}$ дюйма.

7) $EF = m + n + p$.

8) $HF = a - (b + c)$.

9) $11^{5}/_{8}$ дюйма.

10) $3^{4}/_{41}$ метра.

11) $\angle EBG$; $\angle GBA$; $\angle CBF$.

12) $\angle DAC = {}^{1}/_{18}$ полнаго угла.

13) 24 раза.

14) Угломъ EBG; $\angle GBF$.

15) $\angle DBE + \angle EBF + \angle FBG = \angle DBG$; $\angle EBD + \angle DBA + \angle ABC = \angle EBC$; $\angle ABD + \angle DBE + \angle EBF = \angle ABF$.

16) Нулевой уголъ; прямой уголъ; развернутый уголъ; прямой уголъ.

17) Угломъ DBG.

18) Уг. $ABC = {}^{1}/_{4}$ развернутаго угла.

19) $\angle ABC = \angle ABD = \angle DBE = \angle EBF = \angle FBG = {}^{1}/_{5} \angle CBG$; $\angle CBA = \angle ABD = {}^{1}/_{2} \angle CBD$; $\angle DBE = \angle EBF = \angle FBG = {}^{1}/_{3} \angle DBG$; $\angle CBD = \angle ABE = {}^{2}/_{3} CBE$; $\angle DBG = \angle ABF = {}^{3}/_{4} \angle ABG$; $\angle EBC = 3 \angle ABC$.

20) $\angle n = 22^{0}30'$, $\angle m = 67^{0}30'$.

21) $\angle EAC = 120^{0}$.

22) $\angle EAD = 36^{0}$.

23) 16 угловъ.

24) $\angle ABC = 36^{0}30'$.

25) $\angle ABD = 135^{0}$; $\angle ABC = 45^{0}$.

26) 90^{0}.

27) $98^{0}52'$.

28) $115^{0}24'$.

29) 108^{0}.

30) $147^{0}30'$.

31) $\angle ABD + \angle ABC = ?$

$^1/_2 \angle ABD + ^1/_2 \angle ABC = ?$ или $\angle ABF + \angle ABE = ?$ или $\angle FBE = ?$

32) $\angle AEC = \angle BED$, $^1/_2 \angle AEC = ?$

33) $\angle AEC + \angle BEC + \angle BED + \angle AED = 360^0$ или $2\angle AEC + 2\angle BEC = 360^0$ или $\angle AEC + \angle BEC = 180^0$.

34) $\angle ABD + \angle ABC + \angle CBE + \angle DBE = 360^0$; но $\angle ABD + \angle CBE = ?$ слѣдовательно $\angle ABC + \angle DBE = ?$

35) $2\angle GBE + 2\angle EBD = ?$ $\angle GBE + \angle EBD = ?$

36) $41^1/_2$ саж.

37) Сторона AC должна быть больше $11^1/_2$ саж.

38) 33 саж.

39) $61^2/_3$ саж.

40) 32 саж.

41) $236^1/_2$ саж.

42) Прямая BD должна быть меньше 46 саж.

43) Прямая AD должна быть больше 3 саж.

44) Одну шестую.

45) $AB = 93^3/_4$ саж., $AC = 40^5/_{28}$ саж., $BC = 16^1/_{14}$ саж.

46) 75^0.

47) $56^015'$.

48) $106^050'$.

49) $21^05'$.

50) $^1/_{23}$ периметра.

51) $AB = BE$, $CB = BD$ и $\angle ABC = \angle DBE$; слѣдовательно треугольники ABC и DBE равны.

52) $BD = CD$, $BE = CF$ (почему?) и $\angle DBE = \angle DCF$; слѣдовательно треугольники BDE и CDF равны.

53) $BE = BC$, $BD = BA$ и $\angle ABC$ общій; слѣдовательно треугольники EBD и CBA равны.

54) $AC + BC > AD + BD$,
$AC + AB > CD + BD$,
$AB + BC > AD + CD$, откуда
$2AB + 2AC + 2BC > 2AD + 2BD + 2CD$ или
$AB + AC + BC > AD + BD + CD$.
$AB < AD + BD$, $BC < BD + CD$, $AC < AD + CD$; откуда
$AB + BC + AC < 2AD + 2BD + 2CD$ или
$AB + BC + AC < 2(AD + BD + CD)$.

55) Прямая AD $\perp$ къ BC, прямая BE $\perp$ къ AC, прямая CF $\perp$ къ AB. Вслѣдствіе (42) $AF = BF$, $AE = CE$, $BD = CD$. Треугольники BEC и BFC равны, потому-что сторона BC общая, $BF = CE$ (почему?) и $\angle FBC = \angle ECB$ (почему?); слѣдовательно $CF = BE$. Треугольники AFC и ADC равны, потому-что сторона AC общая, $AF = CD$ (почему?) и $\angle FAC = \angle DCA$ (почему?); слѣдовательно $CF = AD$.

56) Проведя AH, получимъ треугольники ABH и AMH, изъ которыхъ имѣемъ $BH < AB + AH$ и $MH < AH + AM$; откуда $BH - MH < AH - AM$.

57) Треугольники BFD, CDE, AEF равны, потому-что $BF = BD = DC = CE = EA = AF$ и $\angle FBD = \angle DCE = \angle FAE$; слѣдовательно $DF = DE = EF$.

58) $CF = 31$ саж.

59) На $8^3/_4$ саж.

60) На прямой DB отложимъ отъ точки D часть DG, равную прямой DF, и проведемъ CG.

61) $18^1/_2$ саж.

62) $42^1/_2$ саж.

63) $AP = 41^1/_4$ саж.

64) Прямая $CF > 12^7/_8$ саж. и $CF < 18^3/_4$ саж.

65) $BD < BA$ и $BD < BC$, откуда $2BD < BA + BC$ и $BD < {}^1/_2(BA + BC)$.

66) Треугольники CDE и CDF равны, потому-что $CE = CF$, сторона CD общая и $DE = DF$; слѣдовательно $\angle CED = \angle CFD$.

67) $\angle GCD = \angle HCD$ и $\angle DCE = \angle DCF$; откуда $\angle GCD - \angle DCE = \angle HCD - \angle DCF$ или $\angle GCE = \angle HCF$.

68) Треугольники BEC и BDC равны, потому-что сторона BC общая, уг. $EBC =$ уг. DCB; слѣдовательно $BE = CD$, $BA = CA$ и $BA - BE = CA - CD$ или $EA = DA$.

69) Треугольники ACE и CAD равны, потому-что сторона AC общая, $AE = CD$ (почему?) и $\angle CAE = \angle ACD$; слѣдовательно $CE = AD$.

70) Треугольники AME и AMF равны, потому-что сторона AM общая, $AE = AF$; слѣдовательно $\angle EAM = \angle FAM$.

71) Образовавшіеся прямоугольные треугольники равны. Почему?

72) $\angle a = 53^0$, $\angle b = 127^0$, $\angle c = 127^0$, $\angle d = 53^0$, $\angle e = 53^0$, $\angle f = 127^0$, $\angle g = 53^0$.

73) $\angle c = 114^0 23'$.

74) Параллельны.

75) Не параллельны.

76) $MN = 87^5/_7$ саж.

77) $KM = 18^1/_6$ саж.

78) $\angle LMK = 37^0 15'$, $\angle KLM = 40^0 55'$, $\angle MKL = 101^0 50'$, $\angle MNL = 101^0 50'$.

79) $77^3/_4$ саж.

80) $55^5/_8$ саж.

81) $\angle DAB = \angle ABC$ (почему?), $\angle EAC = \angle ACB$ (почему?), $\angle ABC = \angle ACB$ (почему?); слѣдовательно $\angle DAB = \angle EAC$.

82) $\angle BGD = \angle AHE$; откуда ${}^1/_2 \angle BGD = {}^1/_2 \angle AHE$ или $\angle BGN = \angle AHP$, слѣдовательно прямыя GN и HP параллельны.

83) Прямая $AC \perp$ къ AB, а по-

тому она должна быть также $\perp$ къ прямой DE, параллельной къ AB; слѣдовательно $\angle ACD = \angle ACE = 90^0$ или $\angle ACB + \angle BCE = 90^0$.

84) Прямыя AB и GH, перпендикулярныя къ EF, || между собою; разстояніе между этими параллельными равно EG. Прямыя CD и GH также || и разстояніе между ними равно FG. Такъ какъ EG = FG, то всѣ точки прямой GH равно-отстоятъ отъ AB и CD.

85) Углы BAC и MNC соотвѣтствующіе, а углы BAD и AMN внутренніе на-крестъ лежащіе.

86) Треугольники BAD и CAE равны, потому-что AB = AC, BD = CE и $\angle ABD = \angle ACE$; слѣдовательно $\angle BAD = \angle CAE$. Треуг. ADE неравенъ треуг. ABD (почему?).

87) 60^0.

88) $52^0 12'$.

89) $53^0 42\frac{1}{2}'$.

90) $117^0 5'$.

91) $8^0 52\frac{1}{2}'$.

92) $100^0 50'$.

93) $92^0 15'$.

94) $\angle BAC = 64^0 43'$ и $\angle ABC = 90^0$.

95) $143^0 15'$.

96) $125^0 10'$.

97) $\angle ABC = \angle ACB = 47^0 25'$ и $\angle BAC = 84^0 10'$.

98) $56^0 15'$.

99) $22^0 12'$.

100) $\angle ABC = 68^0 28'$, $\angle ACB = 57^0 6'$.

101) $\angle ABC = 56^0 25'$, $\angle BAC = 75^0 47'$.

102) $\angle BAC = 51^0 17'$.

103) Проведя прямую BD, получимъ $\angle EBD + \angle BDE = ?$ и $\angle FBD + \angle BDF = ?$; откуда $\angle ABC + \angle EDF = ?$

104) $\angle CFD = \angle CGF + \angle GCF$; слѣдовательно $\angle CFD > \angle CGF$.

105) $\angle CAE = \angle ABC + \angle ACB$ или $\angle CAE = 2 \angle ACB$; слѣдовательно $\frac{1}{2} \angle CAE = \angle ACB$ или $\angle DAC = \angle ACB$ и прямая AD || къ BC.

106) Проведемъ прямую BD и продолжимъ ее до пересѣченія E съ стороною AC. Уголъ $ADE = \angle ABD + \angle BAD$ и $\angle CDE = \angle CBD + \angle BCD$; откуда $\angle ADE + \angle CDE = \angle ABD + \angle CBD + \angle BAD + \angle BCD$, слѣдовательно $\angle ADC > \angle ABC$.

107) Изъ вершины A опустимъ $\perp$ AE на основаніе BC. $\angle CAE = \frac{1}{2} \angle BAC$; $\angle BCD + \angle BCA = 90^0$ и $\angle CAE + \angle BCA = 90^0$; слѣдовательно $\angle BCD + \angle BCA = \angle CAE + \angle BCA$ или $\angle BCD = \angle CAE$ и $\angle BCD = \frac{1}{2} \angle BAC$.

108) Въ треуг. ABC $\angle BAC + \angle ACB = 90^0$; въ треуг. ABD

$\angle$ BAD + $\angle$ ABD = 90°; откуда $\angle$ BAC + $\angle$ ACB = $\angle$ BAD + $\angle$ ABD или $\angle$ ACB = $\angle$ ABD.

109) $\angle$ ABD = $\angle$ BAD, а потому AD = BD. $\angle$ BDC = $\angle$ ABD + $\angle$ BAC = 2$\angle$ BAC и $\angle$ ACB = 2$\angle$ BAC; слѣдовательно $\angle$ BDC = $\angle$ DCB и BC = BD.

110) $\angle$ BAC + $\angle$ ACB = 90° или 2$\angle$ ACB + $\angle$ ACB = 90° или 3$\angle$ ACB = 90°; откуда $\angle$ ACB = 30° и $\angle$ BAC = 60°. Построимъ $\angle$ CBD = $\angle$ BCA = 30°; тогда BD = DC, $\angle$ ABD = 60° и $\angle$ ADB = 60°. Изъ треуг. ABD получимъ AB = AD = BD; слѣдовательно BD = AD = DC или BD = ½AC.

111) Чрезъ точки A и B проведемъ прямую и на ней отъ B до D отложимъ часть, равную AB. Потомъ чрезъ D и C проведемъ прямую DE, и къ ней || прямыя AF и BG чрезъ A и B.

112) Къ прямой AB изъ ея средины возставимъ ⊥, равный CD, и его оконечность соединимъ съ A и B.

113) Прямою AD раздѣлимъ $\angle$ BAC на двѣ равныя части, и чрезъ A проведемъ EF ⊥ къ AD.

114) Соединимъ точки C и D, и къ прямой CD изъ ея средины E возставимъ перпендикуляръ до пересѣченія F съ AB.

115) Раздѣлимъ прямою BE уг. ABC на двѣ равныя части и чрезъ точку E ея пересѣченія съ катетомъ AC проведемъ CD || къ CB до пересѣченія D съ гипотенузою AB. Доказательство. $\angle$ CBE = $\angle$ DBE и $\angle$ CBE = $\angle$ BED; слѣдовательно $\angle$ DBE = $\angle$ BED и ED = BD.

116) Изъ A опустимъ ⊥ AD на MN и на его продолженіи отложимъ DE = AD. Чрезъ B и E проведемъ прямую до пересѣченія C съ MN, и наконецъ соединимъ A и C. Доказательство. Треугольники ADC и EDC равны, потому-что сторона CD общая, $\angle$ ADC = $\angle$ EDC и AD = DE; слѣдовательно $\angle$ ACD = $\angle$ ECD.

117) Чрезъ какую-нибудь точку D стороны AB проведемъ DG || къ EF до пересѣченія G съ BC. На GD отложимъ часть GH, равную EF, и чрезъ H проведемъ HK || къ BC до пересѣченія K съ AB. Чрезъ K проведемъ KL || къ HG до пересѣченія L съ BC.

118) Изъ какой-нибудь точки G прямой AB возставимъ къ этой прямой ⊥ GH, равный EF, и чрезъ H проведемъ прямую || къ AB. Изъ какой-нибудь точки K

прямой CD возставимъ къ этой прямой ⊥ KL, равный EF, и чрезъ L проведемъ прямую || къ CD. Точка M пересѣченія проведенныхъ прямыхъ удовлетворяетъ вопросу (почему?).

119) Чрезъ какую-нибудь точку E прямой AB проведемъ EM || къ CD. На AB и EM отложимъ равныя части EF и EG, и чрезъ F и G проведемъ прямую до пересѣченія H съ CD.

120) Соединимъ B и C, и средину M прямой BC соединимъ съ A. Почему перпендикуляры, опущенные изъ B и C на AM, равны?

121) Прямою BM раздѣлимъ ∠ ABC на двѣ равныя части, и къ ней ⊥ проведемъ DE чрезъ P.

122) Чрезъ P проведемъ прямую || къ BC до пересѣченія D съ AB, и отложимъ на AB часть DE = DB. Наконецъ чрезъ E и P проведемъ EF до пересѣченія съ BC. Для доказательства проведемъ DG || къ EF до пересѣченія G съ BC.

123) Изъ средины D прямой AB возставимъ ⊥ и еще ⊥ къ прямой FG изъ ея средины E. Точку H пересѣченія этихъ перпендикуляровъ соединимъ съ A, B, F, G.

124) Чрезъ P проведемъ PD || къ BC до пересѣченія D съ AB. На BC отложимъ часть BE, равную PD, и соединимъ P и E.

125) Изъ какой-нибудь точки F прямой BC возставимъ ⊥ и на немъ отложимъ FG = DE. Чрезъ G проведемъ GH || къ BC до пересѣченія H съ AB, и изъ H опустимъ ⊥ HK на BC.

126) Раздѣлимъ ∠ BAC прямою AE на двѣ равныя части, и чрезъ E проведемъ ED || къ BA. Доказательство. Уг. DAE = ∠ BAE, ∠ AED = ∠ BAE; слѣдовательно ∠ DAE = ∠ AED и ED = AD.

127) Проведемъ прямую AB и къ ней изъ точки A возставимъ ⊥. Всѣ прямыя, проведенныя чрезъ точки этого перпендикуляра || къ AB, удовлетворяютъ вопросу.

128) Прямою BF раздѣлимъ ∠ ABC на двѣ равныя части и прямою CF раздѣлимъ ∠ ACB на двѣ равныя части. Чрезъ F проведемъ DE || къ BC.

129) Чрезъ A проведемъ прямую AL || къ MN и на ней отложимъ AE = CD. Чрезъ B и E проведемъ BF до пересѣченія F съ MN, и чрезъ A прямую AG || къ BF.

130) 36 ар.

131) 12 ар.

132) $110^\circ 17'$.

133) 3472 доски.

134) 444 плиты.

135) Почти $3\frac{3}{4}$ пуда.

136) 112 каменьщиковъ.

137) 392 дерева.
138) Въ 172 ар.
139) 58 гвоздиковъ.
140) 200901 растеніе.
140a) 191 саж.
141) 37 саж.
142) 54 саж.
143) AD = BC = $24\frac{1}{2}$ саж.
144) FK = $66\frac{1}{8}$ саж., GL = $62\frac{7}{16}$ саж., EH = $69\frac{13}{16}$ саж.
145) $133\frac{1}{3}$ саж.
146) 540°, 900°, 1260°.
147) 120°, 150°, 165°.
148) 135°, $157\frac{1}{2}$°, $168\frac{3}{4}$°.
149) 16 угловъ.
150) 20 сторонъ.
151) 13 угловъ.
152) 16 сторонъ.
153) Точка E есть средина стороны AB и точка F есть средина стороны DC. Параллелограмы AEFD и BEFC равны, потому-что DF = EB = $\frac{1}{2}$DC = $\frac{1}{2}$AB, AD = BC, уг. ADF = уг. CBE.
154) Чрезъ O (фиг. 68) проведемъ EF между сторонами AB и DC; получимъ треуг. DOE = треуг. BOF, треуг. AOD = треуг. BOC, треуг. AOF = треуг. COE; слѣдовательно DOE + AOD + AOF = COE + BOC + BOF или ADEF = BCEF.
155) Чрезъ O (фиг. 68) проведена прямая EF между AB и DC. Треуг. AOF и EOC равны, а потому OF = OE.
156) ∠ ABC = ∠ CDF и ∠ ABC = ∠ ACB; слѣдовательно ∠ CDF = ∠ ACB и CF = DF. ∠ ACB = ∠ BDE и ∠ ACB = ∠ ABC; слѣдовательно ∠ BDE = ∠ ABC и BE = DE. Отсюда AF + FD + DE + AE = AF + FC + BE + EA = AC + AB.
157) Треугольники AEH, BEF, CGF, DGH равны (почему?).
158) Треуг. AEH, BEF, CGF, DGH равны (почему?). ∠ BEF + ∠ AEH = 90° (почему?). ∠ AEH + ∠ HEF + ∠ BEF = 180°; слѣдовательно ∠ HEF = 90°. Точно также узнаемъ, что ∠ EFG = ∠ FGH = ∠ EHG = 90°.
159) Въ (фиг. 74) проведя діагонали AC и BD, получимъ равные треугольники ABD и ABC.
160) Треугольники ABC и ADC равны (40); слѣдовательно ∠ BAC = ∠ DAC и ∠ BCA = ∠ DCA. Треугольники ABO и ADO равны (точка пересѣченія діагоналей AC и BD названа чрезъ O), потому-что сторона AO общая, AB = AD и ∠ BAO = ∠ DAO; слѣдовательно ∠ AOB = ∠ AOD = 90° и BO = DO.
161) Антипараллелограмъ ABCD дѣлится прямою EF на двѣ равныя трапеціи AEFD и BEFC, потому-что сторона EF общая,

DF = CF, AE = BE и AD = BC; слѣдовательно ∠ AEF = ∠ BEF и ∠ DFE = ∠ CFE. По равенству этихъ угловъ прямая EF перпендикулярна къ AB и DC.

162) Въ треуг. DEF уг. EDF (или ∠ BDA) = 45°; слѣдовательно и ∠ DFE = 45° и ED = EF. Такъ какъ ED = BD — BE, то EF = BD — AB.

163) ∠ GOC = ∠ BOE и ∠ COF = ∠ BOF; слѣдовательно ∠ GOC + ∠ COF = ∠ BOE + ∠ BOF или ∠ GOF = ∠ EOF. Отсюда мы заключаемъ, что діагонали HF и EG взаимно перпендикулярны; слѣдовательно EFGH ромбъ.

164) Параллелограмъ ABCD = AOB + DOC + AOD + BOC = 2AOB + 2BOC. Параллелограмъ EFGH = AEBO + CFBO + CGDO + AHDO = 2AOB + 2BOC + 2COD + 2AOD = 4AOB + 4BOC = 2ABCD.

165) Чрезъ F проведемъ FH || къ CA до точки H прямой DE; получимъ равные треугольники DFH и FCK (точка K на діагонали), потому-что DF = FC, уг. DFH = ∠ FCK и ∠ FDH = ∠ CFK; слѣдовательно FH = CK; но такъ какъ FH = KL (точка L на діагонали), то CK = KL. Треугольники ADL и CBK равны, потому-что AD = BC и ∠ DAL = ∠ BCK; слѣдовательно AL = CK.

166) Проведемъ DH || къ CA до точки H прямой BG. Треугольники BDE и DBH равны, потому-что сторона BD общая, ∠ BDH = ∠ BCA = ∠ DBE и ∠ BED = ∠ BHD = 90°; слѣдов. DE = BH. Прямая BG = BH + HG = DE + DF, потому-что HG = DF.

167) Должно возставить два перпендикуляра, равные AB, и соединить ихъ оконечныя точки.

168) Къ діагонали AB изъ ея средины C возставимъ ⊥ и на немъ отложимъ CD = CE = AC. Наконецъ проведемъ AD, DB, BE, EA.

169) Къ прямой AB изъ ея оконечныхъ точекъ возставимъ перпендикуляры, равные CD, и соединимъ ихъ оконечныя точки.

170) Къ прямой AB изъ ея средины O возставимъ ⊥ и на немъ отложимъ OE = OF = $^1/_2$CD. Наконецъ проведемъ AE, EB, BF, FA.

171) Соединимъ средину D прямой BC съ точкою A. Чрезъ A проведемъ прямую MN перпендикулярно къ DA и наконецъ изъ B и C опустимъ перпендикуляры на MN.

172) Изъ средины E прямой CD опустимъ ⊥ на AB и на этомъ перпендикулярѣ отложимъ EF

$= \frac{1}{2}m$. Чрезъ F проведя MN ∥ къ AB, опустимъ на MN перпендикуляры CG и DH. Доказательство. $\frac{1}{2}(CG + DH) = EF = \frac{1}{2}m$, откуда $m = CG + DH$.

173) Проходитъ. Почему?

174) 7,3 фута.

175) Не проходитъ. Почему?

176) $^{11}/_{32}$ окружности.

177) На $2^{7}/_{8}$ дюйма.

178) Пересѣкаются.

179) $^{7}/_{30}$ окружности.

180) Одна окружность находится внутри другой.

181) 1 футъ $7^{3}/_{4}$ дюйма.

182) Касаются изъ-внутри.

183) $9^{11}/_{15}$ дюйма и $4^{3}/_{15}$ дюйма.

184) Пересѣкаются.

185) $3^{1}/_{10}$ дюйма.

186) Касаются изъ-внѣ.

187) $^{7}/_{24}$ окружности.

188) $3^{33}/_{40}$ дюйма.

189) Проведя хорду CD (точка пересѣченія хорды AB съ окружностью C' названа чрезъ D), получимъ $\angle CDA = 90^0$ (см. 106); слѣдовательно (113) прямая CD раздѣляетъ хорду AB на двѣ равныя части.

190) Касательныя, проведенныя чрезъ оконечныя точки A и B діаметра AB, должны быть ⊥ къ нему; слѣдовательно они ∥ между собою.

191) Разстояніе $CO = AC = BC$. Почему?

192) Изъ центра O опустимъ перпендикуляръ OF на AB; тогда $AF = BF$ и $CF = DF$; слѣдов. $AF - CF = BF - DF$ или $AC = BD$.

195) Треуг. AOB, BOC, COD, AOD равны, потому-что $OB = OA = OD = OC$ и $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle DOA = 90^0$; слѣдов. $\angle BAO = \angle ABO = \angle CBO = \angle BCO = \angle DCO = \angle CDO = \angle ADO = \angle DAO = 45^0$ и $AB = BC = CD = AD$.

194) На прямой AB описавъ окружность и соединивъ точки D, E, F этой окружности съ A и B, получимъ прямоугольные треугольники ADB, AEB, AFB, имѣющіе общую гипотенузу AB и прямые углы ADB, AEB, AFB.

195) Углы ABD и ABE прямые, а если сумма двухъ смежныхъ угловъ равна двумъ прямымъ угламъ, то ихъ стороны DB и EB должны составлять одну прямую.

196) Если хорды AB и CD могли бы взаимно раздѣлиться на двѣ равныя части въ точкѣ E ихъ пересѣченія, то прямая OE, соединяющая центръ O съ E, была бы перпендикулярна къ AB и CD; чего быть не можетъ.

197) См. рѣшеніе задачи 132.

198) При какой-нибудь точкѣ D

прямой AB построимъ ∠ EDB = ∠ m и чрезъ C проведемъ CF параллельно къ ED.

199) Къ прямой EF изъ ея средины возставимъ ⊥, и изъ E радіусомъ AB опишемъ дугу, которая пересѣчетъ ⊥ въ O.

200) На радіусѣ OD отложимъ OC = AB, и чрезъ C проведемъ прямую ⊥ къ OD.

201) Къ прямой EF изъ ея средины C возставимъ ⊥ до пересѣченія D съ AB.

202) При точкѣ F стороны BC построимъ ∠ BFG = ∠ m, сдѣлаемъ FG = DE, чрезъ G проведемъ GH ‖ къ BC до пересѣченія H съ AB и чрезъ H проведемъ HK ‖ къ GF до пересѣченія K съ BC.

203) Изъ C опустимъ ⊥ CF на AB и отъ F на AB отложимъ FG = FH = $^1/_2$DE.

204) Изъ D опустимъ ⊥ DF на BC, раздѣлимъ ∠ BDF на двѣ равныя части прямою DE и изъ точки E пересѣченія прямыхъ DE и BC возставимъ ⊥ EG до пересѣченія G съ AB; тогда GD = GE.

205) Прямою BD раздѣлимъ ∠ ABC на двѣ равныя части, изъ E опустимъ ⊥ на BA, на немъ отложимъ EF = a, чрезъ F проведемъ FG ‖ къ AD до пересѣченія G съ BA и изъ G возставимъ ⊥ GH къ BA до пересѣченія H съ прямою BD.

206) Изъ центра O опустимъ на AB ⊥ OC, который пересѣчетъ окружность въ D. Къ OC изъ D возставимъ ⊥.

207) При точкѣ A прямой AB построимъ ∠ BAC = ∠ m, изъ центра O опустимъ ⊥ OD на AC и т. д. (см. задачу 203).

208) Изъ центра O опустимъ ⊥ OC на AB и на AB отъ C отложимъ CD = CE = $^1/_2 a$. Изъ D и E возставимъ къ AB перпендикуляры DF и EG до пересѣченія F и G съ окружностью и соединимъ F и G.

209) Проведемъ хорду AB = a и при B построимъ ∠ ABC = ∠ m. Изъ центра O опустимъ ⊥ OD на BC и на BC отложимъ DE = DF = $^1/_2 b$. Изъ E и F возставимъ перпендикуляры EG и FH къ BC до пересѣченія G и H съ окружностью. Наконецъ соединимъ G и H.

210) Прямою BD раздѣлимъ ∠ ABC на двѣ равныя части и изъ B къ BD возставимъ ⊥.

211) Чрезъ O проведемъ OG = AB и OH = CD, и соединимъ G и H. Изъ O радіусомъ EF опишемъ дугу такъ, чтобы она пересѣкла GH въ K, и соединимъ O и K.

212) Чрезъ точку E прямой AB проведемъ EF ‖ къ CD. Изъ E

опишемъ дугу GH, проведемъ хорду GH и продолжимъ ее до пересѣченія K съ CD. Къ прямой GL изъ ея средины L возставимъ $\perp$ LM.

213) Отъ A отложимъ двѣ равныя хорды AB и AC, проведемъ хорду BC, соединимъ ея средину D съ A, и изъ A возставимъ $\perp$ къ DA.

214) $39^0 5'$.

215) $59^0 5^5/_7{}'$.

216) 3,25 дюйм.

217) 3,25 дюйм.

218) 3,175 дюйм.

219) $85^0 52'$.

220) $4^3/_4$ дюйм.

221) $31^0 20^5/_{11}{}'$.

222) 6,9 фута.

223) 2 фута 7 дюйм.

224) Стороны AB и DE $\parallel$ и діагонали AE и BD равны.

225) Проведя CE, получимъ прямой $\angle$ CEB; слѣдовательно CE раздѣляетъ хорду AB на двѣ равныя части.

226) Потому-что разстояніе проведенной хорды отъ центра меньше разстоянія центра отъ какой-либо другой хорды, проходящей чрезъ P.

227) $\angle DEC = 2\angle ACE$, $\angle DCE = 180^0 - 4\angle ACE$, $\angle DCB = 180^0 - (\angle ACE + \angle DCE) = 180^0 - (\angle ACE + 180^0 - 4\angle ACE) = 180^0 - \angle ACE - 180^0 + 4\angle ACE = 3\angle ACE$.

228) Точки пересѣченія хордъ съ малою окружностью суть вершины прямоугольныхъ треугольниковъ, имѣющихъ общую гипотенузу CA; слѣдовательно прямыя, соединяющія центръ C съ точками пересѣченія хордъ и малой окружности, раздѣляютъ соотвѣтствующія хорды на двѣ равныя части.

229) Проведя радіусъ CD, получимъ $PD < PC + CD$ или $PD < PC + CA$ или $PD < PA$. Проведя радіусъ CE, получимъ $CE < CP + PE$ или $CP + PB < CP + PE$ или $PB < PE$.

230) Перпендикуляръ къ AB изъ D. Перпендикуляръ къ хордѣ CD изъ ея средины.

231) Вписанный $\angle ABC = \angle m$. Радіусы OD и OE перпендикулярны къ хордамъ AB и CB и т. д.

232) Къ AB перпендик. равный a, чрезъ его оконечность параллельная къ AB. Къ CD перпенд. равный a, чрезъ его оконечность параллельная къ CD. Въ пересѣченіи проведенныхъ прямыхъ искомый центръ.

233) На $AB = a$ опишемъ полуокружность и изъ A радіусомъ b дугу. Точку пересѣченія дуги съ окружностью соединимъ съ A и B. b) Построимъ $\angle$ ABC

$= \angle m$. Къ BC перпендикуляръ равный a. Чрезъ его оконечность параллельная къ BC до BA. Изъ полученной точки опустимъ $\perp$ на BC.

234) На $AB = a$ опишемъ полуокружность, изъ A къ AB $\perp$ $AC = b$, чрезъ C параллельную CD къ AB до пересѣченія съ окружностью и т. д.

235) Искомый центръ долженъ находиться на прямой, параллельной къ AB и отстоящей отъ AB на m; онъ долженъ также находиться на дугѣ, описанной изъ точки C радіусомъ m.

236) При A и B прямой AB построимъ углы, равные $\angle m$. *b*) Къ AB изъ A возставимъ $\perp$ AF и построимъ $\angle FAG = \frac{1}{2}m$. Изъ средины AB перпендикуляръ до пересѣченія съ AG и т. д. *c*) Построимъ $\angle DAE = \angle p$, на AE отложимъ $AB = m$, изъ B радіусомъ m опишемъ дугу до пересѣченія съ продолженной DA и т. д. *d*) Изъ C прямой $AC = n$ возставимъ $\perp$ и изъ A радіусомъ m опишемъ дугу до пересѣченія съ этимъ $\perp$.

237) На $AC = b$ опишемъ окружность, и изъ A и C двѣ дуги радіусомъ a такъ, чтобы они пересѣкали окружность. *b*) См. рѣшеніе № 233, *b*.

238) Изъ A радіусомъ m опишемъ окружность и изъ B радіусомъ n еще окружность. Общая касательная, проведенная къ этимъ окружностямъ, удовлетворяетъ вопросу.

239) Изъ F какой-нибудь прямой MN возставимъ $\perp$ $FD = m$, при D построимъ $\angle FBD$, равный $^1/_6$ прямаго угла (см. 144). Къ BD изъ ея средины G $\perp$ GA до пересѣченія A съ DF. Соединимъ A и B. Доказательство. $\angle BAF = {}^1/_3$ прямаго $\angle$; слѣдов. $\angle ABF = {}^2/_3$ прямаго $\angle$. Отложивъ $FC = BF$ и проведя AC, получимъ треуг. ACF = треуг. ABF; слѣдов. $\angle CAF = {}^1/_3$ прямаго $\angle$ и $\angle ACF = {}^2/_3$ прямаго $\angle$.

240) Чрезъ B и центръ C проведемъ центральную линію. Изъ средины D хорды AB возставимъ $\perp$ DC′ до пересѣченія C′ съ центральною линіею.

241) На $AB = a$ построимъ $\angle BAC = \angle m$ и сдѣлаемъ $AC = a$. Проведемъ CD $\parallel$ къ AB и BD $\parallel$ къ AC. *b*) Сдѣлаемъ $AD = b$ и изъ A и D опишемъ дуги радіусомъ a и т. д. *c*) Чрезъ A прямой $AD = b$ проведемъ MN $\perp$ къ AD. Построимъ $\angle MAC = \angle NAB = {}^1/_2 \angle m$. Чрезъ D проведемъ KL $\perp$ къ AD и построимъ уг. $KDC = \angle LDB = {}^1/_2 \angle m$ и т. д. *d*) Къ $AB = a$ проведемъ $\perp$ h. Изъ A радіусомъ a

опишемъ дугу до пересѣченія съ h. Чрезъ эту точку пересѣченія параллельная къ AB и т. д.

242) Чрезъ C и центръ O проведемъ центральную линію и къ ней чрезъ C ⊥ до пересѣченія H съ AB. Раздѣлимъ на двѣ равныя части ∠ AHC прямою HP, которая пересѣчетъ центральную линію въ P; точка P центръ искомой окружности.

243) Центръ искомой окруж. долженъ находиться на ⊥ къ CD изъ E; онъ также находится на прямой, раздѣляющей на двѣ равныя части уголъ, составляемѣй данными прямыми.

244) Изъ какой-нибудь точки прямой AB $= a$ возставимъ ⊥ h и и чрезъ его оконечность проведемъ || къ AB. Изъ A радіусомъ b опишемъ дугу до проведенной параллельной. b) См. рѣшеніе (a) задачи 244. c) При O какой-нибудь прямой MN построимъ ∠ MOK = ∠ NOL = ∠ m. Потомъ отложимъ OA= OC= $^1/_2c$ и OB=OD= $^1/_2c$ и т. д. d) Изъ какой-нибудь точки произвольной прямой MN возставимъ ⊥ $^1/_2h$. Изъ оконечности этого ⊥ опишемъ дугу радіусомъ $^1/_2c$ и еще дугу радіусомъ $^1/_2d$. Между точками A и B пересѣченія этихъ дугъ съ MN опредѣлится сторона параллелограма и т. д.

245) Продоливъ прямыя CD и EF до ихъ пересѣченія G, раздѣлимъ ∠ DGF на двѣ равныя части прямою GH, которая пересѣкаетъ AB въ точкѣ H. Изъ H опишемъ окружность радіусомъ, равнымъ разстоянію точки H отъ CD.

246) При B прямой AB $= a$ построимъ ∠ ABM $= m$. На BA отложимъ BC $= b$ и чрезъ C проведемъ CN || къ BM. Изъ A радіусомъ c опишемъ дугу до пересѣченія съ CN и т. д. b) При A и B прямой AB $= a$ построимъ ∠ BAM $= n$ и ∠ ABN $= m$. На AB отъ B до C отложимъ b и чрезъ C проведемъ CD до пересѣченія D съ AM. Чрезъ D проведемъ прямую до пересѣченія съ BN.

247) Къ AB $= a$ изъ средины F возставимъ ⊥. На немъ (подъ AB) отложимъ FD $= p$ и соединимъ D и B. Къ DB изъ средины G возставимъ ⊥ до пересѣченія C съ первымъ ⊥. Соединимъ C съ A и B. Доказательство. CD=CB, CD—CF =CB—CF и т. д.

248) При A прямой AB $= a$ построимъ ∠ BAE $= m$, на AE отъ A до D отложимъ p и соединимъ B и D. Изъ средины F прямой BD возставимъ ⊥ до пересѣченія E съ AE, и соединимъ B и E. Треугольникъ ABE

удовлетворяетъ вопросу, потому-что $p = AD = AE - DE = AE - BE$.

249) Изъ точекъ C и D прямой CD радіусомъ AB опишемъ дуги, пересѣкающіяся въ точкѣ E. Къ CE изъ ея средины возставимъ $\perp$ и къ DE изъ ея средины возставимъ $\perp$. Пересѣченіемъ этихъ перпендикуляровъ опредѣлится центръ искомой окружности.

250) Изъ B къ $AB = p$ возставимъ $\perp$ *a*. Соединимъ A и C, и изъ средины D прямой AC возставимъ $\perp$ до пересѣченія E съ AB. Соединимъ C и E.

251) На $AB = p$ построимъ $\angle CAB = \frac{1}{2} \angle m$ и $\angle CBA = \frac{1}{2} \angle m$. При C на AC построимъ $\angle ACD = \frac{1}{2} \angle m$ и на BC $\angle BCE = \frac{1}{2} \angle m$. Треугольникъ CDE удовлетворяетъ вопросу. Доказательство. $AD = CD$, потому-что $\angle ACD = \angle CAD$; $BE = CE$, потому-что $\angle BCE = \angle CBE$; $\angle CDE = \angle CAD + \angle ACD = \angle m$ и $\angle CED = \angle CBE + \angle BCE = \angle m$.

252) При A прямой $AB = p$ построимъ $\angle CAB = \frac{1}{2}m$, и при B $\angle CBA = \frac{1}{2}n$. При C прямой AC построимъ $\angle ACD = \frac{1}{2}m$ и на BC $\angle BCE = \frac{1}{2}n$. Треугольникъ DCE удовлетворяетъ вопросу.

253) На BC отъ B до F отложимъ *m*. Соединимъ D и F, и къ DF изъ G возставимъ $\perp$ GE до пересѣченія E съ BC. Соединимъ D и E; тогда $DE + BE = m$. Почему?

ОГЛАВЛЕНІЕ.

ЧАСТЬ I.

ОТДѢЛЪ I.

Прямыя линіи.

ОТДѢЛЪ II.

Окружность круга.

ОШИБКИ И ОПЕЧАТКИ.

Стран.	Стр.	Напечатано.	Должно быть.
105	7 сверху	данною съ окружностью	съ данною окружностью
25		въ фиг. 28 пропущена прямая GH.	
81		въ фиг. 81 пропущены радіусы CA и C′A.	

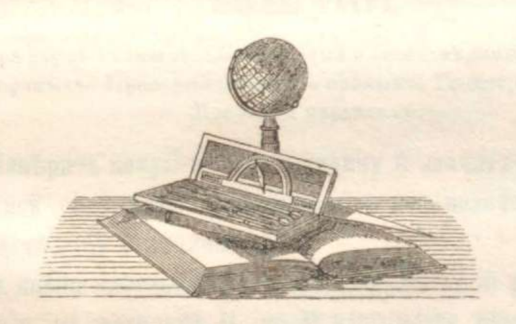
НАЧАЛЬНЫЯ ОСНОВАНІЯ
ГЕОМЕТРІИ

и

СОБРАНІЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХЪ ЗАДАЧЪ.

сочиненіе

А. ЛЁВЕ.



ЧАСТЬ II.

ПЛАНИМЕТРІЯ.



С.-ПЕТЕРБУРГЪ.
Въ типографіи Ретгера и Шнейдера, Невскій просп. № 5.
1868.

Начальныя основанія Геометріи.

ЧАСТЬ II.

ПЛАНИМЕТРІЯ.

ОТДѢЛЪ I.

ПОДОБІЕ ФИГУРЪ.

ПЕРВАЯ ГЛАВА.

Общая мѣра двухъ прямыхъ. Соизмѣримыя и несоизмѣримыя прямыя. Отношеніе двухъ прямыхъ. Пропорціональность прямыхъ. Геометрическія пропорціи. Понятіе о предѣлахъ.

1. Измѣрить какую-нибудь величину А значитъ: узнать, сколько разъ въ ней содержится однородная съ нею величина a или какая-нибудь часть этой величины a.

Если какая-нибудь величина М содержится m разъ въ величинѣ А и n разъ въ величинѣ В, то М называется *общею мѣрою* величинъ А и В. Двѣ однородныя величины, имѣющія общую мѣру, называются *соизмѣримыми*. Двѣ однородныя величины называются *несоизмѣримыми*, если для нихъ не существуетъ никакой общей мѣры.

2. Чтобы найти общую мѣру двухъ прямыхъ АВ и CD (фиг. 127), отложимъ CD на АВ столько разъ, сколько возможно; тогда узнаемъ, что прямая

Фиг. 127.

A E C B
C F D

CD содержится въ AB два раза и получится еще остатокъ EB; слѣдовательно AB = 2CD + EB... (1). Потомъ отложимъ EB на CD столько разъ, сколько возможно. Такъ какъ EB содержится въ CD два раза и получается еще остатокъ FD, то CD = 2EB + FD.... (2). Отложивъ второй остатокъ FD на первомъ остаткѣ EB, мы узнаемъ, что EB = FD + GB... (3). Отложимъ третій остатокъ GB на второмъ FD; получимъ FD = 3GB безъ остатка.

Теперь докажемъ, что послѣдній остатокъ GB есть общая мѣра прямыхъ AB и CD. Для этого подставимъ 3GB вмѣсто FD въ выраженіе (3); получимъ EB = 3GB + GB = 4GB. Потомъ подставимъ въ выраженіе (2) 4GB вмѣсто EB и 3GB вмѣсто FD; получимъ CD = 2. 4GB + 3GB = 11GB. Наконецъ подставимъ въ выраженіе (1) 11GB вмѣсто CD и 4GB вмѣсто EB; получимъ AB = 2. 11GB + 4GB = 26GB. Такъ какъ прямая GB содержится въ данныхъ прямыхъ цѣлое число разъ, то она должна быть ихъ общею мѣрою.

Отсюда слѣдуетъ: чтобы найти общую мѣру двухъ прямыхъ, должно отложить меньшую изъ нихъ на большей столько разъ, сколько возможно; потомъ должно отложить первый остатокъ на меньшей прямой столько разъ, сколько возможно, второй остатокъ на первомъ, третій остатокъ на второмъ и т. д. Если послѣдній остатокъ помѣщается въ предшествующемъ остаткѣ цѣлое число разъ, то послѣдній остатокъ есть общая мѣра данныхъ прямыхъ. Если же при этомъ дѣйствіи невозможно дойти до такого остатка, который содержался бы цѣлое число въ предшествующемъ остаткѣ, то значитъ: данныя прямыя не имѣютъ общей мѣры, т. е. они несоизмѣримы.

Этимъ-же самымъ способомъ возможно найти общую мѣру двухъ дугъ окружности.

3. Положимъ, что при опредѣленіи общей мѣры двухъ прямыхъ A и B найдено, что B содержится n разъ въ A съ остаткомъ R, т. е. $A = nB + R$, и что R содержится n' разъ въ B съ остаткомъ R', R' содержится n'' разъ въ R съ остаткомъ и т. д. Изъ выраженія $A = nB + R$ легко вывести, что оста-

токъ R всегда долженъ быть меньше $\frac{A}{2}$. Въ самомъ дѣлѣ, если B меньше $\frac{A}{2}$, то по большей причинѣ остатокъ R долженъ быть меньше $\frac{A}{2}$, а если B больше $\frac{A}{2}$, то разность $A - nB = R$ обратится въ разность $A - B = R$, которая должна быть меньше $\frac{A}{2}$. Точно такимъ-же образомъ изъ выраженій $B = n'R + R'$, $R = n''R' + R''$ и т. д. выводится $R' < \frac{R}{2}$, $R'' < \frac{R'}{2}$ и т. д.; слѣдовательно $R' < \frac{A}{4}$, $R'' < \frac{A}{8}$ и т. д. Отсюда мы видимъ, что каждый изъ полученныхъ остатковъ меньше предшествующаго ему остатка; слѣдовательно если при отъисканіи общей мѣры двухъ прямыхъ не получается остатокъ, равный нулю, то продолжая дѣйствіе какъ угодно далеко, мы всегда можемъ получить остатокъ, который будетъ меньше всякой величины.

4. Положимъ, что общая мѣра M двухъ однородныхъ величинъ A и B содержится m разъ въ A и n разъ въ B, т. е. $A = mM$ и $B = nM$; отсюда получимъ $\frac{A}{B} = \frac{mM}{nM}$ или $\frac{A}{B} = \frac{m}{n}$. Дробь $\frac{m}{n}$ называется *отношеніемъ* величинъ A и B. Отношеніе двухъ соизмѣримыхъ однородныхъ величинъ A и B опредѣляется раздѣленіемъ числа m, показывающаго, сколько разъ общая мѣра M содержится въ A, на число n, выражающее, сколько разъ общая мѣра M повторяется въ B. Если $m = 25$ и $n = 8$, то $A = 25M$, $B = 8M$, общая мѣра $M = \frac{B}{8}$ и слѣдовательно $A = {}^{25}/_{8}B$, гдѣ дробь ${}^{25}/_{8}$ выражаетъ отношеніе между величинами A и B. Для данныхъ прямыхъ AB и CD (2) мы нашли общую мѣру GB и узнали, что $AB = 26GB$ и $CD = 11GB$. Отсюда получимъ $GB = {}^{1}/_{11}CD$ и $AB = {}^{26}/_{11}CD$; слѣдовательно отношеніе между прямыми AB и CD равно ${}^{26}/_{11}$.

5. Отношеніе двухъ несоизмѣримыхъ величинъ A и B можетъ быть выражено только съ приближенною точностью. Въ самомъ дѣлѣ, если предположимъ, что величина B раздѣлена на n равныхъ частей и взято 1, 2, 3, 4...... этихъ частей, то получится слѣдующій рядъ

$$\frac{1}{n}\text{B}, \frac{2}{n}\text{B}, \frac{3}{n}\text{B} \ldots\ldots \frac{k}{n}\text{B}, \frac{k+1}{n}\text{B};$$

въ этомъ ряду возможно опредѣлить двѣ величины $\frac{k}{n}$B и $\frac{k+1}{n}$B, между которыми находится величина A; слѣдовательно A $> \frac{k}{n}$B и A $< \frac{k+1}{n}$B. Назвавъ чрезъ x приближенное отношеніе величинъ A и B, изъ послѣднихъ неравенствъ получимъ $x > \frac{k}{n}$ и $x < \frac{k+1}{n}$ или $x < \frac{k}{n} + \frac{1}{n}$. Взявъ вмѣсто x одну изъ дробей $\frac{k}{n}$ или $\frac{k+1}{n}$, мы дѣлаемъ ошибку, которая меньше $\frac{1}{n}$. Погрѣшность $\frac{1}{n}$ зависитъ отъ числа n, т. е. она будетъ тѣмъ меньше, чѣмъ больше число n, а потому мы можемъ ее сдѣлать меньше всякой величины.

Примѣчаніе. Увеличеніемъ знаменателя n возможно привести дробь $\frac{1}{n}$ такъ близко къ нулю, какъ угодно. Въ самомъ дѣлѣ, если взять весьма малую дробь $\frac{p}{q} = \frac{1}{\frac{q}{p}}$, близко подходящую къ нулю, и сдѣлать $n > \frac{q}{p}$, то получится дробь $\frac{1}{n}$, которая будетъ меньше $\frac{1}{\frac{q}{p}}$.

6. Если отношеніе отрѣзковъ AC и CB прямой AB (фиг. 128) равно отношенію какихъ-нибудь чиселъ m и n, то *прямая* AB *раздѣлена точкою* C *на двѣ части, пропорціональныя даннымъ числамъ*.

Фиг. 128.

Чтобы раздѣлить прямую AB на двѣ части, пропорціональныя, напримѣръ, числамъ 5 и 3, мы раздѣлимъ ее на 5 + 3 или 8 равныхъ частей и отдѣлимъ 5 такихъ частей отъ A до C и 3 части отъ C до B. Отсюда мы заключаемъ, *что между* A *и* B *существуетъ только одна точка* C, *раздѣляющая прямую* AB *на части, пропорціональныя даннымъ числамъ*.

Предложенный вопросъ можетъ быть выраженъ слѣдующимъ обра-

зомъ: *найти на прямой* AB *такую точку, которой разстоянія отъ точекъ* A *и* B *были бы пропорціональны числамъ* 5 *и* 3. Этотъ вопросъ допускаетъ два рѣшенія. Первымъ рѣшеніемъ опредѣляется точка C по предъидущему. Для втораго рѣшенія мы раздѣлимъ разстояніе AB на 5 — 3 или 2 равныя части и отложимъ 3 такія части отъ B до D на продолженіи прямой AB; тогда прямая AD раздѣлится на 2 + 3 или 5 равныхъ частей, и отношеніе разстояній DA и DB точки D отъ оконечныхъ точекъ A и B прямой AB равно отношенію чиселъ 5 и 3; слѣдовательно точка D также удовлетворяетъ заданному вопросу. Этимъ дѣйствіемъ *прямая* AB *раздѣлилась точками* C *и* D *на пропорціональныя части.*

7. Вообще если отношеніе двухъ однородныхъ величинъ A и B равно отношенію двухъ другихъ однородныхъ величинъ C и D, то эти равныя отношенія составляютъ пропорцію $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$, которая произносится: A относится къ B точно такъ, какъ C относится къ D. Иногда пропорція изображается еще въ слѣдующемъ видѣ

$$A:B=C:D.$$

Если въ пропорціи A, B, C, D суть величины однородныя, то величина D называется *четвертою пропорціональною* величинъ A, B и C.

Въ пропорціи $\frac{A}{B}=\frac{B}{D}$ величина B называется *среднею геометрическою* между A и D, а величина D есть *третья пропорціональная* величинъ A и B.

8. Положимъ, что общая мѣра m величинъ A и B содержится a разъ въ A и b разъ въ B, и общая мѣра n содержится c разъ въ C и d разъ въ D; тогда отношеніе величинъ A и B выразится чрезъ $\frac{a}{b}$ и отношеніе величинъ C и D равно $\frac{c}{d}$. Если отношенія $\frac{A}{B}$ и $\frac{C}{D}$ равны, то получимъ *численную* пропорцію $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. Всякая пропорція $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ состоитъ изъ четырехъ членовъ a, b, c, d. Члены

a и c суть *предъидущіе*, члены b и d — *послѣдующіе*, члены a и d — *крайніе*, члены b и c — *средніе*.

9. Помноживъ равныя дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ на произведеніе ихъ знаменателей, получимъ $\frac{abd}{b} = \frac{cbd}{d}$; откуда выводится $ad = cb$ [1]) . . . . (1), т. е. *во всякой пропорціи произведеніе крайнихъ членовъ равно произведенію среднихъ членовъ*.

10. Во всякой пропорціи $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ возможно переставить ея члены такимъ образомъ, чтобы образовались новыя пропорціи, въ которыхъ произведеніе ad должно равняться bc. На этомъ основаніи всякая порпорція можетъ быть представлена въ восьми видахъ

$$\left.\begin{array}{ll} \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, & \frac{c}{a} = \frac{d}{b}, \\ \frac{a}{c} = \frac{b}{d}, & \frac{c}{d} = \frac{a}{b}, \\ \frac{b}{a} = \frac{d}{c}, & \frac{d}{c} = \frac{b}{a}, \\ \frac{b}{d} = \frac{a}{c}, & \frac{d}{b} = \frac{c}{a}. \end{array}\right\} \ldots\ldots (2).$$

11. Изъ пропорціи $\frac{a}{b} = \frac{x}{d}$, въ которой третій членъ неизвѣстенъ получимъ (по форм. 1) $bx = ad$, откуда $x = \frac{ad}{b}$ . . . . . (3), т. е. *чтобы опредѣлить неизвѣстный среднія членъ пропорціи, должно раздѣлить произведеніе крайнихъ членовъ на извѣстный средній членъ*.

Изъ пропорціи $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$, въ которой крайній членъ неизвѣстенъ, получимъ (по форм. 1) $ax = bc$, откуда $x = \frac{bc}{a}$ . . . . . (4), т. е. *чтобы опредѣлить неизвѣстный крайній членъ*, *должно*

---

[1]) Въ послѣдствіи часто будетъ говорено о *произведеніи двухъ линій*. Это выраженіе принимается въ томъ смыслѣ, что взято произведеніе чиселъ, показывающихъ, сколько разъ общая мѣра содержится въ данныхъ линіяхъ.

раздѣлить произведеніе среднихъ членовъ на извѣстный крайній членъ.

Изъ *непрерывной* пропорціи $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ получимъ (по форм. 1) $b^2 = ac$ и $b = \sqrt{ac}$ ..... (5), т. е. *средняя геометрическая двухъ чиселъ равна корню квадратному изъ произведенія этихъ чиселъ.*

12. Изъ пропорцій $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ и $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$ получимъ $\frac{c}{d} = \frac{m}{n}$, (потому-что двѣ величины, равныя третьей, равны между собою), т. е. *если въ двухъ пропорціяхъ первыя отношенія равны, то изъ вторыхъ отношеній составится новая пропорція.*

Такимъ-же образомъ изъ пропорцій $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ и $\frac{m}{n} = \frac{c}{d}$, въ которыхъ вторыя отношенія равны, составится изъ первыхъ отношеній пропорція $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$.

Въ пропорціяхъ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ и $\frac{a}{m} = \frac{c}{n}$, въ которыхъ предъидущіе члены равны, переставивъ средніе члены, получимъ пропорціи $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ и $\frac{a}{c} = \frac{m}{n}$ (см. форм. 2); въ нихъ первыя отношенія равны, а потому по доказанному образуется пропорція $\frac{b}{d} = \frac{m}{n}$; слѣдовательно *если въ двухъ пропорціяхъ предъидущіе члены равны, то изъ послѣдующихъ членовъ составится новая пропорція.*

Такимъ-же образомъ изъ пропорцій $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ и $\frac{m}{b} = \frac{n}{d}$, въ которыхъ послѣдующіе члены равны, составится изъ предъидущихъ членовъ пропорція $\frac{a}{c} = \frac{m}{n}$.

13. Къ равнымъ произведеніямъ $ad = bc$, полученнымъ изъ пропорціи $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, приложимъ bd; составятся равныя суммы $ad + bd = bc + bd$ или $(a+b)d = (c+d)b$. Раздѣливъ послѣднее равенство на bd, получимъ равныя частныя $\frac{(a+b)d}{bd} = \frac{(c+d)b}{bd}$ или $\frac{a+b}{b} =$

$\frac{c+d}{d}$. Наконецъ въ послѣдней пропорціи переставивъ средніе члены, получимъ $\frac{a+b}{c+d} = \frac{b}{d} \cdots\cdots (5)$.

Вычтя bd изъ равныхъ произведеній $ad = bc$, получимъ по предъидущему $\frac{a-b}{c-d} = \frac{b}{d} \cdots\cdot (6)$.

Въ данной пропорціи $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ переставивъ средніе члены, получимъ пропорцію $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, второе отношеніе которой равно второму отношенію пропорціи (5); слѣдовательно по предъидущему получится $\frac{a+b}{c+d} = \frac{a}{c} \cdots\cdot (7)$.

Сравнивъ образовавшуюся пропорцію $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ съ пропорціею (6), получимъ $\frac{a-b}{c-d} = \frac{a}{c} \cdots\cdot (8)$.

Пропорціи (5, 6, 7, 8) выражаются слѣдующимъ образомъ: *сумма или разность членовъ a и b перваго отношенія относится къ суммѣ или разности членовъ c и d втораго отношенія точно такъ, какъ первый (или второй) членъ перваго отношенія относится къ первому (или ко второму) члену втораго отношенія.*

14. Къ равнымъ произведеніямъ $ad = bc$, выведеннымъ изъ пропорціи $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, приложимъ ab; получимъ равныя суммы $ad + ab = bc + ab$ или $(a+c)b = (b+d)a$. Раздѣливъ послѣднее равенство на ab, получимъ равныя частныя $\frac{(a+c)b}{ab} = \frac{(b+d)a}{ab}$ или $\frac{a+c}{a} = \frac{b+d}{b}$. Наконецъ въ послѣдней пропорціи переставивъ средніе члены, получимъ $\frac{a+}{b+d} = \frac{a}{b} \cdots\cdot (9)$.

Сравнивъ пропорцію (9) съ данною пропорціею $\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$, получимъ $\frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d} \cdots\cdot (10)$.

Вычтемъ изъ ab произведеніе ad и равное ему произведеніе bc; получимъ равныя разности $ab - ad = ab - bc$ или $a(b-d) =$

$b(a-c)$; откуда $\frac{b(a-c)}{ab}=\frac{a(b-d)}{ab}$ или $\frac{a-c}{a}=\frac{b-d}{b}$ или $\frac{a-c}{b-d}=\frac{a}{b}\cdots\cdots(11)$.

Сравнивъ данную пропорцію съ пропорціею (11), получимъ $\frac{a-c}{b-d}=\frac{c}{d}\cdots\cdot(12)$.

Пропорціи (9, 10, 11, 12) выражаются слѣдующимъ образомъ: *сумма или разность предъидущихъ членовъ a и c относится къ суммѣ или разности послѣдующихъ членовъ b и d точно такъ, какъ одинъ предъидущій членъ относится къ своему послѣдующему.*

15. Изъ пропорцій $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, $\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$, $\frac{e}{f}=\frac{m}{n}$ составится рядъ равныхъ отношеній

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{m}{n}.$$

Предположимъ, что каждое изъ этихъ отношеній равно p; получимъ $a=bp$, $c=dp$, $e=fp$, $m=np$. Сложивъ эти равенства почленно, получимъ

$$a+c+e+m=(b+d+f+n)p \text{ или}$$

$$\frac{a+c+e+m}{b+d+f+n}=p=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{m}{n}\cdots(13);$$

т. е. *въ ряду равныхъ отношеній сумма предъидущихъ членовъ относится къ суммѣ послѣдующихъ членовъ точно такъ, какъ одинъ изъ предъидущихъ членовъ относится къ своему послѣдующему.*

Въ пропорціяхъ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, $\frac{b}{m}=\frac{e}{f}$, $\frac{m}{b}=\frac{k}{h}$ число b есть четвертая пропорціональная чиселъ a, c, d, чиселъ m, e, f и чиселъ m, k, h. Перемноживъ дроби $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{m}$, $\frac{m}{b}$ и равныя имъ дроби $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$, $\frac{k}{h}$, получимъ равныя произведенія

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{m}\cdot\frac{m}{b}=\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}\cdot\frac{k}{h} \text{ или}$$

$$\frac{abm}{bmb}=\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}\cdot\frac{k}{h} \text{ или } \frac{a}{b}=\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}\cdot\frac{k}{h}\cdots(14).$$

Возьмемъ пропорцію $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ и возвысивъ дробь $\frac{a}{b}$ въ степень n и потомъ дробь $\frac{c}{d}$ въ ту-же степень, получимъ равенство

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\left(\frac{c}{d}\right)^n$$

$$\text{или } \frac{a^n}{b^n}=\frac{c^n}{d^n} \cdots (15);$$

слѣдовательно *въ пропорціи можно возвысить члены въ какую угодно степень.*

Всякая пропорція $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ выражаетъ равенство двухъ дробей. Если изъ этихъ равныхъ дробей извлечь корень той-же самой степени, то получится равенство

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\sqrt[n]{\frac{c}{d}} \text{ или}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\frac{\sqrt[n]{c}}{\sqrt[n]{d}} \ldots (16);$$

слѣдовательно *изъ членовъ всякой пропорціи можно извлечь корень какой угодно степени.*

16. По предъидущему извѣстно, что прямая AB (фиг. 127) раздѣлена точками C и D на пропорціональныя части. На оборотъ: точки A и B раздѣляютъ прямую CD на пропорціональныя части, потому-что изъ пропорціи $\frac{CA}{CB}=\frac{DA}{DB}$ выводится пропорція $\frac{AC}{AD}=\frac{BC}{BD}$, которая удовлетворяетъ обратному вопросу.

Прямая AB (фиг. 129) раздѣлена точкою C на части, пропорціональныя числамъ m и n, и на AB отложена часть AD, равная BC; тогда части BD и AC должны быть равны и точка D раздѣляетъ прямую AB на части AD и DB *обратно* пропорціональныя

Фиг. 129.

числамъ m и n, потому-что отношеніе $\frac{AD}{BD}$ равно обращенной дроби $\frac{AC}{BC} = \frac{m}{n}$.

17. Если какая-нибудь величина A, постепенно увеличиваясь или уменьшаясь, все болѣе и болѣе приближается къ постоянной величинѣ P, но не достигаетъ ея, то величина P называется *предѣломъ перемѣнной величины* A.

Представимъ себѣ двѣ постоянныя величины M и N, которыхъ разность меньше всякой произвольно малой величины, и что между ними находятся двѣ величины A и B; тогда $M > A$, $M > B$, $N < A$ и $N < B$. Предположимъ, что $A > B$ или $A - B = x$. Такъ какъ расность $M - N$ можетъ быть меньше всякой произвольно малой величины, то возможно допустить $M - N < x$. Вычтя по-членно неравенство $N < B$ изъ неравенства $M < A$, получимъ $M - N > A - B$, потому-что уменьшаемое M больше уменьшаемаго A и вычитаемое N меньше вычитаемаго B. Въ образовавшемся неравенствѣ замѣнимъ разность $A - B$ равною ей величиною x; получимъ $M - N > x$. Послѣднее неравенство противорѣчитъ заданію, вслѣдствіе котораго разность $M - N$ должна быть меньше x. Отсюда мы заключаемъ, что величина A не можетъ быть больше B. Точно такимъ-же образомъ доказывается, что величина A не можетъ быть меньше B. Такъ какъ величина A не можетъ быть ни больше B и ни меньше B, то величины A и B должны быть равны между собою. Отсюда слѣдуетъ: *если двѣ перемѣнныя величины* A *и* B *находятся между предѣлами* M *и* N, *которыхъ разность меньше всякой произвольно малой величины, то эти перемѣнныя должны быть равны между собою.*

ЗАДАЧИ.

1) Сколько разъ общая мѣра m содержится въ прямыхъ AB и CD, когда извѣстно, что CD содержится 3 раза въ AB съ остаткомъ, остатокъ содержится 2 раза въ CD съ остаткомъ и второй остатокъ содержится въ первомъ 3 раза?

2) При опредѣленіи общей мѣры двухъ прямыхъ AB и CD найдено: AB = 4,325 дюйма и четвертый остатокъ равенъ 0,35 дюйма. Вѣренъ-ли этотъ остатокъ?

3) Съ какою точностью выразится отношеніе между несоизмѣримыми прямыми AB и CD, если AB = 6 саж., CD $>$ 11,312 саж. и CD $<$ 11,313 саж.?

4) Отношеніе между сторонами AB и AC треугольника ABC равно $^{11}/_{15}$ и AB = 187 саж. Сколько сажень содержитъ сторона AC?

5) Прямая AB раздѣлена точкою C на отрѣзки AC = 4,3 дюйма и CB; отношеніе между этими отрѣзками равно $^{5}/_{3}$. Сколько дюймовъ содержитъ прямая AB?

6) Прямая AB раздѣлена точкою C на отрѣзки AC и CB, отношеніе между прямыми AB и AC равно $^{7}/_{3}$ и отрѣзокъ CB = $3\frac{1}{2}$ дюйма. Сколько дюймовъ содержитъ отрѣзокъ AC?

7) Прямая AB раздѣлена точкою C на отрѣзки AC и CB = $^{15}/_{52}$AB и точкою D на отрѣзки AD = BC и DB. Какимъ числамъ обратно пропорціональны отрѣзки AD и DB?

8) Прямая AC = 6,5 дюйма (фиг. 128) и CB = 2,4 дюйма. На сколько дюймовъ отъ B должна отстоять точка D, раздѣляющая прямую AB въ такомъ-же отношеніи, въ какомъ прямая AB раздѣлена точкою C?

9) Прямая CD = 8,5 дюйм., AB = 4 дюйм. и AC = 2,7 дюйм. (фиг. 128). Опредѣлить разстояніе BD.

10) Прямая AB = 17 аршинамъ (фиг. 129), AC = $9\frac{3}{4}$ ар. и AD = CB. Опредѣлить отношеніе отрѣзковъ AC и CB, и отношеніе отрѣзковъ AD и DB.

11) Въ прямоугольникѣ ABCD сумма сторонъ AB и BC равна 117 саж. и $\frac{AB}{BC} = {}^{9}/_{4}$. Сколько сажень содержитъ каждая изъ этихъ сторонъ?

12) Въ треугольникѣ ABC извѣстно, что сторона AC больше AB на $2\frac{3}{4}$ дюйма, и что $\frac{AB}{BC} = {}^{3}/_{10}$ и $\frac{AC}{BC} = {}^{7}/_{5}$. Сколько дюймовъ содержитъ сторона AB?

13) Въ равнобедренномъ треугольникѣ ABC изъ вершины A опущенъ перпендикуляръ AD на BC, отношеніе $\frac{AD}{DB} = {}^{64}/_{63}$, отношеніе

$\frac{AB}{AD} = {}^{45}/_{32}$ и BC = 6,3 дюйма. Сколько дюймовъ содержитъ сторона AC?

14) Для прямыхъ AB и CD найдена общая мѣра M, содержащаяся 16 разъ въ AB и 7 разъ въ CD, а общая мѣра m прямыхъ EF и GH содержится 23 раза въ EF и 10 разъ въ GH; наконецъ общая мѣра p прямыхъ M и m содержится 3 раза въ M и 2 раза въ m. Найти отношеніе прямыхъ AB и EF, и отношеніе прямыхъ CD и GH.

15) Въ равнобедренномъ треугольникѣ ABC изъ вершины A опущенъ перпендикуляръ AD на BC, отношеніе $\frac{BC}{AB} = {}^{7}/_{5}$, отношеніе $\frac{AD}{BC} = {}^{32}/_{63}$ и AC = 4,5 дюйм. Сколько дюймовъ содержитъ перпендикуляръ AD?

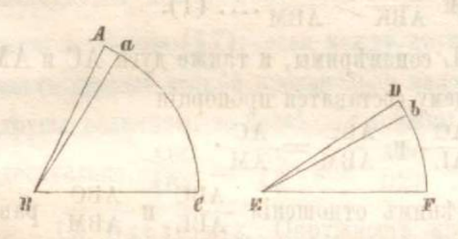
ВТОРАЯ ГЛАВА.

Измѣреніе угловъ.

18. **Теорема.** *Два угла относятся между собою, какъ дуги, описанныя изъ вершинъ и между сторонами этихъ угловъ равными радіусами.*

1) Предположимъ, что дуги AC и DF (фиг. 130) соизмѣримы, и что ихъ общая мѣра m содержится 9 разъ въ AC и 5 разъ въ DF, т. е. AC = $9m$ и DF = $5m$; тогда отношеніе между данными дугами выразится чрезъ $\frac{AC}{DF} = {}^{9}/_{5}$.

Фиг. 130.



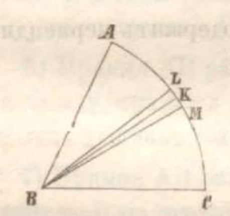
Соединимъ прямыми точки дѣленія дуги AC съ вершиною B, и точки дѣленія дуги DF съ вершиною E; тогда уголъ ABC раздѣлится на 9 равныхъ угловъ ABa и уголъ DEF раздѣлится на 5 равныхъ угловъ DEb. Такъ какъ дуги Aa и Db равны и радіусы BA и ED равны, то центральные

углы ABa и DEb должны быть равны (I. 135, 2); слѣдовательно уголъ ABa есть общая мѣра угловъ ABC и DEF, и $\angle$ ABC = 9$\angle$ ABa, $\angle$ DEF = 5$\angle$ ABa; откуда составится отношеніе $\frac{ABC}{DEF} = {}^9/_5$. Такъ какъ отношеніе дугъ AC и DF равно отношенію угловъ ABC и DEF, то по предъидущему (7) получится пропорція

$$\frac{ABC}{DEF} = \frac{AC}{DF}.$$

2) Докажемъ теперь, что выведенная пропорція также справедлива въ случаѣ несоизмѣримости дугъ AC и DF. *Для этого отложимъ* отъ A до K (фиг. 131) дугу, равную дугѣ DF, и проведемъ радіусъ BK; получимъ уголъ ABK, равный данному углу DEF (I. 135, 2). Потомъ раздѣлимъ дугу AC на произвольное число равныхъ частей; тогда ни одна изъ точекъ дѣленія дуги AC не совпадетъ съ точкою K, потому-что въ противномъ случаѣ дуги AC и AK оказались бы соизмѣримыми. Послѣ этого соединимъ прямыми LB и MB точки L и M, ближайшія къ точкѣ K, съ вершиною B; получимъ два угла

Фиг. 131.



$$\angle ABL < \angle ABK \text{ и } \angle ABM > \angle ABK;$$

слѣдовательно составятся отношенія

$$\frac{ABC}{ABK} < \frac{ABC}{ABL} \text{ и } \frac{ABC}{ABK} > \frac{ABC}{ABM} \dots (1).$$

Такъ какъ дуги AC и AL соизмѣримы, и также дуги AC и AM соизмѣримы, то по предъидущему составятся пропорціи

$$\frac{ABC}{ABL} = \frac{AC}{AL} \text{ и } \frac{ABC}{ABM} = \frac{AC}{AM}.$$

Въ неравенствѣ (1) замѣнимъ отношенія $\frac{ABC}{ABL}$ и $\frac{ABC}{ABM}$ равнымъ имъ отношеніями $\frac{AC}{AL}$ и $\frac{AC}{AM}$; получимъ

$$\frac{ABC}{ABK} < \frac{AC}{AL} \text{ и } \frac{ABC}{ABK} > \frac{AC}{AM} \text{ или}$$

$$\frac{AC}{AL} > \frac{ABC}{ABK} > \frac{AC}{AM} \dots (2).$$

Дуга AL меньше дуги AK, и дуга AK меньше дуги AM; слѣдовательно составятся отношенія

$$\frac{AC}{AK} < \frac{AC}{AL} \text{ и } \frac{AC}{AK} > \frac{AC}{AM} \text{ или}$$

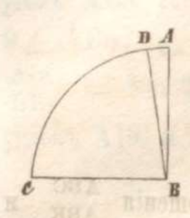
$$\frac{AC}{AL} > \frac{AC}{AK} > \frac{AC}{AM} \ldots\ldots (3).$$

Изъ неравенствъ (2 и 3) мы видимъ, что отношенія $\frac{ABC}{ABK}$ и $\frac{AC}{AK}$ находятся между тѣми-же самыми дробями $\frac{AC}{AL}$ и $\frac{AC}{AM}$, которыя могутъ быть сближены, какъ угодно. Въ самомъ дѣлѣ, раздѣленіемъ дуги AC на бо̀льшее число равныхъ частей, нежели она была раздѣлена прежде, увеличится дуга AL и уменьшится дуга AM; при этомъ бо̀льшее отношеніе $\frac{AC}{AL}$ уменьшится, а мѐньшее отношеніе $\frac{AC}{AM}$ увеличится; слѣдовательно раздѣливъ дугу AC на очень большое число равныхъ частей, мы сближаемъ дроби $\frac{AC}{AL}$ и $\frac{AC}{AM}$. Если себѣ представить, что дуга AC раздѣлена на безконечно большое число равныхъ частей, то дроби $\frac{AC}{AL}$ и $\frac{AC}{AM}$ сблизятся такимъ образомъ, что ихъ разность сдѣлается меньше всякой произвольно малой величины. Но какъ мала ни была разность этихъ дробей всегда должны находиться между ними отношенія $\frac{ABC}{ABK}$ и $\frac{AC}{AK}$; а по предъидущему извѣстно (17): если между двумя величинами, которыхъ разность меньше всякой произвольно малой величины, заключаются двѣ другія величины, то послѣднія должны быть равны между собою; слѣдовательно $\frac{ABC}{ABK} = \frac{AC}{AK}$ или $\frac{ABC}{DEF} = \frac{AC}{DF}$.

19. Слѣдствіе. Окружность круга раздѣляется на 360 равныхъ частей, называемыхъ *градусами*. Всякій градусъ дѣлится на 60 *минутъ*, и минута дѣлится на 60 *секундъ*.

Дуга AC (фиг. 132), описанная изъ вершины B прямаго угла ABC между его катетами, равна четверти окружности и потому она

Фиг. 132.



содержитъ $\frac{360^0}{4}=90^0$; но извѣстно, что всякій прямой уголъ раздѣляется на 90 градусовъ; слѣдовательно углу ABD, равному $^1/_{90}$ прямаго угла, соотвѣтствуетъ дуга AD, равная одному градусу окружности.

Вообще если ABC какой-нибудь уголъ (фиг. 130) и ABa уголъ, равный 1 градусу, то пропорція

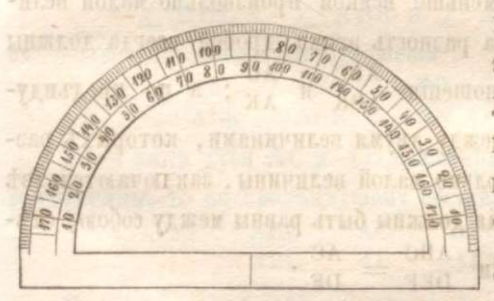
$$\frac{ABC}{ABa}=\frac{AC}{Aa},$$

показываетъ, что градусъ ABa угла содержится въ углѣ ABC столько разъ, сколько разъ содержится градусъ Aa окружности въ дугѣ AC; слѣдовательно по числу градусовъ, заключающихся въ дугѣ AC, опредѣлится число градусовъ, содержащихся въ углѣ ABC; такъ напримѣръ если дуга AC содержитъ 65^0, то и уголъ ABC содержитъ 65^0. На этомъ основаніи говорятъ: *центральный уголъ* ABC *измѣряется дугою* AC, *заключенною между его сторонами*, и пишутъ

$$\angle ABC = \text{дуг. } AC\ ^{1)}.$$

20. *Примѣчаніе*. Для измѣренія угловъ, начерченныхъ на бумагѣ, употребляется инструментъ, называемый *транспортиромъ* (фиг. 133). Онъ дѣлается въ видѣ полукруга изъ одного куска мѣди съ линеечкою, внутренній край которой проходитъ чрезъ центръ дуги транспортира; центръ означается точкою пересѣченія упомянутаго края съ черточкою, проведенною на поверхности линеечки. Наружная дуга транспортира раздѣляется черточками на 180 равныхъ частей (градусовъ). Черточки, соотвѣтствующія десяткамъ

Фиг. 133.

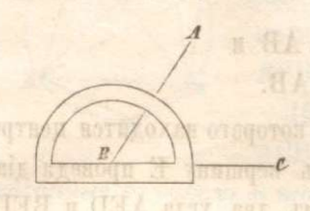


[1]) Въ этомъ выраженіи знакъ равенства замѣняетъ слово «измѣряется».

градусовъ, подписываются цифрами, счетъ которымъ ведется отъ обоихъ концовъ діаметра транспортира.

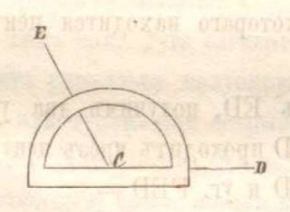
Чтобы найти число градусовъ даннаго угла ABC (фиг. 134), приложимъ транспортиръ діаметромъ къ сторонѣ BC такъ, чтобы центръ совмѣстился съ вершиною B. Потомъ отсчитавъ число градусовъ отъ того конца діаметра, который находится на прямой BC, до черточки, совмѣстившейся съ стороною AB, мы опредѣляемъ *градусную величину* угла ABC; такъ напримѣръ, если сторона AB совмѣщается съ восьмою черточкою послѣ цифры 50, то $\angle$ ABC $= 58^0$.

Фиг. 134.



Транспортиръ употребляется также для начертанія угловъ по ихъ градусной величинѣ. Чтобы при точкѣ C (фиг. 135) данной прямой CD построить уголъ, напримѣръ въ 117^0, мы приложимъ транспортиръ діаметромъ къ CD и центромъ къ точкѣ C. Потомъ отсчитаемъ 117^0 отъ того конца діаметра, который находится на прямой CD, и отмѣтимъ на бумагѣ точку, на продолженіи черточки 117-го градуса. Наконецъ снявъ транспортиръ, мы соединимъ отмѣченную точку съ точкою C; получится уголъ DCF $= 117^0$.

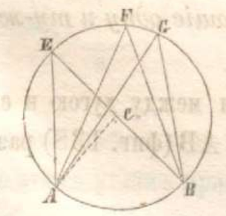
Фиг. 135.



21. **Теорема**. *Вписанный уголъ измѣряется половиною дуги, заключенной между его сторонами.*

Данъ уголъ AEB (фиг. 136), котораго сторона EB проходитъ чрезъ центръ круга.

Фиг. 136.



Проведя радіусъ CA, получимъ равнобедренный треугольникъ ACE, въ которомъ $\angle$AEC$=\angle$EAC. Зная, что внѣшній уголъ треугольника равенъ суммѣ двухъ внутреннихъ, съ нимъ несмежныхъ, угловъ (I. 68, 1), мы имѣемъ

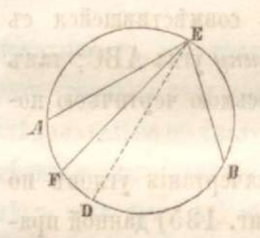
$$\angle ACB = \angle AEC + \angle EAC \text{ или}$$
$$\angle ACB = 2 \angle AEC;$$

откуда $\angle AEB = \frac{1}{2} \angle ACB$; но по предъидущему (19) $\angle ACB$ = дуг. AB; слѣдовательно

$$\frac{1}{2} \angle ACB = \frac{1}{2} \text{дуг. } AB \text{ и}$$
$$\angle AEB = \frac{1}{2} \text{дуг. } AB.$$

Данъ уголъ AEB (фиг. 137), внутри котораго находится центръ окружности. Чрезъ вершину E проведя діаметръ ED, получимъ два угла AED и BED, имѣющіе общую сторону ED, проходящую чрезъ центръ. Зная, что $\angle AED = \frac{1}{2}$дуг. AD и $\angle BED = \frac{1}{2}$дуг. BD, мы имѣемъ

Фиг. 137.



$$\angle AED + \angle BED = \frac{1}{2} \text{дуг. } AD + \frac{1}{2} \text{дуг. } BD$$
или $\angle AEB = \frac{1}{2}$(дуг. AD + дуг. BD) или
$$\angle AEB = \frac{1}{2} \text{дуг. } AB.$$

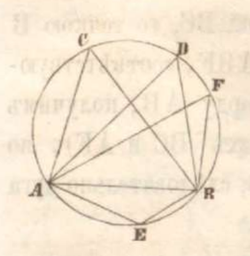
Данъ уголъ AEF (фиг. 137), внѣ котораго находится центръ окружности.

Чрезъ вершину E проведя діаметръ ED, получимъ два угла AED и FED, которыхъ общая сторона ED проходитъ чрезъ центръ. По предъидущему уг. AED = $\frac{1}{2}$дуг. AD и уг. FED = $\frac{1}{2}$дуг. FD; слѣдовательно

$$\angle AED - \angle FED = \frac{1}{2} \text{дуг. } AD - \frac{1}{2} \text{дуг. } FD \text{ или}$$
$$\angle AEF = \frac{1}{2}(\text{дуг. } AD - \text{дуг. } FD) \text{ или}$$
$$\angle AEF = \frac{1}{2} \text{дуг. } AF.$$

27. Слѣдствіе. Углы AEB, AFB, AGB (фиг. 136) равны, потому-что каждый изъ нихъ измѣряется половиною одной и той-же дуги AB; слѣдовательно *вписанные углы, имѣющіе одну и ту-же дугу, равны.*

28. Слѣдствіе. Часть круга, заключенная между дугою и ея хордою, называется *сегментомъ*. Всякая хорда AB (фиг. 138) раздѣляетъ кругъ на два сегмента ACB и AEB.



Фиг. 138.

Уголъ ACB вписанъ въ сегментѣ (фиг. 138), потому-что вершина C находится на дугѣ сегмента и стороны CA и CB проходятъ чрезъ оконечныя точки A и B хорды AB этого сегмента. Точно также углы ADB и AFB вписаны въ сегментѣ ACB, и уголъ AEB вписанъ въ сегментѣ AEB.

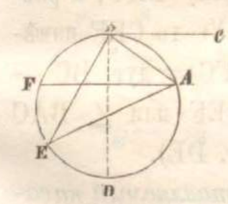
По предъидущему извѣстно (27), что углы ACB, ADB, AFB равны; слѣдовательно *углы, вписанные въ одномъ и томъ-же сегментѣ, равны.*

Уголъ ACB измѣряется $^1/_2$ дуги AEB и уголъ AEB измѣряется $^1/_2$ дуги ACB; но $^1/_2$ дуги AEB и $^1/_2$ дуги ACB составляютъ полуокружность или 180^0; слѣдовательно $\angle ACB + \angle AEB = 180^0$. Отсюда мы заключаемъ, что *всякій уголъ, вписанный въ одномъ изъ двухъ сегментовъ, образовавшихся одною и тою-же хордою, служитъ дополненіемъ до 180^0 какому-нибудь углу, вписанному въ другомъ сегментѣ.*

Такъ какъ дуга сегмента можетъ быть больше, или меньше, или можетъ равняться полуокружности, то вписанный въ немъ уголъ будетъ или тупой, или острый, или прямой.

29. **Теорема.** *Уголъ, составляемый касательною и хордою, проходящею чрезъ точку касанія, измѣряется половиною дуги, заключенной между его сторонами.*

Чрезъ точку касанія B проведя діаметръ BD (фиг. 139), получимъ прямой уголъ CBD, который измѣряется половиною дуги BAD. По предъидущему уголъ ABD измѣряется половиною дуги AD; слѣдовательно



Фиг. 139.

$\angle ABC = \angle DBC - \angle DBA =$

$^1/_2$(дуг. DAB — дуг. DA)

или $\angle ABC = {}^1/_2$ дуг. AB.

30. Слѣдствіе 1. Уголъ ABC, составляемый касательною и хордою, равенъ вписанному углу AEB, потому-что этимъ угламъ принадлежитъ одна и та-же дуга AB.

Слѣдствіе 2. Если чрезъ какую-нибудь точку A (фиг. 139) проведена хорда AF параллельно къ касательной BC, то точкою B касанія раздѣлится на двѣ равныя части дуга ABF, соотвѣтствующая хордѣ AF. Въ самомъ дѣлѣ проведя хорду AB, получимъ $\angle ABC = \angle BAF$ (по параллельности прямыхъ BC и AF); но $\angle ABC = {}^1/_2$дуг. AB и $\angle BAF = {}^1/_2$дуг. FB, слѣдовательно дуга AB равна дугѣ FB.

31. **Теорема.** *Уголъ, котораго вершина лежитъ внутри круга, измѣряется полусуммою дугъ, заключающихся: первая между сторонами угла и вторая между ихъ продолженіями.*

Чрезъ точку E (фиг. 140) проведя прямую EF параллельно къ DC, получимъ вписанный уголъ BEF, равный данному углу BAC. Такъ какъ вписанный уголъ BEF измѣряется ${}^1/_2$дуг. BF и дуга BF = дуг. BC + дуг. CF или дуга BF = дуг. BC + дуг. DE (потому-что по параллельности хордъ DC и EF дуг. CF = DE; (I. 118), то уг. BEF измѣряется ${}^1/_2$(дуг. BC + дуг. DE) и уг. BAC = ${}^1/_2$(дуг. BC + дуг. DE).

Фиг. 140.



32. **Теорема.** *Уголъ, образуемый двумя сѣкущими, встрѣчающимися внѣ круга, измѣряется полуразностью дугъ, заключающихся между сторонами угла.*

Фиг. 141.

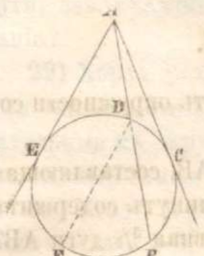


Чрезъ точку E (фиг. 141) проведя хорду EF параллелино къ AB, получимъ вписанный уголъ CEF, равный данному углу BAC, и равныя дуги DE и BF (I. 118). Уголъ CEF измѣряется ${}^1/_2$ дуги FC, и дуга FC = дуг. BC — дуг. DE; слѣдовательно $\angle CEF$ или $\angle BAC$ измѣряется ${}^1/_2$(дуг. BC — дуг. DE).

33. **Теорема**. *Уголъ, составляемый касательною и сѣкущею, измѣряется полуразностью дугъ, заключающихся между точкою касанія и точками пересѣченія сѣкущей съ окружностью.*

Чрезъ точку D (фиг. 142) сѣкущей проведя хорду DF параллельно къ касательной AE, получимъ равныя дуги DE = EF (30, 2) и вписанный уголъ BDF, равный данному углу BAE. Уголъ BDF измѣряется $^1/_2$ дуги BF, но дуга BF = дуг. BE — дуг. FE или дуга BF = дуг. BE — дуг. ED; слѣдовательно уголъ BDF или уголъ BAE измѣряется $^1/_2$(дуг. BE — дуг. ED).

Фиг. 142.



34. Слѣдствіе. Представимъ себѣ, что сѣкущая AB, обратившаяся около точки A, сдѣлалась касательною AC; при этомъ точки B и D постепенно сближались и наконецъ совпали въ точку C, дуга EB обратилась въ дугу EFC, дуга ED сдѣлалась дугою EDC, и уголъ BAE обратился въ уголъ CAE; слѣдовательно выраженіе $\angle$ BAE = $^1/_2$(дуг. BE — дуг. ED обратится въ слѣдующее выраженіе

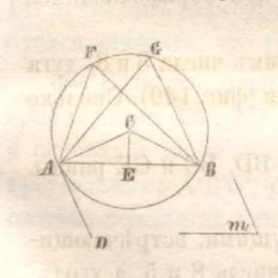
$$\angle \text{CAE} = {}^1/_2(\text{дуг. EFC} - \text{дуг. EDC}),$$

которое показываетъ, что *уголъ, составляемый двумя касательными, измѣряется полуразностію дугъ, содержащихся между точками касанія.*

35. **Задача.** *На данной прямой начертить такой сегментъ, чтобы всѣ углы, въ немъ вписанные, равнялись данному углу.*

При точкѣ A данной прямой AB (фиг. 143) построимъ уголъ DAB, равный данному углу *m*, изъ точки A прямой AD возставимъ перпендикуляръ и къ прямой AB изъ ея средины E еще перпендикуляръ. Точкою C пересѣченія этихъ перпендикуляровъ опредѣлится центръ дуги искомаго сегмента. Изъ точки C радіусомъ CA опишемъ окружность, въ которой уголъ AFB = $\angle$ AGB = $\angle$ *m*.

Фиг. 143.



Доказательство. Прямая AD, перпендикулярная къ радіусу CA, есть касательная къ окружности, а потому (29) $\angle$ BAD =

$^1/_2$дуг. AB; но $\angle AFB = \angle AGB = {}^1/_2$дуг. AB; слѣдовательно

$$\angle AFB = \angle AGB = \angle BAD = \angle m.$$

ЧИСЛЕННЫЕ ВОПРОСЫ.

16) Вписанный уголъ ACB $= 65^\circ 30'$. Какую часть окружности составляетъ дуга ACB?

17) Центральному углу соотвѣтствуетъ дуга AB, составляющая восьмую часть окружности. Сколько градусовъ и минутъ содержитъ вписанный уголъ, которому принадлежитъ дуга, равная $^3/_5$ дуги AB?

18) Сколько градусовъ содержитъ уголъ AGB (фиг. 136), если BE діаметръ и дуга AE составляетъ $^4/_{15}$ окружности?

19) Дуга AD $= {}^5/_{24}$ окружности (фиг. 137) и дуга BD равна $^7/_3$ дуги AD. Сколько градусовъ содержитъ уголъ AEB?

20) Сколько градусовъ содержитъ уголъ ABC (фиг. 139), если BD діаметръ и дуга AD составляетъ $^9/_{32}$ окружности?

21) Двѣ хорды (фиг. 140), пересѣкаясь внутри круга, раздѣляютъ окружность на четыре части такъ, что дуга CE равна $^1/_5$ окружности и дуга BD равна $^1/_9$. Сколько градусовъ содержитъ уголъ BAC?

22) Двѣ сѣкущія, встрѣчающіяся внѣ круга, составляютъ уголъ въ $54^\circ 26'$, а большая дуга, заключающаяся между ними, содержитъ $128^\circ 46'$. Сколько градусовъ и минутъ содержитъ меньшая дуга?

23) Зная (фиг. 142), что дуга DE $= 85^\circ 35'$ и дуга BD составляетъ $^2/_5$ окружности, опредѣлить градусную величину угла BAE.

24) Хорда AB (фиг. 138) раздѣляетъ окружность на двѣ дуги, которыя относятся между собою, какъ числа 16 и 11. Сколько градусовъ содержатъ углы, вписанные въ каждомъ изъ образовавшихся сегментовъ?

25) Дуги BD и CE относятся между собою, какъ числа 3 и 8, дуга BD равна $24^\circ 15'$ и дуга DE равна $^1/_{16}$ окружности (фиг. 140). Сколько градусовъ содержитъ уголъ BAC?

26) Дуга DE равна $42^\circ 20'$ (фиг. 141) и дуги BD, BC и CE равны. Сколько градусовъ содержитъ уголъ BAC?

27) Дуги, заключающіяся между двумя сѣкущими, встрѣчающимися внѣ круга, относятся между собою, какъ числа 8 и 5, а уголъ, составляемый этими сѣкущими, равенъ $18^\circ 45'$. Сколько градусовъ содержитъ каждая изъ дугъ, заключающихся между сѣкущими?

28) Касательная къ окружности пересѣкается съ продолженнымъ діаметромъ подъ угломъ въ 58°46′. Сколько градусовъ содержатъ дуги, заключающіяся между оконечностями діаметра и точкою касанія?

29) Хорда раздѣляетъ окружность на двѣ дуги, пропорціональныя числамъ 3 и 7, и чрезъ оконечности этой хорды проведены касательныя къ окружности. Сколько градусовъ содержитъ уголъ, составляемый этими касательными?

30) Уголъ BAC = 26°35′ (фиг. 141), дуги DE и CE относятся, какъ числа 3 и 5, и дуги BC и CE пропорціональны числамъ 3 и 2. Сколько градусовъ содержитъ дуга BD?

ТЕОРЕМЫ.

31) Если двѣ хорды AB и CD пересѣкаются внутри круга подъ прямыми углами, то сумма противолежащихъ дугъ AD и BC равна полуокружности.

32) На окружности даны точки A, B, C и проведены хорды AB и AC; потомъ соединена средина D дуги AB съ срединою E дуги AC прямою DE, которая пересѣкаетъ хорды AB и AC въ точкахъ F и G. Требуется доказать, что отрѣзки AF и AG равны.

33) На діаметрѣ AB взята какая-нибудь точка M, которая соединена съ оконечностью D радіуса CD, проведеннаго перпендикулярно къ діаметру AD; продолженная прямая DM пересѣкаетъ окружность въ точкѣ E, чрезъ которую проведена касательная до пересѣченія F съ продолженнымъ діаметромъ BA. Требуется доказать, что FM=FE.

34) Въ кругѣ вписанъ треугольникъ ABC, чрезъ средину D дуги BC проведенъ діаметръ DE и наконецъ соединены точки D и A. Требуется доказать, что уголъ ADE равенъ разности угловъ ABC и ACB.

35) Если изъ вершинъ A, B, C треугольника ABC опустить перпендикуляры AA′, BB′, CC′ на противолежащія стороны BC, AC, AB и основанія перпендикуляровъ соединить прямыми, то образуется треугольникъ A′B′C′, углы котораго дѣлятся прямыми AA′, BB′, CC′ соотвѣтственно на двѣ равныя части.

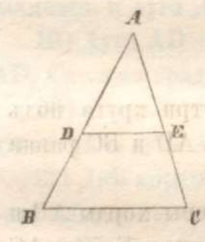
ТРЕТЬЯ ГЛАВА.

Пропорціональность отрѣзковъ сторонъ треугольника.

36. Теорема. *Прямая, проведенная въ треугольникѣ параллельно къ одной изъ его сторонъ, раздѣляетъ остальныя стороны на части пропорціональныя.*

Дано (фиг. 144): прямая DE параллельна къ BC. Требуется доказать, что $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$.

Фиг. 144.

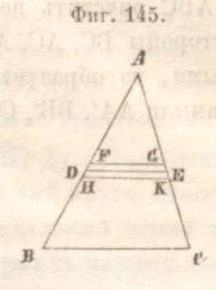


1) Предположимъ, что отрѣзки AD и DB соизмѣримы, и что ихъ общая мѣра M содержится 7 разъ въ AD и 5 разъ въ BD, т. е. $AD = 7M$ и $DB = 5M$. Отсюда по предъидущему получится отношеніе $\frac{AD}{DB} = {}^7/_5$. Чрезъ точки дѣленія отрѣзковъ AD и DB проведя прямыя параллельно къ BC, мы раздѣляемъ отрѣзки AE и EC соотвѣтственно на 7 и на 5 равныхъ частей (I. 76). Означивъ каждую изъ этихъ частей чрезъ m, получимъ $AE = 7m$ и $EC = 5m$; слѣдовательно составится отношеніе $\frac{AE}{EC} = {}^7/_5$. Такъ какъ отношеніе прямыхъ AD и DB равно отношенію прямыхъ AE и EC, то эти прямыя составятъ пропорцію

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \ldots\ldots (1).$$

2) Докажемъ теперь, что выведенная пропорція (1) также справедлива для несоизмѣримыхъ отрѣзковъ AD и DB.

Фиг. 145.



Проведя DE (фиг. 145) параллельно къ BC, раздѣлимъ сторону AB на произвольное число равныхъ частей; тогда ни одна точка дѣленія не совпадетъ съ точкою D, потому-что въ противномъ случаѣ отрѣзки AD и DB были бы соизмѣримы. Чрезъ точки F и H дѣленія, ближайшія къ точкѣ D, проведемъ прямыя FG

и HK параллельно къ DE. Такъ какъ $AF < AD$, $AH > AD$ $FB > DB$ и $HB < DB$, то

$$\frac{AF}{FB} < \frac{AD}{DB} \text{ и } \frac{AH}{HB} > \frac{AD}{DB} \text{ или}$$

$$\frac{AF}{FB} < \frac{AD}{DB} < \frac{AH}{HB} \ldots\ldots (1).$$

Зная, что $AG < AE$, $AK > AE$, $GC > EC$ и $KC < EC$, получимъ

$$\frac{AG}{GC} < \frac{AE}{EC} \text{ и } \frac{AK}{KC} > \frac{AE}{EC} \text{ или}$$

$$\frac{AG}{GC} < \frac{AE}{EC} < \frac{AK}{KC} \ldots\ldots (2).$$

Отрѣзки AF и FB соизмѣримы, также отрѣзки AH и HB соизмѣримы, а потому составятся пропорціи (см. 1)

$$\frac{AF}{FB} = \frac{AG}{GC} \text{ и } \frac{AH}{HB} = \frac{AK}{KC}.$$

Въ неравенствахъ (2) замѣнимъ дроби $\frac{AG}{GC}$ и $\frac{AK}{KC}$ равными имъ дробями $\frac{AF}{FB}$ и $\frac{AH}{HB}$; получимъ

$$\frac{AF}{FB} < \frac{AE}{EC} < \frac{AH}{HB} \ldots\ldots (3).$$

Изъ неравенствъ (1 и 3) видно, что отношенія $\frac{AD}{DB}$ и $\frac{AE}{EC}$ заключаются между дробями $\frac{AF}{FB}$ и $\frac{AH}{HB}$, которыя могутъ быть сближены, какъ угодно. Въ самомъ дѣлѣ, раздѣленіемъ стороны AB на весьма большое число равныхъ частей, увеличатся отрѣзки AF и HB и уменьшатся отрѣзки FB и AH; вслѣдствіе чего дробь $\frac{AF}{FB}$ увеличится, а дробь $\frac{AH}{HB}$ уменьшится. Отсюда мы заключаемъ, что раздѣленіемъ стороны AB на безконечное число равныхъ частей, дроби $\frac{AF}{FB}$ и $\frac{AH}{HB}$ могутъ быть сближены такимъ образомъ, что ихъ разность сдѣлается меньше всякой произвольно малой величины. Но какъ мала ни была разность дробей $\frac{AF}{FB}$ и $\frac{AH}{HB}$, всегда должны находиться между ними отношенія $\frac{AD}{DB}$ и $\frac{AE}{EC}$; а по предъидущему из-

вѣстно (17): если между двумя величинами, которыхъ разность можетъ быть сдѣлана меньше всякой произвольно малой величины, заключаются двѣ другія величины, то послѣднія должны быть равны между собою; слѣдовательно $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$.

37. Слѣдствіе. Основываясь на доказанныхъ свойствахъ пропорціи (13), мы составимъ изъ пропорціи $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$ слѣдующія пропорціи

$$\frac{AD+DB}{AD}=\frac{AE+EC}{AE} \text{ или } \frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE} \ldots (2),$$

$$\frac{AD+DB}{DB}=\frac{AE+EC}{EC} \text{ или } \frac{AB}{DB}=\frac{AC}{EC} \ldots (3).$$

Пропорціи (1, 2, 3) приводятъ къ слѣдующему заключенію: *если въ треугольникѣ проведена прямая параллельно къ одной изъ его сторонъ, то двѣ остальныя стороны раздѣляются на отрѣзки такимъ образомъ, что отрѣзки первой стороны относятся между собою и къ этой сторонѣ точно такъ, какъ отрѣзки второй стороны относятся между собою и къ самой сторонѣ.*

38. **Обратное предложеніе.** *Если стороны* AB *и* AC *треугольника* ABC *(фиг. 145) раздѣлены соотвѣтственно точками* D *и* E *на части пропорціональныя, то прямая* DE, *соединяющая эти точки, должна быть параллельна къ третьей сторонѣ* BC.

1) Зная, что пропорціи (2 и 3) выводятся изъ пропорціи (1), мы докажемъ предложенную теорему относительно пропорціи $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$. Если представить себѣ прямую, проведенную чрезъ D параллельно къ BC, то эта прямая должна раздѣлить сторону AC, между точками A и C, на два отрѣзка, составляющіе отношеніе, равное отношенію $\frac{AD}{DB}$; но извѣстно (6), что между A и C существуетъ только одна точка E, которой разстоянія отъ A и C составляютъ отношеніе, равное $\frac{AD}{DB}$; а потому прямая, проведенная чрезъ D парал-

лельно къ BC, должна пройти чрезъ E и должна совпасть съ DE; слѣдовательно прямая DE параллельна къ BC.

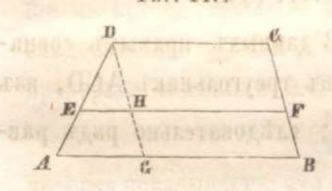
2) Если точка D (фиг. 146) находится на продолженіи стороны

Фиг. 146.

AB, то отношеніе $\frac{AD}{DB} > 1$; а потому отношеніе $\frac{AE}{EC}$ должно быть также больше единицы; слѣдовательно точка E должна находиться на продолженіи стороны AC, подъ точкою C, и по предъидущему прямая DE должна быть параллельна къ BC.

39. **Теорема.** *Прямая, проведенная параллельно къ основаніямъ трапеціи, раздѣляетъ стороны сей послѣдней на пропорціональныя части* (фиг. 147).

Дано EF ∥ къ AB. Требуется доказать, что $\frac{DE}{EA} = \frac{CF}{FB}$.



Фиг. 147.

Проведя DG параллельно къ CB, получимъ треугольникъ ADG, изъ котораго по предъидущему (36) выводится пропорція $\frac{DE}{EA} = \frac{DH}{HG}$. Но такъ какъ $DH = CF$ и $HG = FB$ (параллельныя, заключающіяся между параллельными), то въ выведенной пропорціи замѣнимъ DH и HG равными имъ прямыми; получимъ $\frac{DE}{EA} = \frac{CF}{FB}$.

40. **Обратное предложеніе.** *Прямая, раздѣляющая стороны трапеціи на пропорціональныя части, параллельна къ основаніямъ этой трапеціи.*

Если чрезъ E (фиг. 147) проведена прямая параллельно къ AB, то она должна раздѣлить сторону BC на части, пропорціональныя отрѣзкамъ DE и EA; но такъ какъ между B и C существуетъ только одна точка F, раздѣляющая прямую BC на части, пропорціональныя прямымъ DE и EA, то прямая, проведенная чрезъ E параллельно къ AB, должна пройти чрезъ F и совпасть съ EF; слѣдовательно прямая EF параллельна къ AB.

41. Теорема. *Двѣ наклонныя прямыя раздѣляются параллельными прямыми на части пропорціональныя.*

Даны наклонныя AK и BL (фиг. 148) и параллельныя AB, CD, EF, GH, KL. Требуется доказать, что

Фиг. 148.

$$\frac{AC}{BD}=\frac{CE}{DF}=\frac{EG}{FH}=\frac{GK}{HL}.$$

По предъидущему (39) изъ трапеціи ABFE получимъ пропорцію $\frac{AC}{CE}=\frac{BD}{DF}$ или $\frac{AC}{BD}=\frac{CE}{DF}$....(1) по перестановкѣ среднихъ членовъ. Точно также изъ трапецій CDHG и EFLK получатся пропорціи $\frac{CE}{EG}=\frac{DF}{FH}$ и $\frac{EG}{GK}=\frac{FH}{HL}$, или $\frac{CE}{DF}=\frac{EG}{FH}$....(2) и $\frac{EG}{FH}=\frac{GK}{HL}$.... (3). Наконецъ изъ пропорцій (1, 2, 3) составится рядъ равныхъ отношеній

$$\frac{AC}{BD}=\frac{CE}{DF}=\frac{EG}{FH}=\frac{GK}{HL}\dots (4).$$

42. Слѣдствіе. Если точки A и B данныхъ прямыхъ совпадаютъ, то трапеція ABFE обращается въ треугольникъ ACD, изъ котораго выводится пропорція $\frac{AC}{AD}=\frac{CE}{DF}$; слѣдовательно рядъ равныхъ отношеній (4) преобразуется въ

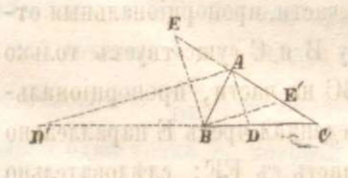
$$\frac{AC}{AD}=\frac{CE}{DF}=\frac{EG}{FH}=\frac{GK}{HL}.$$

43. Теорема. *Прямая, раздѣляющая уголъ треугольника на двѣ равныя части, дѣлитъ противолежащую сторону на два отрѣзка, пропорціональные прилежащимъ имъ сторонамъ.*

Дано (фиг. 149): $\angle BAD=\angle CAD$. Требуется доказать, что

$$\frac{BD}{DC}=\frac{BA}{AC}.$$

Фиг. 149.



Чрезъ вершину B проведя прямую BE параллельно къ AD до пересѣченія E съ продолженною стороною CA, получимъ изъ треугольника BEC пропорцію (36)

$$\frac{BD}{DC}=\frac{EA}{AC}.$$

По параллельности прямыхъ DA и BE мы имѣемъ $\angle BEA = \angle DAC$ (соотвѣтствующіе углы), $\angle EBA = \angle DAB$ (внутренніе на-крестъ лежащіе углы) и по заданію $\angle DAC = \angle DAB$; слѣдовательно $\angle BEA = \angle EBA$ и $BA = EA$. Замѣнивъ въ послѣдней пропорціи EA чрезъ BA, получимъ

$$\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC} \ldots\ldots (1).$$

44. Слѣдствіе. Прямою AD' раздѣлимъ внѣшній уголъ BAE треугольника ABC (фиг. 149) на двѣ равныя части и чрезъ вершину B проведемъ BE' параллельно къ AD'; получимъ треугольникъ ACD', изъ котораго выводится пропорція

$$\frac{D'B}{D'C} = \frac{AE'}{AC}.$$

По параллельности прямыхъ AD' и BE' мы имѣемъ: $\angle BE'A = \angle D'AE$ (соотвѣтствующіе углы), $\angle E'BA = \angle D'AB$ (внутренніе на-крестъ лежащіе углы) и по заданію $\angle D'AE = \angle D'AB$; слѣдовательно $\angle BE'A = \angle E'BA$ и $AB = AE'$. Въ послѣдней пропорціи замѣнивъ AE' чрезъ AB, получимъ пропорцію

$$\frac{D'B}{D'C} = \frac{AB}{AC} \ldots\ldots (2),$$

которая показываетъ, что *прямая, раздѣляющая внѣшній уголъ треугольника на двѣ равныя части, дѣлитъ противолежащую сторону на два отрѣзка, пропорціональные прилежащимъ имъ сторонамъ.*

45. Слѣдствіе. Изъ полученныхъ пропорцій (1 и 2) составится пропорція (12)

$$\frac{BD}{DC} = \frac{D'B}{D'C},$$

которой удовлетворяютъ точки D и D'. Отсюда слѣдуетъ, что стороны угла BAC, прямая AD, раздѣляющая этотъ уголъ на двѣ равныя части, и прямая AD', раздѣляющая смежный ему уголъ BAE на двѣ равныя части, опредѣляютъ на какой-нибудь сѣкущей CD' четыре точки C, D, B, D' такимъ образомъ, что разстоянія точекъ B и C отъ D пропорціональны разстояніямъ тѣхъ-же точекъ отъ D'.

46. **Обратное предложеніе.** *Если прямая, проведен-*

ная въ треугольникъ отъ вершины одного изъ угловъ, раздѣляетъ противолежащую сторону на два отрѣзка, пропорціональные прилежащимъ имъ сторонамъ, то прямая должна раздѣлить этотъ уголъ на двѣ равныя части.

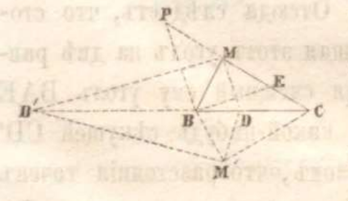
Дано (фиг. 149) $\frac{BD}{DC}=\frac{BA}{AC}$. Требуется доказать, что $\angle BAD = \angle CAD$.

Такъ какъ въ треугольникѣ возможно провести только одну прямую, раздѣляющую уголъ BAC по-поламъ, и между B и C существуетъ только одна точка D, раздѣляющая сторону BC пропорціонально прямымъ AB и AC, то прямая, проведенная чрезъ вершину A и образующая на сторонѣ BC отрѣзки, пропорціональные сторонамъ AB и AC, должна раздѣлить уголъ BAC на двѣ равныя части.

Точно также существуетъ только одна прямая, раздѣляющая внѣшній уголъ BAE даннаго треугольника на двѣ равныя части, и на продолженіи стороны CB находится только одна точка D′, разстоянія которой отъ точекъ B и C пропорціональны сторонамъ AB и AC; слѣдовательно точка D′, удовлетворяющая пропорціи $\frac{D'B}{D'C}=\frac{AB}{AC}$, должна находиться на прямой, раздѣляющей уголъ BAC на двѣ равныя части.

47. Теорема. *Геометрическое мѣсто точекъ, которыхъ разстоянія отъ двухъ данныхъ точекъ пропорціональны даннымъ числамъ, есть окружность круга.*

Фиг. 150.



Если B и C (фиг. 150) двѣ постоянныя точки, *m* и *n* данныя числа и M точка искомаго геометрическаго мѣста, то должно быть $\frac{MB}{MC}=\frac{m}{n}$.

Раздѣливъ уголъ BMC на двѣ равныя части прямою MD, получимъ пропорцію (43)

$$\frac{DB}{DC}=\frac{MB}{MC},$$

но по заданію $\frac{MB}{MC}=\frac{m}{n}$; слѣдовательно

$$\frac{DB}{DC}=\frac{m}{n}.$$

Прямою MD' раздѣлимъ уголъ BMP на двѣ равныя части; тогда по предъидущему (43) составится пропорція

$$\frac{D'B}{D'C}=\frac{MB}{MC}.$$

Сравнивъ эту пропорцію съ данною $\frac{MB}{MC}=\frac{m}{n}$, получимъ

$$\frac{D'B}{D'C}=\frac{m}{n}.$$

Такъ какъ $\angle CMB+\angle BMP=180^0$,

$$\tfrac{1}{2}\angle CMB+\tfrac{1}{2}\angle BMP=90^0 \text{ или}$$

$$\angle DMB+\angle D'MB=90^0,$$

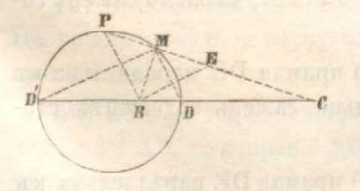
то мы заключаемъ, что DMD' прямоугольный треугольникъ, котораго гипотенуза DD' есть діаметръ окружности, проходящей чрезъ вершину M прямаго угла DMD'. Точно такимъ-же образомъ доказывается, что какая-нибудь точка M', удовлетворяющая пропорціи

$$\frac{M'B}{M'C}=\frac{m}{n},$$

должна находиться также на окружности, описанной на прямой DD'. Отсюда слѣдуетъ, что всякая точка геометрическаго мѣста должна находиться на окружности, описанной на прямой DD'.

48. **Обратное предложеніе.** *Окружность, описанная на діаметръ* DD', *котораго оконечности* D *и* D' *раздѣляютъ разстояніе* BC *между постоянными точками* B *и* C *на пропорціональныя части, есть геометрическое мѣсто точекъ, которыхъ разстоянія отъ точекъ* B *и* C *пропорціональны даннымъ числамъ* *m и n.*

Фиг. 151.



Дана окружность (фиг. 151), описанная на прямой DD', даны постоянныя точки B и C и извѣстно, что $\frac{D'B}{D'C}=\frac{DB}{DC}=\frac{m}{n}$. Требуется доказать, что $\frac{DB}{DC}=\frac{MB}{MC}=\frac{m}{n}$.

Чрезъ B проведемъ BP параллельно къ DM; получимъ изъ треугольника BCP пропорцію (36)

$$\frac{DB}{DC}=\frac{MP}{CM}\cdots (1).$$

Проведя BE параллельно къ D'M, получимъ треугольникъ CMD', изъ котораго выводится пропорція (36)

$$\frac{D'B}{D'C}=\frac{ME}{CM}\cdots (2).$$

Такъ какъ по заданію мы имѣемъ $\frac{D'B}{D'C}=\frac{DB}{DC}$, то $\frac{MP}{CM}=\frac{ME}{CM}$ и MP = ME.

Уголъ DMD' прямой и его стороны MD и MD' соотвѣтственно параллельны къ сторонамъ BP и BE угла EBP; а потому уголъ EBP также прямой и его вершина B должна находиться на окружности, описанной на прямой PE. Такъ какъ части MP и ME діаметра PE равны и окружность должна пройти чрезъ B, то BM = ME = MP, какъ ея радіусы. Замѣнивъ MP чрезъ BM въ пропорціи (1), получимъ новую пропорцію $\frac{DB}{DC}=\frac{BM}{CM}=\frac{m}{n}$, которая показываетъ, что M есть точка требуемаго геометрическаго мѣста.

ЧИСЛЕННЫЕ ВОПРОСЫ.

36) Въ треугольникѣ ABC (фиг. 144) сторона AB = 25 саж., BD = $10^3/_4$ саж., AC = $36^1/_2$ саж. и AE = 21 саж. Параллельна-ли прямая DE къ BC?

37) Въ треугольникѣ ABC (фиг. 144) прямая DE параллельна къ BC и AD = $^{14}/_{11}$ BD. Сколько разъ общая мѣра m отрѣзковъ AE и EC содержится въ сторонѣ AC?

38) Въ треугольникѣ ABC (фиг. 144) прямая DE параллельна къ BC, AB = 48 саж., AD = 23 саж. и AC = 52 саж.; сколько сажень содержитъ отрѣзокъ AE?

39) Въ треугольникѣ ABC (фиг. 144) прямая DE параллельна къ BC, AD = $2^3/_{14}$ BD и CE = 17 саж.; сколько сажень содержитъ сторона AC?

40) Въ треугольникѣ ABC (фиг. 144) прямая DE параллельна къ

BC, AC = 56 саж. и BD = $^3/_4$ CE. Сколько сажень содержитъ сторона AB?

41) Въ треугольникѣ ABC (фиг. 144) прямая DE параллельна къ BC, AD = $^7/_5$ AE, AD = 42 саж. и CE = 64 саж. Сколько сажень содержитъ сторона AC?

42) Въ треугольникѣ ABC (фиг. 149) сторона AB = $^7/_8$AC и BD = $^7/_{15}$BC. Раздѣляетъ-ли прямая AD уголъ BAC на двѣ равныя части?

43) Въ треугольникѣ ABC (фиг. 144) сторона BA = 56 саж. и BC = 65 саж. Чрезъ точку D прямой BC, отстоящую отъ B на 24 саж., проведена прямая DE параллельно къ AC. На сколько сажень отстоитъ точка пересѣченія прямыхъ DE и BA отъ вершины A?

44) Въ треугольникѣ ABC (фиг. 149) прямая AD раздѣляетъ уголъ BAC на двѣ равныя части, AB = 56 саж., AC = 54 саж. и BC = 45 саж. На сколько сажень отстоитъ точка пересѣченія прямыхъ AD и BC отъ вершины B?

45) Въ треугольникѣ ABC (фиг. 149) прямая AD раздѣляетъ уголъ BAC на двѣ равныя части, AB = 48 саж., AC = 43 саж. и BD = 15 саж.; сколько сажень содержитъ BC?

46) Въ треугольникѣ ABC (фиг. 149) $\angle$ ABE′ = $\angle$ CBE′, BA = 48 саж., BC = 52 саж. и AC = 65 саж. Сколько сажень содержитъ отрѣзокъ AE′?

47) Въ треугольникѣ ABC (фиг. 149) сторона AB = 16,3 саж., $\angle$ BAD = $\angle$ CAD, BD = 10,6 саж. и AC = BC. Вычислить сторону BC съ точностью до 0,01 саж.

48) Уголъ BAD′ = $\angle$ EAD′ (фиг. 149), $\angle$ BAD = $\angle$ CAD, CD′ = 7,4 дюйма, BD′ = 5,55 дюйма и BD = 0,3 дюйма. Сколько дюймовъ содержитъ сторона BC?

ТЕОРЕМЫ.

49) Если соединить среднія точки E, F, G, H сторонъ AB, BC, CD, DA какого-нибудь четыреугольника ABCD, то образуется параллелограмъ EFGH.

50) Если въ параллелограмѣ ABCD провести прямую EF параллельно къ AB, то стороны AD и BC раздѣлятся на части пропорціональныя.

51) Если углы ABC и BAC треугольника ABC (фиг. 149) раздѣлены прямыми BE′ и AD соотвѣтственно на двѣ равныя части и $\frac{BD}{DC} = \frac{AE'}{CE'}$, то треугольникъ ABC долженъ быть равнобедренный.

52) Прямая DE, соединяющая среднія точки D и E сторонъ AB и AC треугольника ABC, параллельна къ третьей сторонѣ BC.

53) Если въ треугольникѣ ABC (фиг. 149) сторона $BC = a$, $AC = b$ и $AB = c$, то при $c > b$ отрѣзки выразятся слѣдующими формулами

$$BD = \frac{ca}{b+c},\ DC = \frac{ba}{b+c},\ BD' = \frac{ca}{c-b},\ D'C = \frac{ba}{c-b}.$$

54) Если чрезъ точку касанія A двухъ окружностей C и C′, касающихся изъ-внутри, провести прямую, пересѣкающую окружности въ точкахъ D и E, то разстоянія AD и AE пропорціональны радіусамъ AC и AC′.

55) Если на сторонѣ BA треугольника ABC отложить часть BA′, на продолженіи стороны AC отложить часть CB′, равную BA′, и соединить точки A′ и B′, то прямая A′B′ раздѣлится точкою F ея пересѣченія съ BC на части, обратно пропорціональныя сторонамъ BC и AC.

ЧЕТВЕРТАЯ ГЛАВА.

Подобные многоугольники. Случаи подобія треугольниковъ. Отношеніе между периметрами подобныхъ многоугольниковъ. Масштабъ. Задачи построенія.

49. Положимъ, что въ многоугольникахъ ABCDE и *abcde* (фиг. 152) $\angle A = \angle a$, $\angle B = \angle b$, $\angle C = \angle c$, $\angle D = \angle d$, $\angle E = \angle e$ [1]) и $\frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc} = \frac{CD}{cd} = \frac{DE}{de} = \frac{EA}{ea}$, гдѣ стороны AB и *ab*, BC и *bc*, CD и *cd* и т. д., прилежащія къ

Фиг. 152.

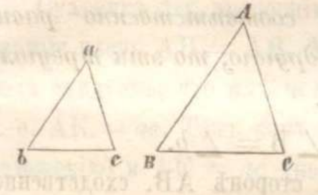
[1]) Для краткости будемъ означать углы буквами, стоящими при ихъ вершинахъ.

равнымъ угламъ A и a, B и b, C и c и т. д., называются *сходственными* сторонами.

Два многоугольника ABCDE и $abcde$ одинакаго числа сторонъ называются *подобными, если ихъ углы соотвѣтственно равны и сходственныя стороны пропорціональны.*

50. Въ подобныхъ треугольникахъ ABC и abc (фиг. 153) сходственныя стороны лежатъ противъ равныхъ угловъ; такъ напримѣръ сходственныя стороны BC и bc находятся противъ равныхъ угловъ A и a.

Фиг. 153.



51. **Теорема**. *Прямую, проведенную въ данномъ треугольникѣ параллельно къ одной изъ его сторонъ, отрѣзается отъ него треугольникъ, подобный данному треугольнику.*

Въ треугольникахъ ABC и ADE (фиг. 154) углы соотвѣтственно равны. Въ самомъ дѣлѣ, $\angle$ A общій, $\angle$ ABC $=$ $\angle$ ADE, $\angle$ ACB $=$ $\angle$ AED (по параллельности прямыхъ BC и DE). Вслѣдствіе (37) составится пропорція

Фиг. 154.



$$\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}\cdots(1).$$

Проведя прямую EF параллельно къ AB, получимъ пропорцію

$$\frac{AC}{AE}=\frac{BC}{BF}.$$

Въ эту пропорцію подставимъ DE вмѣсто BF, потому-что параллельныя DE и BF, заключающіяся между параллельными AB и EF, равны (I. 63); получится

$$\frac{AC}{AE}=\frac{BC}{DE}\cdots\cdot(2).$$

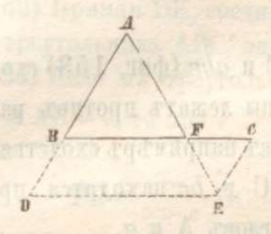
Наконецъ изъ пропорцій (1) и (2) составится пропорція (15)

$$\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}=\frac{BC}{DE}\cdots(3),$$

которая показываетъ, что сходственныя стороны треугольниковъ ABC и ADE пропорціональны.

Слѣдствіе. Точно такимъ-же образомъ доказывается подобіе треугольниковъ ABF и ADE (фиг. 155), если прямая DE находится внѣ треугольника ABF, подъ стороною BF.

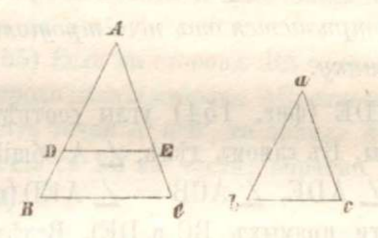
Фиг. 155.



52. **Теорема.** *Если два угла одного треугольника соотвѣтственно равны двумъ угламъ другаго, то эти треугольники подобны.*

Дано (фиг. 156): $\angle A = \angle a$ и $\angle B = \angle b$.

Фиг. 156.



На сторонѣ AB, сходственной боку ab, отложимъ $AD = ab$, и чрезъ D проведемъ прямую DE параллельно къ BC; тогда получатся (51) подобные треугольники ABC и ADE. Кромѣ того треугольникъ ADE равенъ треугольнику abc, потому-что $\angle DAE = \angle bac$ (по заданію), $AD = ab$ (по отложенію), $\angle ADE = \angle ABC$ (по параллельности прямыхъ BC и DE) и $\angle abc = \angle ABC$ (по заданію), откуда $\angle ADE = \angle abc$; слѣдовательно треугольники ADE и abc равны. Зная, что треугольники ADE и ABC подобны и треугольники ADE и abc равны, мы заключаемъ, что треугольники ABC и abc подобны и

$$\frac{AB}{ab} = \frac{AC}{ac} = \frac{BC}{bc}.$$

53. Слѣдствіе. Два треугольника подобны, если ихъ стороны соотвѣтственно параллельны или перпендикулярны, потому-что (I. 69) въ этихъ треугольникахъ углы соотвѣтственно равны.

54. **Теорема.** *Если двѣ стороны одного треугольника пропорціональны двумъ сторонамъ другаго и углы, заключающіеся между этими сторонами, равны, то треугольники подобны.*

Дано (фиг. 156): $\frac{AB}{ab} = \frac{AC}{ac}$ и $\angle A = \angle a$.

На сторонѣ AB, сходственной боку ab, отложимъ $AD = ab$, и проведемъ DE параллельно къ BC; получимъ треугольникъ ADE, подобный треугольнику ABC (51). Изъ этихъ подобныхъ треугольниковъ выводится пропорція

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}.$$

Сравнивъ эту пропорцію съ данною, мы замѣтимъ, что въ нихъ равные члены $AB = AB$, $AD = ab$ (по отложенію) и $AC = AC$; отсюда слѣдуетъ, что ихъ четвертые члены должны быть также равны, т. е. $AE = ac$. Такъ какъ $\angle A = \angle a$ (по заданію), $AD = ab$ (по отложенію) и $AE = ac$ (по доказанному), то треугольники ADE и abc равны; но треугольникъ ADE подобенъ треугольнику ABC, слѣдовательно и треугольникъ abc подобенъ треугольнику ABC.

55. **Теорема.** *Если три стороны одного треугольника пропорціональны тремъ сторонамъ другаго, то треугольники подобны.*

Дано (фиг. 156): $\frac{AB}{ab} = \frac{AC}{ac} = \frac{BC}{bc}$.

На сторонѣ AB, сходственной боку ab, отложимъ $AD = ab$, и проведемъ DE параллельно къ BC. Изъ подобныхъ треугольниковъ ABC и ADE получимъ пропорціи

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} \ldots (1) \text{ и } \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE} \ldots (2).$$

Изъ даннаго ряда равныхъ отношеній составятся двѣ слѣдующія пропорціи

$$\frac{AB}{ab} = \frac{AC}{ac} \ldots (3) \text{ и } \frac{AC}{ac} = \frac{BC}{bc} \ldots (4).$$

Сравнивая пропорціи (1 и 2) съ пропорціями (3 и 4), мы замѣчаемъ, что четвертые члены пропорцій (1 и 3) должны быть равны, и также четвертые члены пропорцій (2 и 4) должны быть равны, т. е. $AE = ac$ и $DE = bc$. Треугольники ADE и abc равны, потому-что $AD = ab$ (по отложенію), $AE = ac$ и $DE = bc$ (по дока-

занному). Такъ какъ треугольники ADE и ABC подобны (51), и треугольники ADE и abc равны, то и треугольники ABC и abc должны быть подобны.

56. Слѣдствіе. Изъ разсмотренныхъ теоремъ (52, 54 и 55) слѣдуетъ, что равенство угловъ треугольниковъ влечетъ за собою пропорціональность сторонъ, и на оборотъ: пропорціональность сторонъ треугольниковъ приводитъ къ равенству угловъ. Это замѣчательное свойство треугольниковъ, открытое греческимъ мудрецомъ Ѳалесомъ, жившимъ отъ 639 до 548 года до Р. Х., не относится къ какимъ-либо многоугольникамъ. Въ самомъ дѣлѣ, квадратъ и прямоугольникъ имѣютъ равные углы, но ихъ стороны не пропорціональны; стороны квадрата и ромба пропорціональны, но углы этихъ четыреугольниковъ не равны.

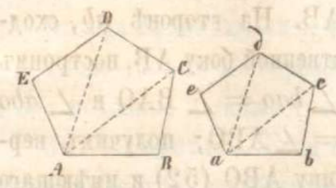
57. Сравнивая выведенные случаи подобія треугольниковъ съ случаями ихъ равенства, мы замѣчаемъ, что каждому случаю равенства треугольниковъ соотвѣтствуетъ случай подобія. Дѣйствительно,

Два треугольника равны:	*Два треугольника подобны:*
1) если сторона одного треугольника равна сторонѣ другаго, и углы, прилежащіе къ этимъ сторонамъ, равны;	1) если два угла одного треугольника соотвѣтственно равны двумъ угламъ другаго;
2) если двѣ стороны одного треугольника соотвѣтственно равны двумъ сторонамъ другаго, и углы, заключающіеся между этими сторонами, равны;	2) если двѣ стороны одного треугольника порпорціональны двумъ сторонамъ другаго, и углы, заключающіеся между этими сторонами, равны;
3) если три стороны одного треугольника равны тремъ сторонамъ другаго.	3) если три стороны одного треугольника пропорціональны тремъ сторонамъ другаго.

58. **Теорема.** *Если два многоугольника составлены изъ одинакаго числа одинаково расположенныхъ подобныхъ треугольниковъ, то эти многоугольники подобны.*

Даны (фиг. 157) подобные треугольники ABC и abc, ACD и acd, ADE и ade.

Фиг. 157.



Изъ подобныхъ треугольниковъ ABC и abc мы имѣемъ $\angle B = \angle b$, $\angle BAC = \angle bac$ и $\angle ACB = \angle acb$.

Потомъ въ подобныхъ треугольникахъ ACD и acd уголъ $CAD = \angle cad$, $\angle ACD = \angle acd$ и $\angle ADC = \angle adc$.

Наконецъ въ подобныхъ треугольникахъ AED и aed уголъ $ADE = \angle ade$, $\angle DAE = \angle dae$ и $\angle E = \angle e$.

Сложивъ равныя величины съ равными, получимъ равныя суммы $\angle BAC + \angle CAD + \angle DAE = \angle bac + \angle cad + \angle dae$, или

$$\angle A = \angle a,$$

$$\angle ACB + \angle ACD = \angle acb + \angle acd, \text{ или } \angle C = \angle c,$$

$$\angle ADC + \angle ADE = \angle adc + \angle ade, \text{ или } \angle D = \angle d.$$

Изъ подобныхъ треугольниковъ ABC и abc составится рядъ равныхъ отношеній

$$\frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc} = \frac{AC}{ac}.$$

Потомъ изъ подобныхъ треугольниковъ ACD и acd мы имѣемъ

$$\frac{AC}{ac} = \frac{CD}{cd} = \frac{AD}{ad}.$$

Наконецъ изъ подобныхъ треугольниковъ ADE и ade получимъ

$$\frac{AD}{ad} = \frac{DE}{de} = \frac{EA}{ea}.$$

Въ выведенныхъ рядахъ равныхъ отношеній выпустивъ общія отношенія, получимъ слѣдующій рядъ

$$\frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc} = \frac{CD}{cd} = \frac{DE}{de} = \frac{EA}{ea}.$$

59. **Обратное предложеніе.** *Два подобные многоугольника могутъ быть раздѣлены діагоналями на одинакое число одинаково расположенныхъ подобныхъ треугольниковъ.*

Внутри многоугольника ABCDE (фиг. 158) возьмемъ какую-



Фиг. 158.

нибудь точку O и соединимъ ее съ оконечностями стороны AB. На сторонѣ *ab*, сходственной боку AB, построимъ $\angle bao = \angle BAO$ и $\angle abo = \angle ABO$; получимъ вершину *o* треугольника *abo*, подобнаго треугольнику ABO (52) и имѣющаго въ многоугольникѣ *abcde* такое-же положенiе, какое имѣетъ треугольникъ ABO въ многоугольникѣ ABCDE.

Потомъ соединимъ точку O съ вершинами C, D, E и точку *o* съ вершинами *c*, *d*, *e*; тогда проведенными прямыми раздѣлятся данные многоугольники на одинакое число треугольниковъ, подобiе которыхъ требуется доказать.

Такъ какъ треугольники OAB и *oab* подобны (по построенiю), то получится пропорцiя

$$\frac{OB}{ob} = \frac{AB}{ab},$$

а вслѣдствiе подобiя данныхъ многоугольниковъ мы имѣемъ

$$\frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc}.$$

Наконецъ изъ двухъ послѣднихъ пропорцiй (12) составится пропорцiя

$$\frac{OB}{ob} = \frac{BC}{bc}.$$

Зная, что $\angle ABC = \angle abc$ и $\angle ABO = \angle abo$, мы получимъ

$$\angle ABC - \angle ABO = \angle abc - \angle abo \text{ или } \angle OBC = \angle obc.$$

Треугольники OBC и *obc* (54) подобны, потому-что $\angle OBC = \angle obc$ и $\frac{OB}{ob} = \frac{BC}{bc}$. Изъ этихъ подобныхъ треугольниковъ выводится $\angle BCO = \angle bco$ и

$$\frac{OC}{oc} = \frac{BC}{bc};$$

но по заданiю $\angle BCD = \angle bcd$ и $\frac{BC}{bc} = \frac{CD}{cd}$; слѣдовательно получимъ

$$\angle BCD - \angle BCO = \angle bcd - \angle bco \text{ или } \angle OCD = \angle ocd$$

и изъ двухъ послѣднихъ пропорцій (12) составимъ пропорцію

$$\frac{OC}{oc} = \frac{CD}{cd}.$$

Отсюда мы заключаемъ, что треугольники OCD и *ocd* подобны (54).

Точно такимъ-же образомъ доказывается, что треугольники ODE и *ode* подобны, и также треугольники OAE и *oae* подобны.

60. Слѣдствіе. Если соединеніемъ точекъ O и *o* (фиг. 158), взятыхъ внутри подобныхъ многоугольниковъ ABCDE и *abcde*, съ оконечностями сходственныхъ сторонъ AB и *ab*, образуются подобные треугольники, одинаково расположенные относительно данныхъ многоугольниковъ, то точки O и *o* называются *соотвѣтственными*.

Двѣ соотвѣтственныя точки могутъ быть приняты за центръ дѣленія подобныхъ многоугольниковъ на подобные и одинаково расположенные треугольники.

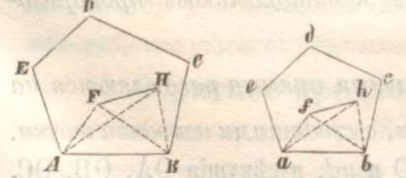
Если точка O находится внѣ многоугольника ABCDE, то соотвѣтственная ей точка *o* должна находиться внѣ многоугольника *abcde*.

Двѣ прямыя, лежащія въ плоскости двухъ подобныхъ многоугольниковъ, называются *соотвѣтственными*, если оконечности одной изъ этихъ прямыхъ суть точки, соотвѣтственныя оконечностямъ другой прямой; такъ напримѣръ діагонали двухъ подобныхъ многоугольниковъ суть соотвѣтственныя прямыя, если они проведены чрезъ соотвѣтственныя вершины.

61. **Теорема.** *Двѣ соотвѣтственныя прямыя пропорціональны сходственнымъ сторонамъ двухъ подобныхъ многоугольниковъ.*

Даны (фиг. 159) два подобные многоугольника ABCDE и *abcde*, и двѣ соотвѣтственныя прямыя FH и *fh*.

Фиг. 159.



По подобію треугольниковъ ABF и *abf* мы имѣемъ $\angle ABF = \angle abf$ и пропорцію $\frac{FB}{fb} = \frac{AB}{ab}$ (54); а изъ

подобныхъ треугольниковъ HAB и hab получится $\angle \mathrm{HBA} = \angle hba$ и $\frac{\mathrm{HB}}{hb} = \frac{\mathrm{AB}}{ab}$ (54). Отсюда слѣдуетъ $\angle \mathrm{HBA} - \angle \mathrm{ABF} = \angle hba - \angle abf$ или $\angle \mathrm{FBH} = \angle fbh$, и изъ двухъ послѣднихъ пропорцій (12) составится пропорція $\frac{\mathrm{FB}}{fb} = \frac{\mathrm{HB}}{hb}$; слѣдовательно треугольники BFH и bfh подобны (54). Изъ этихъ подобныхъ треугольниковъ выводится $\frac{\mathrm{FB}}{fb} = \frac{\mathrm{FH}}{fh}$; но по заданію $\frac{\mathrm{FB}}{fb} = \frac{\mathrm{AB}}{ab}$, слѣдовательно

$$\frac{\mathrm{FH}}{fh} = \frac{\mathrm{FB}}{fb} = \frac{\mathrm{AB}}{ab}.$$

62. **Теорема.** *Периметры двухъ подобныхъ многоугольниковъ пропорціональны сходственнымъ сторонамъ.*

Изъ подобныхъ многоугольниковъ ABCDE и $abcde$ выводится рядъ равныхъ отношеній

$$\frac{\mathrm{AB}}{ab} = \frac{\mathrm{BC}}{bc} = \frac{\mathrm{CD}}{cd} = \frac{\mathrm{DE}}{de} = \frac{\mathrm{EA}}{ea},$$

въ которомъ по предъидущему (15)

$$\frac{\mathrm{AB} + \mathrm{BC} + \mathrm{CD} + \mathrm{DE} + \mathrm{EA}}{ab + bc + cd + de + ea} = \frac{\mathrm{AB}}{ab}.$$

Означивъ периметръ многоугольника ABCDE чрезъ P и периметръ многоугольника $abcde$ чрезъ P', изъ послѣдней пропорціи получимъ

$$\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{P'}} = \frac{\mathrm{AB}}{ab}.$$

Слѣдствіе. По предъидущему (61) извѣстно, что $\frac{\mathrm{FH}}{fh} = \frac{\mathrm{AB}}{ab}$. Сравнивъ эту пропорцію съ пропорціею $\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{P'}} = \frac{\mathrm{AB}}{ab}$, мы получимъ

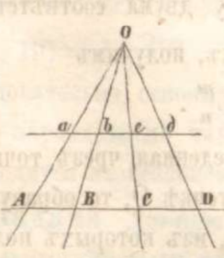
$$\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{P'}} = \frac{\mathrm{FH}}{fh};$$

т. е. *периметры двухъ подобныхъ многоугольниковъ пропорціональны сходственнымъ прямымъ.*

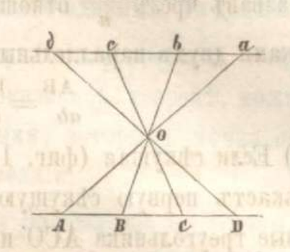
63. **Теорема.** *Двѣ параллельныя прямыя раздѣляются на пропорціональныя части прямыми, выходящими изъ одной точки.*

Даны параллельныя прямыя AD и ad, и сѣкущія OA, OB, OC,

Фиг. 160.



Фиг. 161.



OD, выходящія изъ точки O, лежащей или внѣ параллельныхъ (фиг. 160) или между ними (фиг. 161). Требуется доказать, что

$$\frac{AB}{ab}=\frac{BC}{bc}=\frac{CD}{cd}.$$

Изъ подобныхъ треугольниковъ OAB и Oab получимъ (52)

$$\frac{AB}{ab}=\frac{OB}{Ob}.$$

Потомъ изъ подобныхъ треугольниковъ OBC и Obc выводится

$$\frac{OB}{Ob}=\frac{BC}{bc}=\frac{OC}{Oc}$$

и изъ подобныхъ треугольниковъ OCD и Ocd получимъ $\frac{OC}{Oc}=\frac{CD}{cd}$.

Въ выведенныхъ рядахъ равныхъ отношеній выпустивъ общія отношенія, получимъ

$$\frac{AB}{ab}=\frac{BC}{bc}=\frac{CD}{cd}.$$

64. Слѣдствіе. Изъ тѣхъ-же подобныхъ треугольниковъ выводится слѣдующій рядъ равныхъ отношеній

$$\frac{AB}{ab}=\frac{OA}{Oa}=\frac{OB}{Ob}=\frac{OC}{Oc}=\frac{OD}{Od},$$

который показываетъ, что *отношеніе между двумя соотвѣтствующими отрѣзками двухъ параллельныхъ прямыхъ равно отношенію между разстояніями точки* O *отъ точекъ пересѣченія какой-либо сѣкущей съ данными параллельными.*

65. Обратное предложеніе. *Сѣкущія, которыми двѣ параллельныя прямыя раздѣляются на части пропорціональныя, встрѣчаются въ одной точкѣ.*

Назвавъ чрезъ $\frac{m}{n}$ отношеніе между двумя соотвѣтствующими отрѣзками двухъ параллельныхъ прямыхъ, получимъ

$$\frac{AB}{ab}=\frac{BC}{bc}=\frac{CD}{cd}=\frac{m}{n}.$$

1) Если сѣкущая (фиг. 160), проведенная чрезъ точки C и c, пересѣкаетъ первую сѣкущую AO въ точкѣ O, то образуются два подобные треугольника ACO и acO (52), изъ которыхъ получимъ

$$\frac{OA}{Oa}=\frac{AC}{ac};$$

но по заданію $\frac{AB}{ab}=\frac{BC}{bc}$, откуда (14)

$$\frac{AB+BC}{ab+bc}=\frac{AB}{ab} \text{ или } \frac{AC}{ac}=\frac{AB}{ab}=\frac{m}{n};$$

слѣдовательно $\frac{OA}{Oa}=\frac{m}{n}$, т. е. сѣкущая C$c$ пересѣкаетъ первую сѣкущую въ точкѣ O, которою образуются отрѣзки OA и Oa, пропорціональныя числамъ m и n.

Подобнымъ образомъ доказывается, что всѣ сѣкущія, проведенныя чрезъ данныя точки двухъ параллельныхъ, пересѣкаютъ первую сѣкущую въ точкѣ O.

2) Представимъ себѣ, что между данными параллельными (фиг. 161) проведены двѣ сѣкущія Aa и Dd, которыя съ отрѣзками AD и ad, образуютъ два подобные треугольника ADO и adO (52). Изъ этихъ треугольниковъ получится

$$\frac{OA}{Oa}=\frac{AD}{ad};$$

но по заданію $\frac{AB}{ab}=\frac{BC}{bc}=\frac{CD}{cd}$, откуда (15)

$$\frac{AB+BC+CD}{ab+bc+cd}=\frac{AB}{ab} \text{ или } \frac{AD}{ad}=\frac{AB}{ab}=\frac{m}{n};$$

слѣдовательно $\frac{OA}{Oa}=\frac{m}{n}$, т. е. сѣкущая D$d$ раздѣляетъ сѣкущую Aa въ точкѣ O на два отрѣзка, пропорціональные числамъ m и n.

Подобнымъ образомъ доказывается, что всѣ сѣкущія проведенныя чрезъ точки, данныя на параллельныхъ прямыхъ, пересѣкаютъ первую сѣкущую въ одной точкѣ O.

Слѣдствіе. Если отношеніе $\frac{m}{n}$ равно единицѣ, то должно быть AB $=$ ab, BC $=$ bc, CD $=$ cd, и сѣкущія параллельны между собою; слѣдовательно основываясь на доказанной теоремѣ, можно назвать двѣ параллельныя такими прямыми, которыхъ точка пересѣченія находится въ безконечномъ разстояніи.

66. **Задача.** *Данную прямую a раздѣлить на части, пропорціональныя даннымъ прямымъ m, n, p* (фиг. 162).

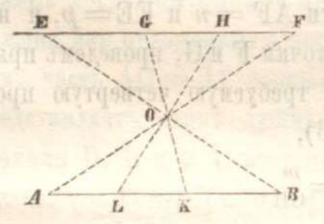


Фиг. 162.

Начертимъ острый уголъ CAD и отложимъ на его сторонѣ AC часть AE $= a$ и на сторонѣ AD части AF $= m$, FG $= n$ и GH $= p$. Потомъ проведемъ прямую HE и къ ней параллельно прямыя FL и GK; тогда прямая AE $= a$ раздѣлится въ точкахъ L и K на части, пропорціональныя прямымъ m, n, p. Въ самомъ дѣлѣ (42),

$$\frac{AL}{AF}=\frac{LK}{FG}=\frac{KE}{GH} \text{ или } \frac{AL}{m}=\frac{LK}{n}=\frac{KE}{p}.$$

2) Къ прямой AB $= a$ проведемъ параллельно прямую EF (фиг. 163) и на ней отложимъ части EG $= p$, GH $= n$ и HF $= m$. Потомъ соединимъ точки A и F, и точки B и E. Проведя прямыя GK и HL чрезъ точки G и H, и точку O пересѣченія прямыхъ AF и BE, мы раздѣлимъ прямую AB въ точкахъ L и K пропорціонально даннымъ прямымъ. Въ самомъ дѣлѣ (63),



Фиг. 163.

$$\frac{AL}{FH}=\frac{LK}{HG}=\frac{KB}{GE} \text{ или } \frac{AL}{m}=\frac{LK}{n}=\frac{KB}{p}.$$

Примѣчаніе. Если требуется раздѣлить данную прямую a пропорціонально числамъ m, n, p, то начертивъ уголъ CAD (фиг. 162), отложимъ AE $= a$ и потомъ отложимъ m равныхъ частей отъ A до

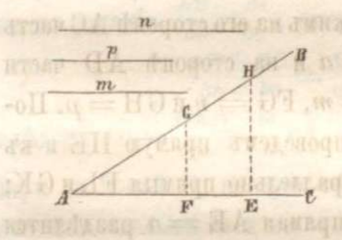
F, n такихъ-же частей отъ F до G и p такихъ-же частей отъ G до H. Наконецъ соединивъ точки E и H, проведемъ прямыя GK и FL параллельно къ HE.

Этотъ-же вопросъ можетъ быть рѣшенъ по способу (2, фиг. 163).

67. **Задача.** *Къ тремъ даннымъ прямымъ* n, p, m *найти четвертую пропорціональную.*

1) Начертимъ острый уголъ BAC (фиг. 164) и на его сторонѣ AC отложимъ части $AE = n$ и $AF = p$. На сторонѣ AB отложимъ часть $AG = m$, и соединивъ точки F и G, проведемъ прямую EH параллельно къ FG; получимъ требуемую четвертую пропорціональную AH. Въ самомъ дѣлѣ (37),

Фиг. 164.



$$\frac{AE}{AF}=\frac{AH}{AG} \text{ или } \frac{n}{p}=\frac{AH}{m}.$$

2) По предъидущему отложивъ части $AE = n$ и $AF = p$, мы отложимъ часть $AH = m$ и проведемъ прямую HE. Наконецъ проведемъ прямую FG параллельно къ EH; получимъ требуемую четвертую пропорціональную AG. Въ самомъ дѣлѣ (37),

$$\frac{AE}{AF}=\frac{AH}{AG} \text{ или } \frac{n}{p}=\frac{m}{AG}.$$

3) На сторонѣ AC отложимъ части $AF = n$ и $FE = p$, и на сторонѣ AB часть $AG = m$. Соединивъ точки F и G, проведемъ прямую EH параллельно къ FG; получимъ требуемую четвертую пропорціональную GH. Въ самомъ дѣлѣ (36),

$$\frac{AF}{FE}=\frac{AG}{GH} \text{ или } \frac{n}{p}=\frac{m}{GH}.$$

68. **Задача.** *На данной прямой* ab *построить треугольникъ, подобный данному треугольнику* ABC (фиг. 153).

При точкѣ a прямой ab построимъ уголъ $bac = \angle BAC$ и при точкѣ b уголъ $abc = \angle ABC$. Полученный треугольникъ abc подобенъ треугольнику ABC (52).

69. **Задача.** *На данной прямой ab построить многоугольникъ, подобный данному многоугольнику* ABCDE (фиг. 157).

Раздѣлимъ данный многоугольникъ діагоналями AC и AD на треугольники. Потомъ на прямой *ab* построимъ треугольникъ *abc*, подобный треугольнику ABC (68), на прямой *ac* треугольникъ *acd*, подобный треугольнику ACD и на прямой *ad* треугольникъ *ade*, подобный треугольнику ADE. Многоугольникъ *abcde* подобенъ многоугольнику ABCDE (58).

70. *Примѣчаніе.* Если требуется построить на бумагѣ многоугольникъ, подобный многоугольнику ABCDE, находящемуся въ натурѣ, то должно построить углы *abc*, *bcd*, *cde* и т. д., соотвѣтственно равные угламъ ABC, BCD, CDE и т. д., и отложить прямыя *ab*, *bc*, *cd* и т. д. такимъ образомъ, чтобы составились отношенія $\frac{ab}{AB}=\frac{bc}{BC}=\frac{cd}{CD}=$ и т. д. Для выполненія послѣдняго условія употребляется построеніе, называемое *масштабомъ*.

1) На какой-нибудь прямой (фиг. 165) отложимъ части, рав-

Фиг. 165.

ныя AC, CD, DB, равныя одному дюйму каждая часть (отложенныя прямыя могутъ быть также произвольной длины). Предположивъ, что каждая изъ отложенныхъ частей представляетъ одинъ футъ, раздѣлимъ часть AC на 12 равныхъ частицъ; каждая изъ этихъ частицъ представляетъ одинъ дюймъ. Точку C означимъ цифрою 0, а подъ точками D, B и т. д. поставимъ цифры 1, 2 и т. д.; этими цифрами означаются футы. Для означенія дюймовъ поставимъ цифры 2, 4, 6 и т. д. подъ соотвѣтствующими точками части AC. Чтобы по этому масштабу нанести на бумагу прямую, которой истинная длина равна 1 фут. 5 дюйм., мы поставимъ одну ножку циркуля вправо отъ нуля, въ точкѣ D, подписанной цифрою 1, а другую ножку влѣво отъ нуля, въ точкѣ, находящейся между цифрами 4 и 6. Раствореніемъ цир-

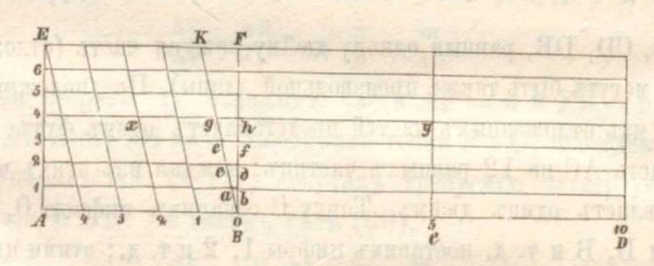
куля выразится длина въ 1 фут. 5 дюйм. *по масштабу одного фута въ дюймъ*. Прямая ab, нанесенная на бумагу по этому масштабу, относится къ дѣйствительной прямой AB точно такъ, какъ одинъ дюймъ относится къ одному футу; слѣдовательно $ab = {}^1/_{12}AB$.

Если въ построенномъ масштабѣ (фиг. 165) часть AC (дюймъ) представляетъ 12 футъ, то каждая частица прямой AC соотвѣтствуетъ 1 футу; тогда прямая CD, содержащая 12 фут., изобразится на бумагѣ прямою cd, равною 1 дюйму, т. е. $cd = {}^1/_{144}CD$; слѣдовательно всѣ прямыя, начерченныя на бумагѣ по этому масштабу, въ 144 раза меньше соотвѣтствующихъ имъ прямыхъ въ натурѣ.

Масштабъ, представленный въ (фиг. 165), называется *линейнымъ*.

2) Положимъ, что требуется построить такой масштабъ, котораго дюймъ долженъ соотвѣтствовать 5 саженямъ, и по которому было бы возможно откладывать футы. Такъ какъ 5 саж. = 35 фут. и дюймъ долженъ соотвѣтствовать 5 саж., то масштабъ долженъ содержать 35-ыя части дюйма. Для построенія такого масштаба проведемъ какую-нибудь прямую (фиг. 166) и на ней отложимъ части

Фиг. 166.



AB, BC, CD и т. д., равныя одному дюйму. Къ проведенной прямой возставимъ перпендикуляры изъ полученныхъ точекъ дѣленія и раздѣлимъ часть AB на 5 равныхъ частицъ. На крайнемъ перпендикулярѣ, возставленномъ изъ токки A, отложимъ до точки E семь произвольныхъ, но равныхъ частей, и чрезъ точки дѣленія проведемъ прямыя параллельно къ AD. Тогда $KF = {}^1/_5AB$, $Bb = bd =$

$df =$ и т. д. $= {}^1/_7$BF и треугольники BKF, Bab, Bcd, Bef и т. д. подобны. Изъ этихъ подобныхъ треугольниковъ выводятся пропорціи

$$\frac{KF}{ab} = \frac{BF}{Bb} = {}^7/_1, \ \frac{KF}{cd} = \frac{BF}{Bd} = {}^7/_2,$$

$$\frac{KF}{ef} = \frac{BF}{Bf} = {}^7/_3, \ \frac{KF}{gh} = \frac{BF}{Bh} = {}^7/_4 \text{ и т. д.};$$

откуда получимъ

$ab = {}^1/_7$KF, $cd = {}^2/_7$KF, $ef = {}^3/_7$KF, $gh = {}^4/_7$KF и т. д.

Зная, что KF $= {}^1/_5$AB, мы имѣемъ

$ab = {}^1/_{35}$AB, $cd = {}^2/_{35}$AB, $ef = {}^3/_{35}$AB, $gh = {}^4/_{35}$AB и т. д.; но AB = 5 саж. = 35 фут., слѣдовательно

$ab = 1$ фут., $cd = 2$ фут., $ef = 3$ фут., $gh = 4$ фут. и т. д.

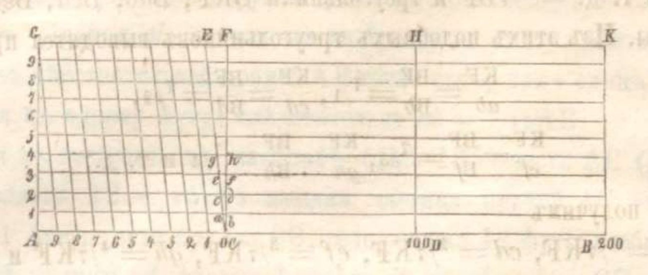
Цифры, написанныя подъ прямою AD, означаютъ сажени, а цифры, поставленныя подлѣ перпендикуляра AE, означаютъ футы.

Чтобы по этому масштабу отложить 7 саж. 4 фут., поставимъ одну ножку циркуля на перпендикулярѣ, проходящемъ чрезъ цифру 5, въ точкѣ y пересѣченія съ параллельною, проходящею чрезъ точку 4 перпендикуляра AE (потому-что данное число содержитъ 4 фута); другую ножку циркуля поставимъ на той-же самой параллельной, въ точкѣ x пересѣченія съ наклонною, проходящею чрезъ цифру 2 прямой AB. Полученное раствореніе циркуля равно по масштабу 7 саж. 4 фут., потому-что $xy = xg + gh + hy = 2$ саж. $+ 4$ фут. $+$ 5 саж.

Такъ какъ дюймъ этого масштаба означаетъ 5 саж. $= 84 \times 5 = 420$ дюйм., то между прямою GH въ натурѣ и ея изображеніемъ gh на бумагѣ существуетъ отношеніе GH $= 420gh$ или $gh = {}^1/_{420}$GH.

Масштабъ (фиг. 166) называется *поперечнымъ*. Поперечный масштабъ, по которому возможно откладывать сотыя доли дюйма, называется *сотеннымъ* масштабомъ. Чтобы построить сотенный масштабъ, мы отложимъ на какой-нибудь прямой (фиг. 167) части AC, CD, DB, равныя одному дюйму, и изъ точекъ A, C, D, B воз

Фиг. 167.



ставимъ перпендикуляры къ AB. Потомъ раздѣлимъ часть AC на 10 равныхъ частей и на крайнемъ перпендикулярѣ AG отложимъ 10 произвольныхъ, но равныхъ частей. Чрезъ точки этого перпендикуляра проведемъ прямыя параллельно къ AB и соединимъ точку G съ девятою точкою части AC. Наконецъ проведемъ наклонныя чрезъ точки C, 1, 2, 3 и т. д. части AC параллельно къ наклонной G9.

Изъ образовавшихся подобныхъ треугольниковъ CEF, C*ab*, C*cd*, C*ef* и т. д. выводятся пропорціи

$$\frac{EF}{ab}=\frac{CF}{Cb}={}^{10}/_{1},\ \frac{EF}{cd}=\frac{CF}{Cd}={}^{10}/_{2},$$

$$\frac{EF}{ef}=\frac{CF}{Cf}={}^{10}/_{3},\ \frac{EF}{gh}=\frac{CF}{Ch}={}^{10}/_{4}\text{ и т. д.};$$

откуда $ab=0{,}1EF$, $cd=0{,}2EF$, $ef=0{,}3EF$, $gh=0{,}4EF$ и т. д., но $EF=0{,}1\ AC=0{,}1$ дюйма, слѣдовательно $ab=0{,}01$ дюйма, $cd=0{,}02$ дюйма, $ef=0{,}03$ дюйма и т. д. Цифры, поставленныя подъ прямою AC, означаютъ десятыя доли дюйма, а цифры, написанныя подлѣ перпендикуляра AG, относятся къ сотымъ долямъ дюйма.

Если часть AC (или дюймъ) означаетъ 100 сажень, то $EF=10$ саж., $ab=1$ саж., $cd=2$ саж., $ef=3$ саж. и т. д. Чтобы по этому масштабу отложить, напримѣръ 287 сажень, поставимъ одну ножку циркуля на перпендикулярѣ, подписанномъ числомъ 200, въ точкѣ пересѣченія съ параллельною, проходящею чрезъ цифру 7 перпендикуляра AG; потомъ поставимъ другую ножку циркуля на той-

же параллельной, въ точкѣ пересѣченія съ наклонною, проходящею чрезъ цифру 8 части AC.

Если часть AC означаетъ 100 саж. или 8400 дюйм., то прямая MN въ натурѣ больше ея изображенія *mn* на бумагѣ, во столько разъ, во сколько разъ 8400 дюйм. больше 1 дюйма; слѣдовательно

$$mn = {}^{1}/_{8400}\ MN$$ [1].

ЧИСЛЕННЫЕ ВОПРОСЫ.

56) Стороны треугольника ABC содержатъ 17,4 саж., 23,4 саж. и 31,8 саж., а наименьшая сторона *ab* треугольника *abc*, подобнаго треугольнику ABC, равна 5,8 саж. Узнать, сколько сажень содержитъ наибольшая сторона *ac*?

57) Периметръ равносторонняго треугольника ABC равенъ 49 саж. Сколько сажень содержитъ сторона *ab* треугольника *abc*, подобнаго треугольнику ABC, когда извѣстно, что $ab = 0{,}3$ AB.

58) Въ двухъ подобныхъ прямоугольныхъ треугольникахъ ABC и *abc* гипотенуза $ac = 6{,}3$ дюйма, $\frac{AB}{ab} = {}^4/_3$ и $AB = {}^5/_9\ AC$. Сколько дюймовъ содержитъ катетъ *ab*?

59) Даны два подобные треугольника ABC и *abc*. Сторона $AB = m$ фут., $BC = n$ фут., $AC = p$ фут. и $ab = m'$ фут. Вывести формулы для сторонъ *ac* и *bc*.

60) Сколько дюймовъ содержитъ прямая AD (фиг. 160), если $ad = 7{,}5$ дюйм. и $AB = {}^7/_5\ ab$?

61) Сколько дюймовъ содержитъ прямая *ad* (фиг. 161), если $AB = 3{,}4$ дюйм., $BC = 3{,}6$ дюйм., $CD = 4{,}5$ дюйм. и $AO = {}^3/_4 ao$?

62) Даны два подобные треугольника ABC и *abc*, въ которыхъ стороны: $AB = 4{,}2$ фута, $BC - AC = 0{,}8$ фута, $ab = 1{,}4$ фута и $bc = 2{,}2$ фута. Сколько футъ содержатъ стороны AC, BC, *ac*?

63) По масштабу 50 сажень въ дюймѣ требуется начертить треугольникъ *abc*, подобный треугольнику ABC, въ которомъ AB = 38

[1] Поперечный масштабъ былъ уже извѣстенъ знаменитому астроному Тихо-де-Браге (Tycho-de-Brahe) въ 1573 году; но изобрѣтатель этого масштаба неизвѣстенъ. Французы приписываютъ это изобрѣтеніе математику Дезаргъ (Desargues), который однако жилъ послѣ Тихо-де-Браге.

саж., АС = 27 саж., ВС = 28 саж. Сколько дюймовъ содержатъ стороны *ab*, *ac*, *bc*?

64) Во сколько разъ прямая *mn* на бумагѣ меньше прямой MN въ натурѣ, если часть АС масштаба (фиг. 167), равная полудюйму, соотвѣтствуетъ 15 саженямъ?

65) Периметры двухъ равностороннихъ треугольниковъ пропорціональны числамъ 7 и 4, и высота малаго треугольника равна 22 фут. Сколько футъ содержитъ высота большаго треугольника?

66) Периметры двухъ подобныхъ треугольниковъ АВС и *abc* пропорціональны числамъ 8 и 3, и сторона $ab = 4{,}5$ фут. Сколько футъ содержитъ сторона АВ?

67) Треугольникъ *abc*, начерченный на бумагѣ, подобенъ треугольнику АВС, сторона $ab = 2{,}24$ дюйма и $AB = 56$ саж. Сколько принято сажень въ дюймѣ масштаба для начертанія треугольника *abc*?

68) Даны два подобные многоугольника (фиг. 157). Периметръ $ABCDE = 84$ саж., периметръ $abcde = 25$ саж. и діагональ $AD = 3\,^2/_7$ саж. Сколько сажень содержитъ діагональ *ad*?

69) Въ подобныхъ треугольникахъ АВС и *abc* опущены перпендикуляры AD и *ad* на стороны ВС и *bc*, $\angle ABC = \angle ACB = \angle abc = \angle acb$, $AB = 15\,^1/_2$ фут., $ab = 8\,^3/_4$ фут., $BC = 13\,^1/_3$ фут. и $AD = {}^9/_4 BD$. Сколько футъ содержитъ *ad*?

70) По масштабу 100 сажень въ дюймѣ начерченъ треугольникъ *abc*, подобный данному треугольнику АВС, и получилось $ab = 1{,}76$ дюйм., $ac = 0{,}68$ дюйм. и $bc = 0{,}84$ дюйм. Сколько сажень содержатъ стороны АВ, АС, ВС?

71) Даны два подобные треугольника АВС и *abc*. Периметръ треугольника *abc* равенъ 4,8 дюйма, и $AB = 4{,}5$ дюйм., $BC = 6{,}3$ дюйм., $AC = 4{,}2$ дюйм. Сколько дюймовъ содержатъ стороны *ab*, *bc* и *ac*?

72) Даны два подобные пятиугольника. Стороны большаго пятиугольника содержатъ 12 фут., 20 фут., 11 фут., 15 фут., 22 фут. и периметръ меньшаго равенъ 16 фут. Сколько футъ содержатъ стороны меньшаго пятиугольника?

73) Даны два подобные треугольника АВС и *abc*. Периметръ большаго треугольника равенъ 92,4 фут., периметръ меньшаго равенъ 13,2 фут. и сторона АВ больше стороны *ab* на 31,5 фут. Сколько футъ содержатъ стороны АВ и *ab*?

74) По масштабу 250 саж. въ дюймѣ требуется начертить тре-

угольникъ *abc*, подобный данному треугольнику ABC, въ которомъ AB = 185 саж., AC = 196 саж. и BC = 178 саж. Сколько дюймовъ должны содержать стороны *ab*, *ac* и *bc*?

75) Даны два подобные треугольника ABC и *abc*. Периметръ треугольника ABC больше периметра треугольника *abc* на 26 саж., сторона AB=4 саж. и *ab* = $5^1/_4$ фут. Сколько сажень содержатъ периметры этихъ треугольниковъ?

76) Даны два подобные треугольника ABC и *abc*. Периметръ треугольника *abc* содержитъ $13^7/_8$ саж. и AB = $7^1/_4$ саж., AC = $9^1/_2$ саж., BC = 11 саж. Сколько сажень содержатъ стороны *ab*, *ac*, *bc*?

77) Въ треугольникѣ ABC сторона AB = $^4/_7$ BC и AC = 56 саж.; въ треугольникѣ *abc*, подобномъ треугольнику ABC, сторона *ab* = 13 саж. и *ac* = 18 саж. Сколько сажень содержатъ стороны AB, BC и *bc*?

ТЕОРЕМЫ.

78) Въ трапеціи ABCD проведены діагонали AC и BD, пересѣкающіяся въ точкѣ O. Требуется доказать, что отрѣзки AO и OC діагонали AC и отрѣзки BO и OD діагонали BD пропорціональны основаніямъ трапеціи.

79) Если соединить какую-нибудь точку P, взятую внутри угла, съ его вершиною A, то отношеніе между разстояніями всякой точки M прямой AP отъ сторонъ угла равно постоянному числу.

80) Прямая EF, соединяющая среднія точки основаній AB и DC трапеціи ABCD, должна пройти чрезъ точку O пересѣченія діагоналей AC и BD.

81) На прямой AB построены треугольники ABC и ABD такимъ образомъ, что ихъ стороны AC и BD параллельны и ихъ вершины C и D находятся на прямой, параллельной къ AB; наконецъ внутри этихъ треугольниковъ проведена прямая EFGH параллельно къ AB. Требуется доказать, что отрѣзки EF и GH равны.

82) Въ кругахъ O и O′, лежащихъ изъ-внѣ, проведены параллельные радіусы OA и O′*a*, и еще параллельные радіусы OB и O′*b*. Требуется доказать, что прямыя A*a* и B*b* пересѣкаются въ одной точкѣ C, лежащей на продолженіи центральной линіи OO′.

83) Если въ параллелограмѣ ABCD опустить перпендикуляры DE и DF на двѣ смежныя стороны AB и AC (или на ихъ продолженія)

изъ противоположной имъ вершины, то эти стороны обратно пропорціональны проведеннымъ перпендикулярамъ.

84) Если изъ вершинъ A, B, C равнобедреннаго треугольника опустить перпендикуляры AD, BE, CF на противоположныя стороны BC, AC, AB, то образуются подобные треугольники: *a*) BOD, COD, AOF, AOE, ADC, ADB, *b*) BOF, COE, ABE, ACF, *c*) AOB и AOC. (Точка пересѣченія проведенныхъ перпендикуляровъ названа чрезъ O).

85) Если чрезъ общую точку A двухъ окружностей C и C′, касающихся изъ-внѣ, провести хорды EF и BD такимъ образомъ, чтобы оконечности B и F находились на окружности C, а оконечности D и E на окружности C′, то хорды BF и DE должны быть параллельны.

86) Въ треугольникѣ ABC между сторонами AB и AC проведена прямая DE такимъ образомъ, что уголъ ADE, составляемый прямыми AB и DE, равенъ углу ACB, составляемому сторонами AC и BC. Требуется доказать, что стороны AB и AC обратно-пропорціональны отрѣзкамъ AD и AE.

Примѣчаніе. Прямыя DE и BC, проведенныя между сторонами угла A, называются *анти-параллельными* относительно этого угла, если уголъ, составляемый прямою BC съ стороною AC, равенъ углу, составляемому прямою DE съ стороною AB.

87) Если вершины A, B, C треугольника ABC соединить съ средними точками D, E, F противолежащихъ сторонъ BC, AC и AB, то прямыя AD, BE и CF пересѣкутся въ одной точкѣ O такимъ образомъ, что $\frac{AO}{OD} = \frac{BO}{OE} = \frac{CO}{OF} = {}^{2}/_{1}$.

88) Если изъ вершины A треугольника ABC опустить перпендикуляръ AD на BC, изъ точки B возставить перпендикуляръ BE = BC къ сторонѣ BC, провести прямую EC, пересѣкающуюся съ стороною AB въ точкѣ F, чрезъ F провести FG параллельно къ BC до пересѣченія G съ стороною AC, и изъ F и G опустить перпендикуляры FH и GK на BC, то образуется квадратъ FGKH.

ЗАДАЧИ ПОСТРОЕНІЯ.

89) Построить равносторонній треугольникъ, котораго высота должна равняться прямой *m*.

90) По масштабу 100 саженъ въ дюймѣ построить треугольникъ,

подобный треугольнику ABC, въ которомъ $\angle ABC = 46^0$, $\angle ACB = 57^0$ и $BC = 184$ саж.

91) По масштабу 100 сажень въ дюймѣ построить треугольникъ, подобный треугольнику ABC, въ которомъ $AB = 112$ саж., $AC = 126$ саж. и $BC = 148$ саж.

92) По масштабу 50 сажень въ дюймѣ построить трапецію, подобную трапеціи ABCD, въ которой $AB = 62$ саж., $AD = 38$ саж., $DC = 54$ саж. и $\angle BAD = 67^0$.

93) По масштабу 50 сажень въ дюймѣ построить трапецію, подобную трапеціи ABCD, въ которой $DC = 63$ саж., $BC = 56$ саж., $\angle CDA = 115^0$ и $\angle DCB = 108^0$.

94) Чрезъ точку P, данную внутри угла ABC, провести прямую такимъ образомъ, чтобы ея часть, лежащая между сторонами BA и BC, раздѣлилась въ точкѣ P на два отрѣзка, пропорціональные числамъ m и n.

95) Прямую AB продолжить такимъ образомъ, чтобы продолженіе BC относилось къ AB или къ AC точно такъ, какъ относятся числа m и n.

96) Въ треугольникѣ ABC чрезъ его вершину A провести прямую такимъ образомъ, чтобы перпендикуляры BD и CE, опущенные на эту прямую изъ вершинъ B и C, относились между собою, какъ числа m и n.

97) Внутри угла ABC найти такую точку, которой разстоянія отъ сторонъ BA и BC относились бы между собою, какъ числа m и n.

98) По данной гипотенузѣ a и извѣстному отношенію $\frac{m}{n}$ между катетами построить прямоугольный треугольникъ.

99) По данному перпендикуляру a, опущенному изъ вершины прямаго угла на гипотенузу, и извѣстному отношенію $\frac{m}{n}$ между катетами, построить прямоугольный треугольникъ.

100) По данному перпендикуляру a, опущенному изъ вершины прямаго угла на гипотенузу, и извѣстному отношенію $\frac{m}{n}$ между отрѣзками гипотенузы, построить прямоугольный треугольникъ.

101) По данному перпендикуляру h, опущенному на основаніе BC,

и перпендикуляру h', опущенному на бокъ AB, построить равнобедренный треугольникъ.

102) Построить треугольникъ по данной высотѣ h, углу p, прилежащему къ основанію, и отношенію $\frac{m}{n}$ между двумя остальными сторонами.

103) Построить треугольникъ ABG такимъ образомъ, чтобы его сторона AB равнялась данной прямой a, перпендикуляръ, опущенный изъ вершины A на противолежащую ей сторону BG, равнялся прямой h и отношеніе между сторонами BG и AG равнялось $\frac{m}{n}$.

104) Построить треугольникъ по данной сторонѣ a, прилежащему къ ней углу p, и отношенію $\frac{m}{n}$ между двумя остальными сторонами.

105) Построить треугольникъ по двумъ сторонамъ a и b, и данной прямой c, соединяющей средину третьей стороны съ вершиною противолежащаго угла.

106) Въ данномъ кругѣ вписать треугольникъ, подобный данному треугольнику ABC.

107) Внутри даннаго треугольника ABC найти такую точку P, чтобы прямыя PA, PB, PC, соединяющія эту точку съ вершинами A, B, C, составляли равные углы.

108) Даны параллельныя прямыя HK и LM, и между ними точка P. На прямой HK дана точка A и на прямой LM точка B. Чрезъ точку P требуется провести прямую EF такимъ образомъ, чтобы на прямыхъ HK и LM образовались отрѣзки AE и BF, пропорціональные числамъ m и n.

109) На сторонѣ AC угла BAC опредѣлить точку, равно-отстоящую отъ стороны AB и отъ точки P, данной внутри угла BAC.

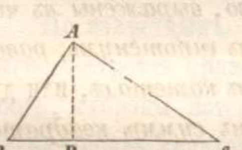
ПЯТАЯ ГЛАВА.

Зависимость между перпендикуляромъ, опущеннымъ изъ вершины прямаго угла прямоугольнаго треугольника на гипотенузу, и отрѣзками гипотенузы. Зависимость между гипотенузою и катетами прямоугольнаго треугольника. Квадратъ числа, выражающаго длину стороны треугольника, противолежащей прямому углу, или острому, или тупому углу. Пропорціональность линій, проведенныхъ въ кругѣ.

71. **Теорема.** *Если въ прямоугольномъ треугольникѣ изъ вершины прямаго угла опущенъ перпендикуляръ на гипотенузу, то 1) каждый изъ катетовъ есть средняя пропорціональная между гипотенузою и прилежащимъ къ нему отрѣзкомъ гипотенузы, и 2) перпендикуляръ есть средняя пропорціональная между отрѣзками гипотенузы.*

1) Въ прямоугольномъ треугольникѣ ABC (фиг. 168) изъ вершины прямаго угла BAC опущенъ перпендикуляръ AD на гипотенузу BC. Этимъ перпендикуляромъ раздѣляется треугольникъ ABC на два подобные ему треугольника ABD и ACD. Въ самомъ дѣлѣ, въ треугольникахъ ABD и ABC уголъ B общій и $\angle ADB = \angle BAC = 90^0$; слѣдовательно $\angle BAD = \angle C$ и эти треугольники подобны. Потомъ въ треугольникахъ ACD и ABC уголъ C общій и $\angle ADC = \angle BAC = 90^0$; слѣдовательно $\angle CAD = \angle B$ и эти треугольники подобны. Изъ подобныхъ треугольниковъ ABC и ABD составится слѣдующая пропорція: BC относится къ AB (потому-что въ треугольникѣ ABC сторона BC лежитъ противъ $\angle BAC$, $\angle BAC = \angle ADB$ и въ треугольникѣ ABD противъ $\angle ADB$ лежитъ сторона AB) точно такъ, какъ AB относится къ BD (потому-что въ треугольникѣ ABC сторона AB лежитъ противъ $\angle C$, $\angle C = \angle BAD$

Фиг. 168.



и въ треугольникѣ ABD противъ $\angle$ BAD лежитъ сторона BD); т. е.

$$\frac{BC}{AB}=\frac{AB}{BD}\cdots\cdots(1).$$

Изъ подобныхъ треугольниковъ ABC и ACD получится слѣдующая пропорція: BC относится къ AC (потому-что эти стороны лежатъ противъ равныхъ угловъ BAC и ADC) точно такъ, какъ AC относится къ DC (потому-что стороны AC и DC лежатъ противъ равныхъ угловъ ABC и CAD); т. е.

$$\frac{BC}{AC}=\frac{AC}{DC}\cdots\cdots(2).$$

2) Такъ какъ $\angle C=\angle BAD$, то прямоугольные треугольники ACD и ABD подобны. Изъ нихъ получится слѣдующая пропорція: BD относится къ AD (потому-что эти стороны лежатъ противъ равныхъ угловъ BAD и ACD) точно такъ, какъ AD относится къ DC (потому-что эти стороны лежатъ противъ равныхъ угловъ ABD и CAD); т. е.

$$\frac{BD}{AD}=\frac{AD}{DC}\cdots\cdots(3).$$

12. **Теорема.** *Если три стороны прямоугольнаго треугольника, измѣренныя одною и тою-же мѣрою, выражены въ числахъ, то квадратъ числа, содержащагося въ гипотенузѣ, равенъ суммѣ квадратовъ чиселъ: содержащихся въ катетахъ*, или другими словами: *квадратъ гипотенузы равенъ суммѣ квадратовъ катетовъ.*

Изъ пропорціи (1 и 2) предъидущей теоремы получимъ

$$\overline{AB}^2=BC\times BD \text{ и } \overline{AC}^2=BC\times DC.$$

Сложивъ эти два равенства по-членно, получимъ

$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=BC\times(BD+DC) \text{ или}$$

$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2\cdots\cdots(4).$$

Примѣчаніе 1. Эта теорема, названная по имени ея изобрѣтателя Пиѳагоровою теоремою, даетъ возможность вычислить одну изъ сторонъ прямоугольнаго треугольника по двумъ извѣстнымъ сторонамъ. Въ самомъ дѣлѣ, если катеты даннаго прямоугольнаго тре-

угольника содержатъ b и c линейныхъ мѣръ, то по формулѣ (4) опредѣлится число a тѣхъ-же линейныхъ мѣръ, содержащихся въ гипотенузѣ, именно

$$a^2 = b^2 + c^2, \text{ откуда } a = \sqrt{b^2 + c^2} \ldots. (5).$$

По извѣстной гипотенузѣ a и данному катету b найдется катетъ c по формулѣ

$$c^2 = a^2 - b^2, \text{ откуда } c = \sqrt{a^2 - b^2} \ldots. (6).$$

Спомощью формулы (6) вычислимъ катетъ AB по извѣстнымъ: гипотенузѣ BC, содержащей 13 саж., и катету AC, равному 5 саж.; получимъ

$$AB = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12.$$

Примѣчаніе 2. Въ формулѣ (5) подставивъ $b = 3$ и $c = 4$, получимъ $a = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$; слѣдовательно треугольникъ, котораго стороны соотвѣтственно равны числамъ 3, 4 и 5, долженъ быть прямоугольный. Всякій прямоугольный треугольникъ, котораго стороны соотвѣтственно равны числамъ $3n$, $4n$ и $5n$, называется *Пиѳагоровымъ треугольникомъ.*

По извѣстнымъ отношеніямъ сторонъ Пиѳагорова треугольника легко построить прямой уголъ. Для этого должно построить треугольникъ, стороны котораго соотвѣтственно равны $3a$, $4a$, $5a$, гдѣ a какая-нибудь линейная мѣра.

Чтобы вывести формулы, по которымъ возможно получить цѣлыя числа для сторонъ прямоугольнаго треугольника, назовемъ его катеты чрезъ b и c, и гипотенузу чрезъ a; тогда (по форм. 6) будетъ

$$c^2 = a^2 - b^2 \text{ или } c^2 = (a + b)\,(a - b).$$

Предположивъ $a + b = x$ и $a - b = y$, получимъ

$$c^2 = x.y,\ x + y = 2a,\ x - y = 2b \text{ или}$$

$$c^2 = x.y,\ a = \frac{x + y}{2},\ b = \frac{x - y}{2}.$$

Чтобы для a и b получились цѣлыя числа, должно взять для x и y или четныя, или нечетныя числа, и вмѣстѣ съ тѣмъ должно

быть $x > y$ и произведеніе $x.y$ должно равняться квадрату цѣлаго числа. Для примѣра предположимъ

$x = 9$ и $y = 1$; тогда $c^2 = 9$, $c = 3$, $b = 4$ и $a = 5$;
$x = 25$ и $y = 1$; „ $c^2 = 25$, $c = 5$, $b = 12$ и $a = 13$;
$x = 49$ и $y = 1$; „ $c^2 = 49$, $c = 7$, $b = 24$ и $a = 25$;
$x = 18$ и $y = 2$; „ $c^2 = 36$, $c = 6$, $b = 8$ и $a = 10$.

Если мы желаемъ получить для a, b, c числа дробныя, то возьмемъ для x число четное (или нечетное) и для y число нечетное (или четное), но чтобы произведеніе $x.y$ равнялось квадрату цѣлаго числа; такъ напримѣръ

для $x = 16$, $y = 1$ получимъ $c^2 = 16$, $c = 4$, $b = {}^{15}/_2$ и $a = {}^{17}/_2$;
„ $x = 49$, $y = 4$ „ $c^2 = 196$, $c = 14$, $b = {}^{45}/_2$ и $a = {}^{53}/_2$.

73. Слѣдствіе. Въ квадратѣ ABCD (фиг. 169) проведя діагональ AC, получимъ равнобедренный прямоугольный треугольникъ ABC, въ которомъ

Фиг. 137.

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 2AB^2;$$

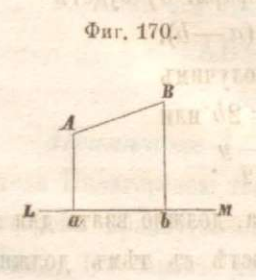
откуда $AC = AB\sqrt{2}$..... (7).

Изъ этой формулы выводится

$$\frac{AC}{AB} = \sqrt{2} \; ..... \; (8),$$

т. е. *отношеніе между діагональю и бокомъ квадрата равно* $\sqrt{2}$.

Извѣстно, что $\sqrt{2}$ есть число ирраціональное (т. е. не существуетъ никакого цѣлаго и никакого дробнаго числа, котораго вторая степень равнялась бы числу 2); слѣдовательно *діагональ и бокъ квадрата суть двѣ несоизмѣримыя прямыя.*



Фиг. 170.

74. *Проекціею точки* A (фиг. 170) на прямой LM называется основаніе a перпендикуляра, опущеннаго изъ данной точки на данную прямую.

Если изъ оконечныхъ точекъ A и B данной прямой опущены перпендикуляры на прямую LM, то разстояніе ab между основа-

ніями этихъ перпендикуляровъ называется *проекціею прямой* AB на LM.

75. **Теорема.** *Хорда есть средняя пропорціональная между діаметромъ, проходящимъ чрезъ ея оконечность, и ея проекціею на этомъ діаметрѣ.*

Даны (фиг. 171): хорда AB, діаметръ BC и перпендикуляръ AD, опущенный изъ точки A на діаметръ BC.

Фиг. 171.

Проведя хорду AC, получимъ прямоугольный треугольникъ ABC, изъ котораго мы имѣемъ (1)

$$\frac{BC}{AB}=\frac{AB}{BD},$$

гдѣ BD есть проекція хорды AB на діаметрѣ BC.

Слѣдствіе. Изъ треугольника ABC (фиг. 171) получится также (3)

$$\frac{BD}{AD}=\frac{AD}{DC},$$

т. е. *перпендикуляръ, спущенный изъ какой-нибудь точки окружности на діаметръ, есть средняя пропорціональная между отрѣзками этого діаметра.*

76. **Задача.** *Между двумя данными прямыми m и n найти среднюю пропорціональную.*

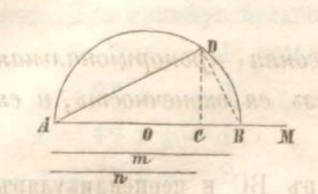
1) На какой-нибудь прямой AM (фиг. 172) отложимъ $AC=m$ и $CD=n$. На прямой AD описавъ полуокружность, возставимъ перпендикуляръ изъ C къ діаметру AD до пересѣченія B съ полуокружностью; получимъ требуемую прямую CB. Въ самомъ дѣлѣ (слѣд. 75),

Фиг. 172.

$$\frac{AC}{BC}=\frac{BC}{CD} \text{ или } \frac{m}{BC}=\frac{BC}{n}.$$

2) На какой-нибудь прямой AM (фиг. 173) отложимъ $AB=m$ и $AC=n$. На прямой AB опишемъ полуокружность и къ діаметру AB изъ точки C возставимъ перпендикуляръ до пересѣченія D съ

Фиг. 173.



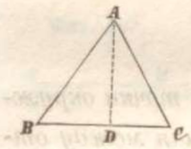
полуокружностью. Наконецъ соединивъ точки A и D, получимъ требуемую прямую AD, потому-что (75)

$$\frac{AB}{AD}=\frac{AD}{AC} \text{ или } \frac{BC}{m}=\frac{n}{BC}.$$

77. Теорема. *Во всякомъ треугольникѣ квадратъ стороны, противолежащей острому углу, равенъ суммѣ квадратовъ двухъ остальныхъ сторонъ, уменьшенной удвоеннымъ произведенiемъ одного изъ этихъ боковъ и проекцiи другаго бока, взятой на первой сторонѣ.*

1) Данъ треугольникъ ABC (фиг. 174), въ которомъ B острый уголъ, BD проекцiя стороны AB на BC; требуется доказать, что

Фиг. 174.



$$\overline{AC}^2=\overline{BC}^2+\overline{AB}^2-2BC\times CD.$$

Изъ прямоугольнаго треугольника ACD мы имѣемъ

$$\overline{AC}^2=\overline{CD}^2+\overline{AD}^2 \ldots\ldots (1).$$

Такъ какъ перпендикуляръ AD находится внутри треугольника, то

$$CD=BC-BD.$$

Принявъ CD, BC и BD за числа и зная, что квадратъ разности двухъ чиселъ равенъ квадрату перваго числа безъ удвоеннаго произведенiя этихъ чиселъ и вмѣстѣ съ квадратомъ втораго числа, мы получимъ

$$\overline{CD}^2=\overline{BC}^2-2BC\times BD+\overline{BD}^2.$$

Подставимъ величину $\overline{CD}^2$ въ выраженiе (1); получится

$$\overline{AC}^2=\overline{BC}^2+\overline{BD}^2+\overline{AD}^2-2BC\times BD.$$

Въ послѣднемъ выраженiи мы замѣнимъ сумму $\overline{BD}^2+\overline{AD}^2$ чрезъ $\overline{AB}^2$, потому-что въ прямоугольномъ треугольникѣ ABD сумма $\overline{BD}^2+\overline{AD}^2=\overline{AB}^2$; получимъ

$$\overline{AC}^2=\overline{BC}^2+\overline{AB}^2-2BC\times BD.$$

2) Такъ какъ перпендикуляръ AD (фиг. 175) находится внѣ треугольника ABC, то

Фиг. 175.

$$CD = BD - BC \text{ и}$$

$$\overline{CD}^2 = \overline{BD}^2 - 2BD \times BC + \overline{BC}^2; \text{ откуда}$$

$$\overline{AC}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{AD}^2 + \overline{BC}^2 - 2BD \times BC \text{ или}$$

замѣнивъ $\overline{BD}^2 + \overline{AD}^2$ чрезъ $\overline{AB}^2$, получимъ

$$\overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AB}^2 - 2BD \times BC.$$

78. Теорема. *Если въ треугольникѣ тупой уголъ, то квадратъ стороны, противолежащей этому углу, равенъ суммѣ квадратовъ двухъ остальныхъ сторонъ, увеличенной удвоеннымъ произведенiемъ одного изъ этихъ боковъ и проекцiи другаго бока, взятой на первой сторонѣ.*

Въ данномъ треугольникѣ ABC (фиг. 175) уголъ C тупой и CD проекцiя стороны AC на BC. Требуется доказать, что

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 + 2BC \times CD.$$

Изъ прямоугольнаго треугольника ABD имѣемъ

$$\overline{AB}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{AD}^2 \ldots\ldots (1).$$

Такъ какъ перпендикуляръ AD находится внѣ треугольника ABC, то

$$BD = BC + CD;$$

$$\text{откуда } \overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + 2BC \times CD + \overline{CD}^2.$$

Подставивъ величину для $\overline{BD}^2$ въ выраженiе (1), получимъ

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2 + 2BC \times CD.$$

Въ послѣднемъ выраженiи замѣнимъ $\overline{CD}^2 + \overline{AD}^2$ чрезъ $\overline{AC}^2$, потому-что изъ прямоугольнаго треугольника ACD выводится $\overline{CD}^2 + \overline{AD}^2 = \overline{AC}^2$; получимъ

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 + 2BC \times CD.$$

79. Слѣдствiе. Изъ теоремъ (72, 77, 78) слѣдуетъ, что уголъ треугольника будетъ или прямой, или острый, или тупой, если квадратъ стороны, противолежащей этому углу или равенъ суммѣ ква-

дратовъ двухъ остальныхъ сторонъ, или меньше этой суммы, или больше ея.

Примѣчаніе. По извѣстнымъ сторонамъ треугольника возможно вычислить проекцію одной стороны, взятую на какой-либо изъ остальныхъ сторонъ, и перпендикуляръ, опущенный изъ вершины треугольника на противоположный бокъ. Для примѣра вычислимъ высоту AD треугольника ABC, въ которомъ AB = 4 фут., BC = 3 фут. и AC = 2 фут. Такъ какъ квадратъ стороны AB, т. е. 16, больше суммы квадратовъ сторонъ BC и AC, или больше 9 + 4, то уголъ ACB, противолежащій сторонѣ AB, долженъ быть тупой; а потому мы возьмемъ формулу

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 + 2BC \times CD$$

и подставимъ въ нее данныя числа; получимъ

$$16 = 9 + 4 + 2.\,3.\,CD;\ \text{откуда}$$

$$CD = \frac{16-13}{6} = 0{,}5 \text{ фут.}$$

Потомъ изъ прямоугольнаго треугольника ACD мы имѣемъ

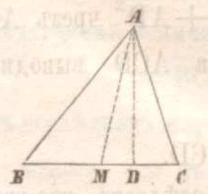
$$\overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{CD}^2 \text{ или } \overline{AD}^2 = 4 - 0{,}25 = 3{,}75;$$

откуда $AD = \sqrt{3{,}75} = 1{,}936$ фут. съ точностью до 0,001 фута.

80. **Теорема**. *Сумма квадратовъ двухъ сторонъ треугольника равна удоенному квадрату половины третьей стороны, сложенному съ удвоеннымъ квадратомъ прямой, соединяющей средину этой стороны съ вершиною противоположнаго угла.*

Точкою M (фиг. 176) раздѣляется сторона BC даннаго треугольника ABC па два равные отрѣзка, а прямою AM, соединяющею вершину A съ срединою M стороны BC, раздѣляется треугольникъ ABC на два треугольника ABM и ACM, въ которыхъ сумма угловъ AMB + AMC = 180°. Изъ вершины A опустивъ перпендикуляръ AD на противолежащій бокъ BC, мы замѣтимъ, что въ треугольникѣ ABM бокъ AB противолежитъ тупому углу AMB; а потому имѣемъ

Фиг. 176.



$$\overline{AB}^2 = \overline{BM}^2 + \overline{AM}^2 + 2BM \times MD,$$

а изъ треугольника ACM, въ которомъ бокъ AC противолежитъ острому углу ACM, мы получимъ

$$\overline{AC}^2 = \overline{CM}^2 + \overline{AM}^2 - 2CM \times MD.$$

Сложеніемъ этихъ двухъ равенствъ по-членно получится

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2\overline{BM}^2 + 2\overline{AM}^2.$$

Примѣчаніе. Чтобы вычислить прямую AM по извѣстнымъ сторонамъ треугольника AB = 8 саж., AC = 14 саж. и BC = 10 саж., мы подставимъ данныя числа въ послѣднее выраженіе; получимъ

$$64 + 196 = 2.25 + 2\overline{AM}^2,$$

$$\text{откуда } 2\overline{AM}^2 = 210,$$

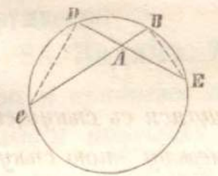
$$\overline{AM}^2 = 105$$

и AM = 10,24 саж. съ точностью до 0,01 саж.

81. **Теорема.** *Двѣ хорды, пересѣкающіяся внутри круга, раздѣляются ихъ точкою пересѣченія на части, обратно пропорціональныя.*

Хорды BC и DE пересѣкаются въ точкѣ A (фиг. 177). Требуется доказать, что $\frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AC}$.

Фиг. 177.



Проведя хорды BE и CD, получимъ два подобные треугольника BAE и CAD, потому-что ∠ E = ∠ C (измѣряются половиною дуги BD), ∠ B = ∠ D (измѣряются половиною дуги CE). Изъ этихъ подобныхъ треугольниковъ составится пропорція: AB относится къ AD (потому-что AB лежитъ противъ ∠ E, ∠ E = ∠ C и противъ ∠ C лежитъ AD) точно такъ, какъ AE относится къ AC (потому-что AE лежитъ противъ ∠ B, ∠ B = ∠ D и противъ ∠ D лежитъ AC); т. е.

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AC}.$$

Слѣдствіе. Если отрѣзки AD и AE равны, то составится пропорція

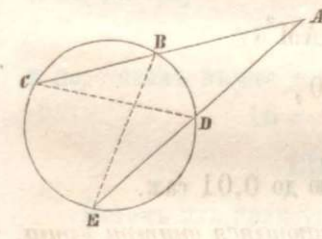
$$\frac{AB}{AD}=\frac{AD}{AC};$$

слѣдовательно *если хорда* BC *раздѣляетъ хорду* DE *на двѣ равныя части, то половина хорды* DE *будетъ средняя пропорціональная между отрѣзками хорды* BC.

82. **Теорема.** *Двѣ сѣкущія, пересѣкающіяся внѣ круга, обратно пропорціональны къ ихъ внѣшнимъ отрѣзкамъ.*

Даны сѣкущія AC и AE (фиг. 178). Требуется доказать, что

Фиг. 178.



$$\frac{AC}{AE}=\frac{AD}{AB}.$$

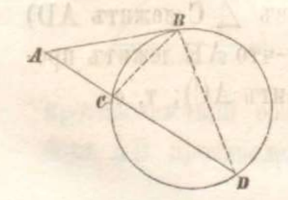
Проведя хорды CD и BE, получимъ два подобные треугольника ACD и AEB, потому-что ∠ A общій и ∠ C = ∠ E (потому-что измѣряются половиною дуги BD); слѣдовательно ∠ ADC = ∠ ABE.

Изъ этихъ подобныхъ треугольниковъ составится слѣдующая пропорція: AC относится къ AE (потому-что AC лежитъ противъ ∠ ADC, ∠ ADC = ∠ ABE, и противъ ∠ ABE лежитъ AE) точно такъ, какъ AD относится къ AB (потому-что AD лежитъ противъ ∠ C, ∠ C = ∠ E и противъ ∠ E лежитъ AB); т. е.

$$\frac{AC}{AE}=\frac{AD}{AB}.$$

83. **Теорема.** *Касательная, пересѣкающаяся съ сѣкущею внѣ круга, есть средняя пропорціональная между этою сѣкущею и ея внѣшнимъ отрѣзкомъ.*

Фиг. 179.



Требуется доказать (фиг. 179), что

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AB}{AC}.$$

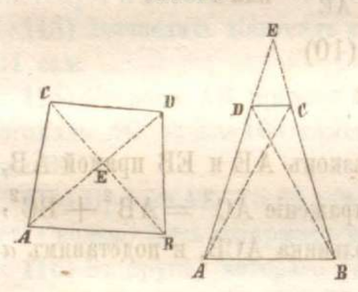
Проведя хорды BC и BD, получимъ два подобные треугольника ABD и ABC, потому-что ∠ A общій и ∠ ADB = ∠ ABC (по-

тому-что измѣряются половиною дуги BC); слѣдовательно $\angle ABD = \angle ACB$. Изъ этихъ подобныхъ треугольниковъ выводится пропорція: AD относится къ AB (потому-что AD лежитъ противъ $\angle ABD$, $\angle ABD = \angle ACB$ и противъ $\angle ACB$ лежитъ AB) точно такъ, какъ AB относится къ AC (потому-что AB лежитъ противъ $\angle D$, $\angle D = \angle ABC$ и противъ $\angle ABC$ лежитъ AC); т. е.

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AC}.$$

84. **Теорема.** *Если двѣ прямыя AD и BC (фиг. 180), или ихъ продолженія, пересѣкаются въ точкѣ E такимъ образомъ, что* $\frac{AE}{BE} = \frac{CE}{DE}$, *то ихъ оконечности A, D, B и C должны находиться на одной и той-же окружности.*

Фиг. 180.

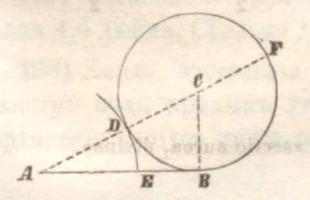


Треугольники ACE и BDE подобны, потому-что $\angle AEC = \angle BED$ и $\frac{AE}{BE} = \frac{CE}{DE}$ (54); слѣдо- $\angle CAE = \angle DBE$. Отсюда мы заключаемъ, что дуга сегмента, построеннаго на хордѣ CD и вмѣщающаго углы, равные углу CAD, должна пройти чрезъ вершину B; слѣдовательно точки A, B, C, D находятся на одной и той-же окружности.

85. **Задача.** *Требуется раздѣлить данную прямую въ среднемъ и крайнемъ отношеніи, т. е. такимъ образомъ, чтобы большій отрѣзокъ данной прямой былъ среднею пропорціональною между данною прямою и ея меньшимъ отрѣзкомъ.*

Къ данной прямой AB (фиг. 181) изъ ея оконечности B возставимъ перпендикуляръ и отложимъ на немъ $BC = \frac{1}{2}AB$. Потомъ соединимъ точки A и C, и изъ C радіусомъ CB опишемъ окружность, которая пересѣчетъ прямую AC въ точкѣ D. Нако-

Фиг. 181.



нецъ изъ точки A радіусомъ AD опишемъ дугу; точкою E пересѣченія этой дуги съ прямою AB раздѣлится эта прямая на два отрѣзка такимъ образомъ, что

$$\frac{AB}{AE}=\frac{AE}{EB}.$$

Въ самомъ дѣлѣ, продолжимъ прямую AC до пересѣченія F съ окружностью; тогда по предъидущему (53) получимъ

$$\frac{AF}{AB}=\frac{AB}{AD};$$

но такъ какъ $AD=AE$, $AF=AD+DF=AE+2CD=AE+2CB=AE+AB$, то получится

$$\frac{AE+AB}{AB}=\frac{AB}{AE} \text{ или (13)}$$

$$\frac{AE+AB-AB}{AB}=\frac{AB-AE}{AE} \text{ или}$$

$$\frac{AE}{AB}=\frac{EB}{AE} \text{ или (10)}$$

$$\frac{AB}{AE}=\frac{AE}{EB}\text{ [1]}.$$

Слѣдствіе. Для вычисленія отрѣзковъ AE и EB прямой AB, коей длина равна a, мы возьмемъ выраженіе $\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2$, выведенное изъ прямоугольнаго треугольника ACB, и подставимъ a вмѣсто AB и $\frac{a}{2}$ вмѣсто BC; получимъ

$$\overline{AC}^2=a^2+\frac{a^2}{4}=\frac{5a^2}{4};$$

$$\text{откуда } AC=\frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

Отрѣзокъ $AE=AD=AC-BC$ или

$$AE=\frac{a\sqrt{5}}{2}-\frac{a}{2}=\frac{a(\sqrt{5}-1)}{2}.$$

$$\text{Отрѣзокъ } BE=a-\frac{a\sqrt{5}}{2}+\frac{a}{2}=\frac{3a}{2}-\frac{a\sqrt{5}}{2}=\frac{a(3-\sqrt{5})}{2}.$$

[1]) Эта задача называется древними писателями «sectio aurea, divina».

ЧИСЛЕННЫЕ ВОПРОСЫ.

110) Перпендикуляръ, опущенный изъ вершины прямаго угла прямоугольнаго треугольника на гипотенузу, раздѣляетъ ее на отрѣзки, равные 7,2 дюйма и 16,2 дюйма. Сколько дюймовъ содержитъ этотъ перпендикуляръ?

111) Гипотенуза прямоугольнаго треугольника содержитъ 72,9 саж. и одинъ изъ ея отрѣзковъ, образовавшихся перпендикуляромъ, опущеннымъ на нее изъ вершины прямаго угла, равенъ 6,4 саж. Сколько сажень содержатъ катеты и перпендикуляръ?

112) Перпендикуляръ, опущенный изъ вершины прямаго угла на гипотенузу прямоугольнаго треугольника, равенъ 12,4 саж. и одинъ отрѣзокъ гипотенузы равенъ 3,8 саж. Сколько сажень содержатъ гипотенуза и катеты?

113) Вычислить діагональ квадрата, котораго периметръ равенъ 524 саж.

114) Сторона AB прямоугольника ABCD содержитъ 146 саж. и діагональ AC равна 169 сажень. Сколько сажень содержитъ сторона BC?

115) Прямая AB = 5,25 фут. (фиг. 170), A*a* = 3,7 фут. и B*b* = 7,2 фут. Сколько футъ содержитъ проекція *ab*?

116) Въ кругѣ, котораго радіусъ равенъ 4,8 дюйма, проведена хорда, длиною въ 3,5 дюйма. На сколько дюймовъ отстоитъ эта хорда отъ центра круга?

117) Периметръ прямоугольника ABCD содержитъ 256 саж. и стороны AB и BC пропорціональны числамъ 9 и 7. Сколько сажень содержитъ діагональ AC?

118) Гипотенуза прямоугольнаго треугольника равна 8,6 дюйма и катетъ 4,3 дюйма. Сколько дюймовъ содержатъ другой катетъ и перпендикуляръ, опущенный на гипотенузу изъ вершины ямаго угла?

119) Діагональ AC ромба ABCD равена 7,4 дюйма и діагональ BD равна 4,6 дюйма. Сколько дюймовъ содержитъ бокъ ромба?

120) Хорда, отстоящая отъ центра на 10,5 дюйма, пересѣкаетъ діаметръ подъ прямымъ угломъ. Сколько дюймовъ содержитъ эта хорда, если радіусъ круга равенъ 17,5 дюйма?

121) Чрезъ оконечность B (фиг. 171) діаметра BC, содержащаго 36 футъ, проведена хорда BA и изъ ея оконечности опущенъ на BC перпендикуляръ AD, отстоящій отъ точки B на 16 футъ. Сколько футъ содержитъ хорда AB?

122) Въ треугольникѣ ABC сторона AB = 16 фут., BC = 9 фут. и AC = 12 фут. Сколько футъ содержитъ перпендикуляръ AD, опущенный на BC изъ вершины A?

123) Въ треугольникѣ ABC сторона AB = 5,4 фут., BC = 10,2 фут. и AC = 7,6 фут. Сколько футъ содержитъ перпендикуляръ AD, опущенный на BC изъ вершины A?

124) Чрезъ оконечность B діаметра BC (фиг. 171) проведена хорда BA, длиною въ 8,4 фут., и перпендикуляръ, опущенный изъ оконечности A этой хорды на діаметръ BC, раздѣляетъ его на два отрѣзка, пропорціональные числамъ 2 и 5. Сколько футъ содержитъ радіусъ?

125) Радіусы двухъ концентрическихъ круговъ равны 36 фут. и 20 фут., и въ большемъ кругѣ проведена хорда, касающаяся къ меньшему кругу. Сколько футъ содержитъ эта хорда?

126) Сѣкущая AC = 36 дюйм. (фиг. 178), AB = 8 дюйм. и AD = 12 дюйм. Сколько дюймовъ содержитъ сѣкущая AE?

127) Въ треугольникѣ ABC (фиг. 176) сторона AB = 25 саж., AC = 16 саж., BC = 35 саж. и BM = MC. Сколько сажень содержитъ прямая AM?

128) Касательная AB (фиг. 179) содержитъ 8,5 фута и сѣкущая AD равна 10 фут. Сколько футъ содержитъ отрѣзокъ AC?

129) Сѣкущая AC = 18,3 фут. (фиг. 178), AE = 24,4 фут. и BC = 10,2 фута. Сколько футъ содержитъ хорда DE?

130) Касательная AB (фиг. 179) содержитъ 10,5 фут. и отрѣзокъ AC = 4,5 фут. Сколько футъ содержитъ сѣкущая AD?

131) Двѣ окружности, коихъ радіусы равны 0,5 фут. и 1,5 фут., пересѣкаются такимъ образомъ, что касательныя, проведенныя къ нимъ чрезъ одну изъ точекъ пересѣченія, составляютъ между собою прямой уголъ. Найти разстояніе между центрами этихъ окружностей.

132) Хорда въ 29 футъ, проведенная перпендикулярно къ радіусу, раздѣляетъ его на два отрѣзка, изъ которыхъ отрѣзокъ, прилежащій къ окружности, равенъ 4,5 фута. Сколько футъ содержитъ этотъ радіусъ?

133) Отрѣзокъ AB (фиг. 178) равенъ 1/3 сѣкущей AC, сѣкущая AE

= 8,4 фут. и отрѣзокъ DE = 3,6 фут. Сколько футъ содержитъ сѣкущая AC?

134) Въ треугольникѣ ABC (фиг. 176) сторона AB равна 9 дюйм., AC = 7,5 дюйм., AM = 6,45 дюйм. и BM = MC. Сколько дюймовъ содержитъ сторона BC?

135) Сѣкущая AC (фиг. 178) равна 42,8 фут., сѣкущая AE = 27,4 фут. и отрѣзокъ AD больше отрѣзка AB на 3,2 фут. Сколько футъ содержатъ внѣшніе отрѣзки этихъ сѣкущихъ?

136) Въ параллелограмѣ ABCD изъ вершины A опущенъ на сторону DC перпендикуляръ AE, отстоящій отъ вершины D на 32 саж., AD = 36 саж., AB = 48 саж. и уголъ ADC меньше 90°. Сколько сажень содержитъ діагональ AC?

137) Сумма сѣкущихъ AC и AE (фиг. 178) составляетъ 124 фут., отрѣзокъ AB меньшей сѣкущей AC равенъ 18 фут. и отрѣзокъ AD большей сѣкущей AE = 24 фут. Сколько футъ содержитъ каждая изъ этихъ сѣкущихъ?

138) Гипотенуза [1]) прямоугольнаго треугольника равна 32,5 дюйм. и перпендикуляръ, опущенный на нее изъ вершины прямаго угла, содержитъ 15,6 дюйма. Сколько дюймовъ содержатъ отрѣзки гипотенузы?

139) Перпендикуляръ, опущенный изъ вершины прямаго угла на гипотенузу прямоугольнаго треугольника, равенъ 1,4 дюйм., и одинъ отрѣзокъ гипотенузы больше другаго на 0,8 дюйма. Сколько дюймовъ содержатъ катеты и гипотенуза?

140) Гипотенуза прямоугольнаго треугольника равна 36,5 фут. и сумма катетовъ равна 51,1 фут. Сколько футъ содержитъ каждый изъ этихъ катетовъ?

141) Отрѣзокъ CD (фиг. 179) вдвое меньше касательной AB и отрѣзокъ AC больше отрѣзка CD на 2 фут. Сколько футъ содержатъ касательная AB и сѣкущая AD?

ТЕОРЕМЫ.

142) Изъ вершинъ B и C треугольника ABC опущены перпенди-

[1]) Этотъ вопросъ и слѣдующіе за нимъ вопросы рѣшаются посредствомъ уравненій второй степени.

куляры BF и CD на противоположныя стороны AC и BC. Требуется доказать, что эти перпендикуляры обратно пропорціональны сторонамъ AB и AC.

143) Въ треугольникѣ ABC чрезъ вершину B проведена прямая BE до пересѣченія E съ противолежащимъ бокомъ такимъ образомъ, что уголъ ABE равенъ углу ACB; слѣдовательно прямыя BE и BC анти-параллельны относительно угла A. Требуется доказать, что сторона AB есть средняя пропорціональная между стороною AC и ея отрѣзкомъ AE.

144) Если изъ вершинъ B и C треугольника ABC опущены перпендикуляры BF и CD на противоположныя стороны AC и AB, то сторона BC и прямая DF, соединяющая основанія этихъ перпендикуляровъ, должны быть анти-параллельны относительно угла A.

145) Чрезъ оконечность A діаметра AB проведена хорда AC и изъ ея оконечности C опущенъ перпендикуляръ CD на AB. Требуется доказать, что квадратъ діаметра AB относится къ квадрату хорды AC точно такъ, какъ діаметръ AB относится къ проекціи AD хорды AC на діаметрѣ AB.

146) Во всякомъ прямоугольномъ треугольникѣ катетъ есть средняя пропорціональная между суммою и разностью гипотенузы и другаго катета.

147) Разность квадратовъ двухъ сторонъ AB и AC треугольника ABC (фиг. 176) равна удвоенной третьей стороны BC, помноженной на проекцію MD прямой AM, раздѣляющей сторону BC на двѣ равныя части.

148) Квадраты двухъ хордъ AC и AD, проведенныхъ чрезъ оконечность діаметра AB, пропорціональны проекціямъ AE и AF этихъ хордъ, взятымъ на діаметрѣ.

149) Къ двумъ окружностямъ, касающимся изъ-внѣ, проведена касательная. Требуется доказать, что часть касательной, содержащаяся между точками касанія, есть средняя пропорціональная между діаметрами окружностей.

150) Чрезъ оконечности діаметра AB проведены касательныя AM и BN къ окружности C, и къ ней-же между прямыми AM и BN проведена касательная DE, которая въ точкѣ F касанія раздѣляется на два отрѣзка DF и FE. Требуется доказать, что радіусъ данной окружности есть средняя пропорціональная между этими отрѣзками.

151) Перпендикулярно къ діаметру AB чрезъ точку C, лежащую на его продолженіи, проведена прямая MN; потомъ отъ A до MN проведены прямыя AD и AF, пересѣкающія окружность въ точкахъ E и G. Требуется доказать, что $\frac{AD}{AG} = \frac{AF}{AE}$.

ЗАДАЧИ ПОСТРОЕНІЯ.

152) Чрезъ точку A, данную внѣ круга, провести сѣкущую такимъ образомъ, чтобы ея отрѣзки были равны.

153) Чрезъ точку A, данную внѣ круга, провести сѣкущую такимъ образомъ, чтобы ея внутренній отрѣзокъ равнялся данной прямой m.

154) Внѣ даннаго круга найти такую точку A, чтобы отъ нея можно было провести двѣ касательныя, которыхъ сумма должна равняться сѣкущей, проведенной отъ A чрезъ центръ C данной окружности.

155) Между окружностью C и точкою A, находящеюся на продолженіи діаметра DB, найти такую точку X, чтобы касательная, проведенная изъ X къ окружности, равнялась разстоянію XA.

156) Чрезъ точку касанія D двухъ окружностей O и O′, касающихся изъ-внутри, провести такую прямую BD, чтобы ея отрѣзокъ BC, находящійся между данными окружностями, равнялся данной прямой m.

157) Описать окружность такимъ образомъ, чтобы можно было провести хорду, равную данной прямой m, и соотвѣтствующую центральному углу въ 120^0.

158) На данной окружности требуется найти такую точку M, чтобы ея разстоянія MA и MB отъ точекъ A и B, данныхъ на окружности, относились между собою, какъ числа m и n.

159) Данная прямая a относится къ неизвѣстной прямой x точно такъ, какъ другая неизвѣстная y относится къ данной прямой d. Зная, что сумма прямыхъ x и y должна равняться прямой m, найти прямыя x и y.

160) Чрезъ двѣ точки C и D описать окружность, касающуюся къ данной прямой AB.

161) На прямой AB, данной внѣ круга, найти такую точку, чтобы

изъ нея можно было провести къ данной окружности касательную, равную прямой m.

162) На данной окружности C найти такую точку, чтобы касательныя, проведенныя отъ нея къ окружности C′, составляли прямой уголъ.

163) Относительно данныхъ прямыхъ m и n найти такую прямую x, чтобы разность $m - x$ относилась къ разности $x - n$ точно такъ, какъ относятся прямыя m и n. (Прямая x, удовлетворяющая условіямъ задачи, называется *среднею гармоническою* прямыхъ m и n).

ШЕСТАЯ ГЛАВА.

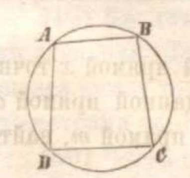
Вписанные въ кругѣ правильные многоугольники и описанные около него многоугольники.

86. Многоугольникъ, котораго стороны суть хорды окружности, называется *вписаннымъ* въ кругѣ; а окружность въ этомъ случаѣ называется *описанною* около многоугольника. Многоугольникъ, котораго стороны касаются къ окружности, называется *описаннымъ* около круга; а окружность въ этомъ случаѣ называется *вписанною* въ многоугольникѣ.

Теорема. *Во всякомъ четыреугольникѣ, вписанномъ въ кругѣ, сумма противоположныхъ угловъ равна двумъ прямымъ угламъ.*

Вписанный уголъ A (фиг. 182) измѣряется половиною дуги BCD и уголъ C измѣряется половиною дуги BAD; слѣдовательно $\angle A + \angle C$ измѣряется полусуммою дугъ BCD и BAD, или полуокружностью.

Фиг. 182.



87. **Теорема.** *Во всякомъ четыреугольникѣ, вписанномъ въ кругѣ, произведеніе діагоналей равна суммѣ произведеній противолежащихъ сторонъ.*

Построивъ уголъ ADE, равный углу BDC (фиг. 183), полу-

Фиг. 183.



чимъ подобные треугольники ADE и BDC, потому-что $\angle ADE = \angle BDC$ (по построенію) и $\angle DAE$ $\angle DBC$ (измѣряются половиною одной и той-же дуги DC). Изъ этихъ треугольниковъ составится пропорція

$$\frac{AE}{BC}=\frac{AD}{BD}, \text{ откуда } AE = \frac{AD \times BC}{BD}.$$

Треугольники EDC и DAB подобны, потому-что $\angle CDE = \angle ADB$ ($\angle CDE = \angle CDB + \angle BDE$, $\angle ADB = \angle ADE + \angle BDE$ и $\angle CDB = \angle ADE$), $\angle ECD = \angle ABD$ (измѣряются половиною одной и той-же дуги AD). Изъ этихъ подобныхъ треугольниковъ составится пропорція

$$\frac{EC}{AB}=\frac{DC}{BD}, \text{ откуда } EC = \frac{DC \times AB}{BD}.$$

Наконецъ составимъ сумму

$$AE + EC = AC = \frac{AD \times BC + DC \times AB}{BD},$$

откуда

$$AC \times BD = AD \times BC + DC \times AB.$$

Это предложеніе называется *Птоломеевой теоремою.*

88. **Теорема.** *Около всякаго правильнаго многоугольника возможно описать окружность.*

Сначала опредѣлимъ центръ O окружности, проходящей чрезъ три точки A, B, C (фиг. 184) и потомъ проведемъ радіусы AO, BO, CO, DO и т. д.

Фиг. 184.



Треугольники ABO и BCO равны, потому-что $AB = BC$ (стороны правильнаго многоугольника) и $BO = AO = CO$ (радіусы); слѣдовательно $\angle BAO = \angle ABO = \angle CBO = \angle BCO$. По равенству этихъ угловъ мы заключаемъ, что $\angle ABO = {}^1/_2 \angle ABC$ и $\angle BCO = {}^1/_2 \angle BCD$; слѣдовательно

$\angle$ BCO = $\angle$ DCO. Также треугольники BCO и DCO равны, потому что сторона CO общая, BC = CD (стороны правильнаго многоугольника) и $\angle$ BCO = $\angle$ DCO (по доказанному); слѣдовательно BO = DO и $\angle$ CBO = $\angle$ CDO. Такъ какъ $\angle$ CDE = $\angle$ ABC, $\angle$ CBO = $\angle$ CDO и $\angle$ CBO = $^1/_2$ $\angle$ ABC, то $\angle$ CDO = $^1/_2$ $\angle$ CDE = $\angle$ EDO.

Изъ равныхъ треугольниковъ CDO и EDO мы выводимъ CO = EO и $\angle$ DCO = $\angle$ DEO и т. д.

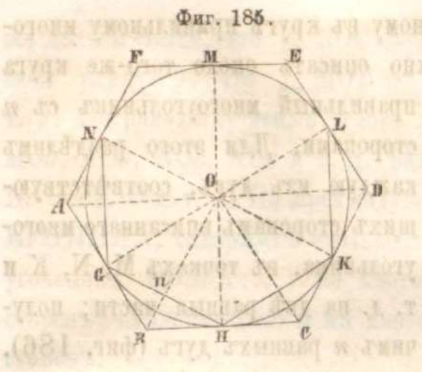
По равенству прямыхъ AO, BO, CO, DO и т. д. мы заключаемъ, что окружность должна пройти чрезъ вершины A, B, C, D, E и т. д.

Обратное предложеніе. Раздѣливъ окружность на n равныхъ частей въ точкахъ A, B, C, D и т. д. (фиг. 184) и проведя хорды AB, BC, CD и т. д., получимъ правильный многоугольникъ съ n сторонами. Въ самомъ дѣлѣ, стороны AB, BC, CD и т. д. равны, какъ хорды, соотвѣтствующія равнымъ дугамъ, и углы ABC, BCD, DCE и т. д. равны, потому-что они вписаны въ равныхъ сегментахъ. Отсюда мы заключаемъ, что *въ кругѣ возможно вписать какой угодно правильный многоугольникъ.*

Слѣдствіе. Раздѣливъ каждую изъ дугъ AB, BC, CD... (фиг. 184) въ точкахъ a, b, c... на двѣ равныя части и проведя хорды Aa, aB, Bb, bC, Cc, cD..., получимъ вписанный правильный многоугольникъ съ $2n$ сторонами. Въ самомъ дѣлѣ, Aa = aB = Bb = bC = ... (хорды, соотвѣтствующія равнымъ дугамъ), $\angle$ AaB = $\angle$ aBb = $\angle$ B$b$$c$ = ... (вписанные углы, между сторонами которыхъ заключаются равныя дуги) и каждой сторонѣ многоугольника ABCD... соотвѣтствуютъ двѣ стороны многоугольника AaBbC...

89. **Теорема.** *Во всякомъ правильномъ многоугольникѣ возможно вписать окружность.*

Перпендикуляры GO и HO (фиг. 185), возставленные изъ среднихъ точекъ G и H двухъ смежныхъ сторонъ AB и BC, пересѣкаются въ точкѣ O, равно-отстоящей отъ сторонъ многоугольника.



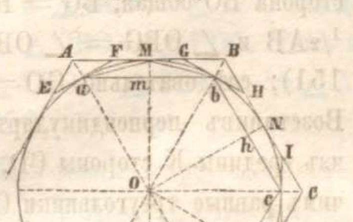
Фиг. 185.

Въ самомъ дѣлѣ, треугольники BOG и BOH равны, потому-что сторона BO общая, BG = BH = $^1/_2$AB и ∠ OBG = ∠ OBH (I, 151); слѣдовательно GO = HO. Возставивъ перпендикуляръ KO изъ средины K стороны CD, получимъ равные треугольники COH и COK, потому-что сторона CO общая, CH = CK и ∠ HCO = ∠ KCO (I, 151); слѣдовательно HO = KO. Точно такимъ-же образомъ доказывается, что KO = LO, LO = MO и т. д. По равенству разстояній GO, HO, KO и т. д. мы заключаемъ, что окружность, описанная изъ точки O, касается къ сторонамъ многоугольника въ точкахъ G, H, K и т. д.

90. **Обратное предложеніе.** Раздѣливъ окружность на *n* равныхъ частей и проведя къ ней касательныя чрезъ точки дѣленія G, H, K, L и т. д. (фиг. 185), получимъ правильный многоугольникъ съ *n* сторонами, описанный около окружности. Въ самомъ дѣлѣ, проведя хорды NG, GH, HK и т. д., получимъ равные треугольники AGN, BHG, CKH и т. д., потому-что NG = GH = HK и т. д. (хорды, соотвѣтствующія равнымъ дугамъ), ∠ ANG = ∠ AGN = ∠ BGH = ∠ BHG = ∠ CHK = ∠ CKH и т. д. (каждый изъ этихъ угловъ измѣряется половиною дуги, заключающейся между двумя точками дѣленія окружности); слѣдовательно ∠ NAG = ∠ GBH = ∠ HCK и т. д. Такъ какъ въ этихъ равныхъ треугольникахъ равнымъ угламъ противолежатъ равныя стороны, то AN = AG = GB = BH = HC = CK и т. д. и AG + GB = BH + HC = CK + KD и т. д. или AB = BC = CD и т. д. Отсюда слѣдуетъ: *чтобы описать около круга правильный многоугольникъ съ n сторонами, должно раздѣлить окружность на n равныхъ частей и чрезъ полученныя точки дѣленія провести касательныя къ окружности.*

91. Слѣдствіе. По вписанному въ кругѣ правильному многоугольнику съ n сторонами возможно описать около того-же круга правильный многоугольникъ съ n сторонами. Для этого раздѣлимъ каждую изъ дугъ, соотвѣтствующихъ сторонамъ вписаннаго многоугольника, въ точкахъ M, N, K и т. д. на двѣ равныя части; получимъ n равныхъ дугъ (фиг. 186). Проведя касательныя къ окружности чрезъ точки M, N, K и т. д., получимъ правильный многоугольникъ съ n сторонами, въ которомъ стороны AB, BC, CD и т. д. соотвѣтственно параллельны къ сторонамъ ab, bc, cd и т. д. вписаннаго многоугольника, и каждая изъ вершинъ, какъ напримѣръ B, находится на продолженіи радіуса, проходящаго чрезъ соотвѣтствующую вершину b. Въ самомъ дѣлѣ, двѣ соотвѣтствующія стороны, какъ напримѣръ BC и bc, параллельны, потому-что онѣ перпендикулярны къ одной и той-же прямой ON, а двѣ касательныя, какъ напримѣръ MB и NB, должны пересѣкаться на прямой OB, раздѣляющей уголъ MON на двѣ равныя части.

Фиг. 186.



92. Слѣдствіе. Если около круга (фиг. 186) описанъ правильный многоугольникъ ABCD...., содержащій n сторонъ, его вершины A, B, C, D... соединены съ центромъ O, и чрезъ точки a, b, c, d... пересѣченія прямыхъ OA, OB, OC.... проведены касательныя между сторонами многоугольника, то образовавшійся правильный многоугольникъ EFGHIL... содержитъ $2n$ сторонъ.

Дѣйствительно, проведя радіусы OM, ON, OK... и хорды Mb, bN, Nc...., получимъ $\angle$ MON $=$ $\angle$ NOK $=$ и т. д. (потому-что дуги MN, NK и т. д. равны) и равные треугольники MOB, NOB, потому-что $\angle$ BMO $=$ $\angle$ BNO $= 90^0$, сторона BO общая и OM $=$ ON; слѣдовательно $\angle$ MOB $=$ $\angle$ NOB $= {}^1/_2$ $\angle$ MON. Точно так-

же доказывается, что $\angle$ NOC $= \angle$ COK $= \frac{1}{2} \angle$ NOK и т. д. Отсюда слѣдуетъ, что $\angle$ MOB $= \angle$ NOB $= \angle$ NOC $= \angle$ COK и т. д. По равенству этихъ угловъ мы заключаемъ, что треугольники MOb, NOb, NOc, KOc и т. д. равны; слѣдовательно Mb $=$ bN $=$ Nc $=$ cK $=$ и т. д. По предъидущему извѣстно, что многоугольникъ EFGHIL.... содержитъ столько сторонъ, сколько сторонъ въ многоугольникѣ MbNcK....; но многоугольникъ MbNcK.... имѣетъ $2n$ сторонъ, слѣдовательно и въ многоугольникѣ FGHIL... также $2n$ сторонъ.

93. Слѣдствіе. По предъидущему (89) извѣстно, что центръ O (фиг. 186) равно-отстоитъ отъ среднихъ точекъ m, h и т. д. сторонъ ab, bc, cd и т. д. многоугольника; слѣдовательно если изъ точки O описать окружность радіусомъ Om, то эта окружность пройдетъ чрезъ точки m, h и т. д. Отсюда мы заключаемъ, что центръ окружности, описанной около правильнаго многоугольника, совпадаетъ съ центромъ окружности, вписанной въ многоугольникѣ.

Центромъ правильнаго многоугольника называется общій центръ окружностей: вписанной и описанной. Эта точка, равно-отстоящая отъ всѣхъ сторонъ и всѣхъ вершинъ, есть точка пересѣченія прямыхъ, раздѣляющихъ углы многоугольника на двѣ равныя части, и точка пересѣченія перпендикуляровъ, возставленныхъ изъ среднихъ точекъ сторонъ.

Радіусомъ правильнаго многоугольника называется радіусъ описанной окружности. Радіусъ окружности, вписанной въ правильномъ многоугольникѣ, называется его *апоѳемою;* такъ напримѣръ въ (фиг. 186) Oa радіусъ многоугольника $abcd$.... и Om его апоѳема.

Центральнымъ угломъ правильнаго многоугольника называется уголъ aOb, составляемый двумя смежными радіусами aO и bO. Этотъ уголъ равенъ углу mOh, составляемому двумя смежными апоѳемами Om и Oh; слѣдовательно центральнымъ угломъ aOb дополняется уголъ mbh многоугольника до двухъ прямыхъ угловъ. Такъ какъ центральный уголъ многоугольника, имѣющаго n сторонъ, равенъ

$\frac{360^\circ}{n}$, то уголъ mbn многоугольника равенъ $180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$. Зная, что въ равностороннемъ треугольникѣ каждый уголъ равенъ 60° и уголъ квадрата содержитъ 90°, мы заключаемъ, что уголъ всякаго правильнаго многоугольника долженъ быть тупой.

94. **Задача**. *Въ кругъ вписать квадратъ.*

Проведя два взаимно-перпендикулярные діаметра AC и BD,

Фиг. 187.



соединимъ ихъ оконечности прямыми AB, BC, CD, AD (фиг. 187). Полученный четыреугольникъ ABCD, въ которомъ всѣ стороны равны, какъ хорды, соотвѣтствующія равнымъ дугамъ, и углы прямые, есть квадратъ.

Изъ прямоугольнаго треугольника AOB мы имѣемъ

$$\overline{AB}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{BO}^2 = 2\overline{AO}^2, \text{ откуда } \frac{AB}{AO} = \sqrt{2};$$

слѣдовательно *отношеніе бока квадрата къ радіусу описанной окружности есть число ирраціональное.*

95. Слѣдствіе. Раздѣливъ каждую изъ дугъ, соотвѣтствующихъ бокамъ вписаннаго квадрата ABCD въ точкахъ a, b, c.... на двѣ равныя части и проведя хорды aB, Bb, bC...., получимъ вписанный правильный восьмиугольникъ. Чтобы вписать въ кругѣ правильный многоугольникъ съ 16 сторонами, мы раздѣлимъ на двѣ равныя части каждую изъ дугъ Aa, aB, Bb, bC и т. д., соотвѣтствующихъ сторонамъ вписаннаго правильнаго восьмиугольника. Продолжая дѣленіе дугъ на двѣ равныя части, мы можемъ получить правильные многоугольники съ 32, 64 и т. д. сторонами.

96. **Задача**. *Вписать въ кругъ правильный шестиугольникъ.*

Предположимъ, что задача рѣшена и что въ кругѣ вписанъ правильный шестиугольникъ AKBHCG (фиг. 188). Проведя два смежные радіуса AO и GO, получимъ треугольникъ AOG, въ которомъ



Фиг. 188.

$\angle AGO = \angle GAO$ и $\angle AOG = \frac{360^0}{6} = 60^0$; слѣдовательно $\angle AGO = \angle GAO = 60^0$ и AOG равносторонній треугольникъ, въ которомъ $AG = AO$, т. е. *бокъ правильнаго шестиугольника равенъ радіусу круга.* Отсюда слѣдуетъ: *чтобы въ кругѣ вписать правильный шестиугольникъ, должно отложить радіусъ круга хордою шесть разъ.*

97. Слѣдствіе. Соединивъ вершины A, B, C вписаннаго правильнаго шестиугольника, получимъ равносторонній треугольникъ ABC, потому-что каждой изъ сторонъ AB, AC и BC соотвѣтствуетъ дуга, равная третьей части окружности.

Чтобы вычислить бокъ BC вписаннаго равносторонняго треугольника ABC, проведемъ діаметръ BG; тогда изъ прямоугольнаго треугольника BCG (уголъ BCG прямой, потому-что его стороны проходятъ чрезъ оконечности діаметра) получимъ

$$\overline{BC}^2 = \overline{BG}^2 - \overline{CG}^2 = 4\overline{BO}^2 - \overline{BO}^2 \text{ или } \overline{BC}^2 = 3\overline{BO}^2;$$

$$\text{откуда } \frac{BC}{BO} = \sqrt{3};$$

слѣдовательно *отношеніе бока вписаннаго правильнаго (равносторонняго) треугольника къ радіусу круга есть число ирраціональное.*

98. Чтобы въ кругѣ вписать правильный многоугольникъ съ 12 сторонами, мы раздѣлимъ на двѣ равныя части дуги, соотвѣтствующія сторонамъ вписаннаго правильнаго шестиугольника, и проведемъ хорды B*c*, *c*K, K*b* и т. д. Продолжая дѣлить дуги на двѣ равныя части, мы можемъ получить правильные многоугольники съ 24, 48 и т. д. сторонами.

99. **Задача.** *Вписать въ кругѣ правильный десятиугольникъ.*

Предположимъ, что задача рѣшена и что найденъ бокъ AB (фиг.

189) правильнаго десятиугольника. Въ равнобедренномъ треугольникѣ ABO уголъ $AOB = \frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$ и

Фиг. 189.



$$\angle ABO = \angle BAO = \frac{180^\circ - 36^\circ}{2} = 72^\circ;$$

слѣдовательно $\angle AOB = \frac{1}{2} \angle ABO = \frac{1}{2} \angle BAO$. Раздѣливъ уголъ BAO прямою AC на двѣ равныя части, получимъ $\angle CAO = \frac{1}{2} \angle BAO = \angle AOB$; слѣдовательно треугольникъ ACO равнобедренный и $OC = AC$. Уголъ ACB, внѣшній относительно треугольника ACO, равенъ $\angle CAO + \angle AOC = 2 \angle CAO = \angle BAO = \angle ABO$. По равенству угловъ ACB и ABO мы заключаемъ, что $AB = AC$. Такъ какъ $OC = AC$ и $AB = AC$, то также $OC = AB$. По предъидущему (43) извѣстно, что прямая AC раздѣляетъ сторону BO на два отрѣзка, пропорціональные прилежащимъ сторонамъ, т. е. $\frac{BC}{OC} = \frac{AB}{AO}$, но $AB = OC$ и $AO = BO$, слѣдовательно

$$\frac{BC}{OC} = \frac{OC}{BO} \text{ или } \frac{BO}{OC} = \frac{OC}{BC}.$$

Эта пропорція показываетъ, что радіусъ BO раздѣленъ въ среднемъ и крайнемъ отношеніи (85).

Отсюда слѣдуетъ: *чтобы вписать въ кругъ правильный десятиугольникъ, должно раздѣлить радіусъ въ среднемъ и крайнемъ отношеніи, и большій отрѣзокъ* (CO) *отложить въ кругѣ хордою десять разъ.*

Чтобы вычислить бокъ AB вписаннаго правильнаго десятиугольника, замѣнимъ OC чрезъ AB въ выведенной пропорціи $\frac{BC}{OC} = \frac{AB}{AO}$; получимъ $\frac{BC}{AB} = \frac{AB}{AO}$; откуда

$$\overline{AB}^2 = AO \times BC = AO \times (AO - AB) \text{ или}$$

$$\overline{AB}^2 = \overline{AO}^2 - AO \times AB \text{ или } \overline{AB}^2 + AO \times AB - \overline{AO}^2 = 0.$$

Рѣшеніемъ этого квадратнаго уравненія получится

$$AB = -\frac{AO}{2} + \sqrt{\frac{\overline{AO}^2}{4} + \overline{AO}^2} = AO\,\frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

100. Слѣдствіе. Соединивъ вершины вписаннаго правильнаго десятиугольника чрезъ одну вершину, получимъ вписанный правильный пятиугольникъ. Если AB сторона вписаннаго правильнаго пятиугольника (фиг. 190) и BC сторона вписаннаго правильнаго десятиугольника, то $\angle CBO = 72^0$ и $\angle AOB = \frac{360^0}{5} = 72^0$. По равенству этихъ угловъ мы заключаемъ, что прямыя OA и CB параллельны. Чрезъ точку O проведя прямую параллельно къ AB до пересѣченія D съ продолженною стороною BC, получимъ параллелограмъ ABDO, въ которомъ сторона BD равна радіусу OA и сторона OD = AB. Потомъ проведя касательную DE изъ точки D, получимъ (83) $\frac{DB}{DE} = \frac{DE}{DC}$; но также $\frac{DB}{BC} = \frac{BC}{DC}$ (потому-что бокъ вписаннаго правильнаго десятиугольника равенъ большему отрѣзку радіуса, раздѣленнаго въ среднемъ и крайнемъ отношеніи). Сравненіемъ этихъ двухъ пропорцій мы заключаемъ, что DE = BC. Изъ прямоугольнаго треугольника DOE получимъ

Фиг. 190.

$$\overline{OD}^2 = \overline{OE}^2 + \overline{ED}^2,$$

но $OD = AB$, $OE = OA$, $ED = BC = AO\,\frac{(\sqrt{5}-1)}{2}$ (см. 99) и $\overline{BC}^2 = \overline{AO}^2\,\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{4}$; слѣдовательно

$$\overline{AB}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{AO}^2\,\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{4} = \overline{AO}^2\left(1 + \frac{(\sqrt{5}-1)^2}{4}\right) \text{ и}$$

$$AB = \frac{AO}{2}\cdot\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$$

По этой формулѣ вычисляется бокъ вписаннаго правильнаго пятиугольника.

101. **Задача.** *Въ кругъ вписать правильный многоугольникъ съ 15 сторонами.*

Отложимъ дугу AB, равную $^1/_6$ окружности, и потомъ дугу BC, равную $^1/_{10}$ окружности, такимъ образомъ, чтобы точка C упала между точками A и B; тогда дуга AC равна $^1/_6$ безъ $^1/_{10}$, т. е. $^1/_{15}$

окружности; слѣдовательно хорда, соотвѣтствующая дугѣ AC, есть сторона правильнаго многоугольника съ 15 сторонами.

102. **Задача.** *По извѣстному радіусу* R *и данной сторонѣ* GH $= a$ *(фиг. 185) вписаннаго многоугольника вычислить сторону описаннаго многоугольника, подобнаго данному.*

Треугольники OGn и OGB подобны, потому-что $\angle OnG = \angle OGБ = 90^0$ и $\angle BOG$ общій; слѣдовательно

$$\frac{BG}{Gn} = \frac{R}{On}.$$

Означивъ сторону описаннаго многоугольника чрезъ x и зная, что $On = \sqrt{\overline{GO}^2 - \overline{Gn}^2} = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}} = {}^1/_2\sqrt{4R^2 - a^2}$, получимъ

$$\frac{x}{a} = \frac{2R}{\sqrt{4R^2 - a^2}} \ldots\ldots (1);$$

откуда

$$x = \frac{2aR}{\sqrt{4R^2 - a^2}} \ldots\ldots (2).$$

Если радіусъ $R = 1$ (т. е. какой-нибудь линейной мѣрѣ), то

$$x = \frac{2a}{\sqrt{4 - a^2}} \ldots\ldots (3).$$

103. **Задача.** *По данному радіусу* R *и извѣстной сторонѣ* $ab = a$ *(фиг. 186) вписаннаго правильнаго многоугольника, имѣющаго* n *сторонъ, вычислить сторону* $Mb = x$ *правильнаго вписаннаго многоугольника, содержащаго* $2n$ *сторонъ.*

Извѣстно, что хорда bM есть средняя пропорціональная между діаметромъ MM′ и ея проекціею $Mm = OM - Om$ на этомъ діаметрѣ; т. е.

$$\frac{MM'}{Mb} = \frac{Mb}{OM - Om}, \text{ откуда}$$

$$\overline{Mb}^2 = 2R\,(R - mO) = R(2R - 2mO);$$

но изъ прямоугольнаго треугольника Omb выводится

$$mO = \sqrt{\overline{bO}^2 - \overline{bm}^2} = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}} = {}^1/_2\sqrt{4R^2 - a^2}.$$

Подставивъ эту величину mO въ выраженіе $\overline{Mb}^2$, получимъ
$x^2 = R(2R - \sqrt{4R^2 - a^2})$, откуда $x = \sqrt{R(2R - \sqrt{4R^2 - a^2})} \ldots (4)$.

При $R = 1$ послѣдняя формула обратится въ

$$x = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a^2}}.$$

Зная, что отъ умноженія суммы $2 + \sqrt{4 - a^2}$ на разность $2 - \sqrt{4 - a^2}$ получается разность квадратовъ, $4 - 4 + a^2 = a^2$, мы имѣемъ

$$2 - \sqrt{4 - a^2} = \frac{a^2}{2 + \sqrt{4 - a^2}}, \text{ откуда}$$

$$x = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a^2}} = \frac{(\sqrt{2 - \sqrt{4 - a^2}})(\sqrt{2 + \sqrt{4 - a^2}})}{\sqrt{2 + \sqrt{4 - a^2}}} = \frac{a}{\sqrt{2 + \sqrt{4 - a^2}}} \ldots (5).$$

104. **Слѣдствіе.** По извѣстному боку правильнаго многоугольника, имѣющаго n сторонъ и вписаннаго въ кругѣ, котораго радіусъ равенъ 1, возможно вычислить повтореннымъ приложеніемъ формулъ (3, 102) и (5, 103) стороны и периметры вписанныхъ правильныхъ многоугольниковъ, содержащихъ $2n$, $4n$, $8n$... сторонъ, и потомъ найти стороны и периметры описанныхъ правильныхъ многоугольниковъ, имѣющихъ $2n$, $4n$, $8n$... сторонъ. Посредствомъ этихъ вычисленій составится слѣдующая таблица:

Для вписанныхъ правильныхъ многоугольниковъ.	Периметры.	Для описанныхъ правильныхъ многоугольниковъ.	Периметры.
При $n = 6$	6	При $n = 6$	6,9282
„ $n = 12$	6,2116	„ $n = 12$	6,4308
„ $n = 24$	6,2652	„ $n = 24$	6,3192
„ $n = 48$	6,2786	„ $n = 48$	6,2920
„ $n = 96$	6,2820	„ $n = 96$	6,2854

ЧИСЛЕННЫЕ ВОПРОСЫ.

164) При радіусѣ, равномъ 8 фут., вычислить сторону вписаннаго правильнаго треугольника.

165) Сколько футъ содержитъ сторона описаннаго правильнаго треугольника, если бокъ вписаннаго правильнаго треугольника равенъ 3 фут.?

166) Радіусъ окружности, вписанной въ правильномъ треугольникѣ, равенъ 6 фут.; сколько футъ содержитъ радіусъ окружности, описанной около этого треугольника?

167) Какимъ радіусомъ должно описать окружность круга, чтобы сторона вписаннаго правильнаго треугольника содержала 8,66 фут.?

168) Сторона квадрата, вписаннаго въ кругѣ, равна 21,21 фут.; сколько футъ содержитъ радіусъ этого круга?

169) Сторона квадрата, вписаннаго въ кругѣ, равна 4 фут.; сколько футъ содержитъ бокъ описаннаго квадрата?

170) Радіусъ квадрата равенъ 4 фут.; сколько футъ содержитъ апоѳема этого квадрата?

171) Сколько футъ содержитъ сторона правильнаго десятиугольника, если его радіусъ равенъ 6 футамъ?

172) Сколько футъ содержитъ сторона правильнаго пятиугольника, вписаннаго въ кругѣ, коего радіусъ равенъ 12 фут.?

173) Бокъ правильнаго пятиугольника, вписаннаго въ кругѣ, равенъ 5 фут.; сколько футъ содержитъ сторона описаннаго правильнаго пятиугольника?

174) Сколько футъ содержитъ апоѳема правильнаго пятиугольника, котораго радіусъ равенъ 5 фут.?

175) Какимъ радіусомъ должно описать окружность круга, чтобы бокъ вписаннаго въ ней правильнаго десятиугольника равнялся 92,7 фут.?

176) Сколько футъ содержитъ сто]она правильнаго шестиугольника, если его апоѳема равна 2,5 фута?

177) Сторона вписаннаго правильнаго шестиугольника равна 6 фут.; сколько футъ содержитъ сторона описаннаго правильнаго шестиугольника?

178) Сторона правильнаго шестиугольника, описаннаго около круга, равна 5,4 фут.; сколько футъ содержитъ сторона вписаннаго правильнаго шестиугольника?

179) Около круга, коего радіусъ равенъ 12 дюйм.; описанъ правильный восьмиугольникъ. Вычислить сторону этого восьмиугольника.

180) Около правильнаго шестиугольника описана окружность кру-

га, коей радіусъ равенъ 7 фут.; сколько футъ содержитъ радіусъ вписанной окружности?

181) Радіусъ окружности круга, вписанной въ правильномъ десятиугольникѣ, равенъ 8 дюймамъ. Вычислить сторону этого десятиугольника.

182) Радіусъ окружности круга, вписанной въ квадратѣ, равенъ 15,4 фут. Опредѣлить бокъ этого квадрата.

183) Въ кругѣ, коего діаметръ равенъ 4 фут. 2 дюйм., вписанъ правильный двѣнадцатиугольникъ. Вычислить бокъ этого двѣнадцатиугольника.

184) Въ кругѣ, коего діаметръ равенъ 10 фут., вписанъ правильный восьмиугольникъ. Вычислить бокъ этого восьмиугольника.

185) Сколько футъ содержитъ сторона правильнаго двѣнадцатиугольника, коего апоѳема равна 4,5 фут.?

186) Сколько футъ содержитъ сторона вписаннаго въ кругѣ правильнаго пятиугольника, если сторона описаннаго правильнаго пятиугольника равна 13,6 фут.?

187) Діаметръ окружности круга, описанной около правильнаго десятиугольника, равенъ 18 фут.; сколько футъ содержитъ радіусъ вписанной окружности?

188) Сторона правильнаго многоугольника, содержащаго $2n$ сторонъ и вписаннаго въ кругѣ, равна 3,2 фут., и радіусъ этого круга равенъ 4,8 фут. Вычислить бокъ вписаннаго правильнаго многоугольника, имѣющаго n сторонъ.

189) Въ кругѣ вписанъ правильный пятиугольникъ, котораго сторона равна 9,4 фута. Вычислить радіусъ этого круга.

190) Сколько футъ содержитъ радіусъ окружности круга, описанной около правильнаго двѣнадцатиугольника, котораго сторона содержитъ 12,94 фута?

191) Сторона правильнаго многоугольника, содержащаго n сторонъ и вписаннаго въ кругѣ, равна 0,6 фута, и радіусъ этого круга равенъ 1 фут. 2 дюйм. Сколько футъ содержитъ сторона описаннаго правильнаго многоугольника, имѣющаго $2n$ сторонъ?

192) Сколько футъ содержитъ сторона вписаннаго правильнаго двѣнадцатиугольника, если сторона описаннаго правильнаго двѣнадцатиугольника равна 24,8 фут.?

193) Радіусъ окружности круга, описанной около правильнаго двѣнадцатиугольника, равенъ 40 фут.; сколько футъ содержитъ радіусъ вписанной окружности?

ТЕОРЕМЫ.

194) Во всякомъ четыреугольникѣ, описанномъ около круга, сумма двухъ противоположныхъ сторонъ равна суммѣ двухъ другихъ противоположныхъ сторонъ.

195) Въ кругѣ вписанъ треугольникъ ABC, чрезъ вершину A проведена касательная AG къ окружности и параллельно къ AG проведена прямая BD отъ вершины B до пересѣченія D съ бокомъ AC. Требуется доказать, что $\overline{AB}^2 = AC \times AD$.

196) Квадратъ стороны вписаннаго правильнаго треугольника равенъ утроенному квадрату стороны вписаннаго правильнаго шестиугольника.

197) На окружности, описанной около правильнаго треугольника ABC, дана точка M между вершинами B и C. Требуется доказать, что разстояніе MA равно суммѣ разстояній MB и MC.

198) Сторона b правильнаго треугольника, описаннаго около круга, вдвое больше стороны a вписаннаго правильнаго треугольника.

199) Сторона правильнаго шестиугольника, описаннаго около круга, составляетъ $^2/_3$ стороны правильнаго треугольника, вписаннаго въ томъ-же кругѣ.

200) Въ кругѣ вписанъ правильный треугольникъ, и среднія точки D и E дугъ ADB и AEC, соотвѣтствующихъ бокамъ AB и AC, соединены хордою DE. Требуется доказать, что эта хорда раздѣляется сторонами AB и AC на три равныя части EF, FG, GD.

201) Сторона вписаннаго правильнаго пятиугольника относится къ сторонѣ вписаннаго правильнаго десятиугольника точно такъ, какъ діагональ этого пятиугольника относится къ радіусу круга.

202) Если въ кругѣ вписаны слѣдующіе правильные многоугольники: пятиугольникъ, имѣющій сторону AB, десятиугольникъ, имѣющій сторону BF, и шестиугольникъ, то квадратъ стороны AB равенъ суммѣ квадратовъ сторонъ BF и AC (AC радіусъ круга).

203) Во всякомъ четыреугольникѣ ABCD, вписанномъ въ кругѣ, отношеніе между діагоналями AC и BD равно

$$\frac{AC}{BD} = \frac{AB.AD + BC.CD}{AB.BC + AD.DC}.$$

ЗАДАЧИ ПОСТРОЕНІЯ.

204) Въ данномъ кругѣ вписать треугольникъ, коего сторона AB должна равняться данной прямой *m* и перпендикуляръ AD, опущенный изъ вершины A на бокъ BC, долженъ равняться данной прямой *n*.

205) Около круга описать четыреугольникъ ABCD такимъ образомъ, чтобы стороны AB и BC соотвѣтственно равнялись даннымъ прямымъ *m* и *n*, и уголъ ABC равнялся данному углу *p*.

206) На данной прямой AB построить правильный восьмиугольникъ.

207) Въ кругѣ вписать треугольникъ, коего углы соотвѣтственно должны равняться даннымъ угламъ *m*, *n*, *p*.

208) Около круга описать треугольникъ, въ которомъ два угла должны равняться даннымъ угламъ *m* и *n*.

209) На данной прямой AB построить правильный двѣнадцатиугольникъ.

210) Въ данномъ кругѣ вписать треугольникъ, коего сторона AB должна равняться данной прямой *m*, а прямая AD, проведенная отъ вершины A и раздѣляющая сторону BC на двѣ равныя части, должна равняться данной прямой *n*.

211) Въ данномъ кругѣ вписать четыреугольникъ, коего діагонали должны равняться прямымъ *m* и *n*, и пересѣкаться подъ угломъ, равнымъ данному углу *p*.

212) Въ данномъ кругѣ вписать четыреугольникъ такимъ образомъ, чтобы одна изъ его сторонъ и одна изъ діагоналей соотвѣтственно равнялись даннымъ прямымъ *m* и *n*, и чтобы уголъ, составляемый діагоналями, равнялся данному углу *p*.

213) Изъ даннаго квадрата ABCD образовать правильный восьмиугольникъ, отдѣляя отъ квадрата равные треугольники AEF, BGH, CKL и DMN.

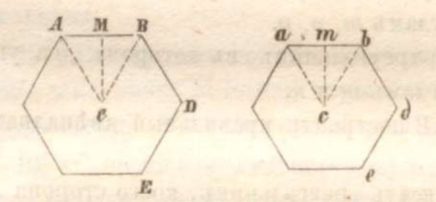
СЕДЬМАЯ ГЛАВА.

Отношеніе между периметрами подобныхъ правильныхъ многоугольниковъ. Периметръ вписаннаго правильнаго многоугольника тѣмъ больше, чѣмъ больше число его сторонъ, а периметръ описаннаго правильнаго многоугольника тѣмъ меньше, чѣмъ больше число его сторонъ. Отношеніе окружности къ діаметру. Подобныя дуги.

105. **Теорема**. *Два правильные многоугольника одинакаго числа сторонъ подобны, и ихъ периметры пропорціональны радіусамъ и апоѳемамъ.*

Даны (фиг. 191) правильные многоугольники ABDE.... и *abde*...., содержащіе по *n* сторонъ.

Фиг. 191.



Въ многоугольникѣ ABDE...., также въ многоугольникѣ *abde*...., сумма угловъ равна $180^0 \times (n-2)$; слѣдовательно каждый уголъ многоугольника ABDE.... и каждый уголъ многоугольника *abde*.... равенъ $\frac{(180^0 \times (n-2)}{n}$. Отсюда мы заключаемъ, что углы данныхъ многоугольниковъ равны между собою. По равенству сторонъ AB, BD, DE.... и сторонъ *ab*, *bd*, *de*.... получатся равныя отношенія

$$\frac{AB}{ab} = \frac{BD}{bd} = \frac{DE}{de} \text{ и т. д.}$$

По равенству угловъ и пропорціональности сторонъ данные многоугольники подобны.

Проведя радіусы CA, CB, *ca*, *cb*, получимъ равнобедренные треугольники ABC и *abc*, въ которыхъ $\angle ACB = \angle acb$ и $\frac{AC}{ac} = \frac{BC}{bc}$; слѣдовательно эти треугольники подобны и $\frac{AC}{ac} = \frac{AB}{ab}$. Назвавъ периметры данныхъ подобныхъ многоугольниковъ ABCD.... и *abcd*...

чрезъ P и P′, получимъ $\frac{P}{P'}=\frac{AB}{ab}$. Изъ двухъ выведенныхъ пропорцій, въ которыхъ вторыя отношенія равны, составится пропорція

$$\frac{P}{P'}=\frac{AC}{ac} \dots\dots (1).$$

Проведя апоѳемы CM и cm, получимъ подобные треугольники ACM и acm, потому-что $\angle AMC = \angle amc = 90^0$ и $\angle ACM = {}^1/_2 \angle ACB = {}^1/_2 \angle acb = \angle acm$; слѣдовательно $\frac{CM}{cm}=\frac{AC}{ac}$. Сравнивъ эту-пропорцію съ пропорціею (1), мы получимъ

$$\frac{P}{P'}=\frac{CM}{cm} \dots\dots (2).$$

106. **Теорема**. *Периметръ вписаннаго правильнаго многоугольника, имѣющаго n сторонъ меньше периметра вписаннаго правильнаго многоугольника, содержащаго 2n сторонъ.*

Дана сторона ab (фиг. 186) вписаннаго правильнаго многоугольника, содержащаго n сторонъ. Раздѣливъ дугу aMb на двѣ равныя части и проведя хорды aM и bM, получимъ

$$aM + bM > ab \text{ или } 2aM > ab;$$
$$\text{откуда } 2n.aM > n.ab.$$

Назвавъ периметръ $n.ab$ чрезъ p и периметръ $2n.aM$ чрезъ p_1, получимъ

$$p_1 > p.$$

Если мы раздѣлимъ каждую изъ дугъ aM, Mb, $bN\dots$ на двѣ равныя и проведемъ хорды, то получится вписанный правильный многоугольникъ p_2, имѣющій вдвое больше сторонъ, нежели многоугольникъ p_1; тогда по предъидущему легко доказать, что

$$p_2 > p_1.$$

Отсюда мы заключаемъ, что удвоеніемъ числа сторонъ, периметры вписанныхъ правильныхъ многоугольниковъ постепенно увеличиваются.

107. **Теорема**. *Периметръ описаннаго правильнаго многоугольника, имѣющаго n сторонъ, больше периметра описаннаго правильнаго многоугольника, содержащаго 2n сторонъ.*

Даны стороны AB и BC (фиг. 186) описаннаго правильнаго многоугольника, имѣющаго n сторонъ. Чрезъ средину b дуги MN проведя касательную GH, получимъ

$$BG + BH > GH.$$

Прибавимъ GM + HN къ обѣимъ частямъ этого неравенства; получимъ

$$BG + GM + BH + HN > MG + GH + HN \text{ или}$$
$$BM + BN > FG + GH \text{ или}$$
$$AB > 2GH.$$

Назвавъ периметръ многоугольника ABCD.... чрезъ p и периметръ многоугольника EFGH.... чрезъ p_1, получимъ

$$n.AB > 2n.GH \text{ или } p > p_1 \text{ или } p_1 < p.$$

Точно такимъ-же образомъ доказывается, что периметръ p_2 описаннаго правильнаго многоугольника, содержащаго вдвое больше сторонъ, нежели многоугольникъ EFGH..., меньше периметра p_1. Отсюда слѣдуетъ, что удвоеніемъ числа сторонъ, периметры описанныхъ правильныхъ многоугольниковъ постепенно уменьшаются.

108. **Теорема**. *Окружность круга есть предѣлъ, къ которому стремятся периметры вписанныхъ и описанныхъ правильныхъ многоугольниковъ при безконечномъ удвоеніи числа сторонъ.*

Назовемъ чрезъ p периметръ вписаннаго правильнаго многоугольника, имѣющаго n сторонъ и сторону a, и чрезъ P периметръ такого-же описаннаго многоугольника, содержащаго n сторонъ и сторону b; тогда (105) по предъидущему $\frac{P}{p} = \frac{b}{a}$, но (102, форм. 1)

$$\frac{b}{a} = \frac{2R}{\sqrt{4R^2 - a^2}},$$

слѣдовательно

$$\frac{P}{p} = \frac{2R}{\sqrt{4R^2 - a^2}}.$$

Положимъ, что удвоеніемъ числа сторонъ получились вписанные правильные многоугольники съ периметрами p_2, p_4, p_8..... и съ сторонами a_2, a_4, a_8.....; тогда по доказанному (106) мы имѣемъ

$p < p_2, p_2 < p_4, p_4 < p_8$ и т. д. и $a < a_2, a_2 < a_4, a_4 < a_8$ и т. д. Продолжая удвоить число сторонъ вписанныхъ и описанныхъ правильныхъ многоугольниковъ, мы постепенно уменьшаемъ стороны вписанныхъ многоугольниковъ и наконецъ дойдемъ до такой стороны, которая меньше всякой произвольно малой величины. При этомъ уменьшенiи стороны a, знаменатель $\sqrt{4R^2 - a^2}$ выраженiя $\frac{2R}{\sqrt{4R^2 - a^2}}$ постепенно приближается къ своему предѣлу $\sqrt{4R^2} = 2R$ и слѣдовательно дробь $\frac{2R}{\sqrt{4R^2 - a^2}}$ приближается къ $\frac{2R}{2R} = 1$. Отсюда слѣдуетъ: если сторона вписаннаго правильнаго многоугольника сдѣлается меньше всякой произвольно малой величины, то отношенiе $\frac{P}{p}$ между периметрами обратится въ единицу, или P сдѣлается равнымъ p; слѣдовательно периметры P и p, которыхъ отношенiе приближается къ единицѣ при безконечномъ удвоенiи числа сторонъ, стремятся къ одному и тому-же предѣлу.

При постепенномъ удвоенiи числа сторонъ вписанныхъ и описанныхъ правильныхъ многоугольниковъ, число точекъ, общихъ окружности круга и периметрамъ этихъ многоугольниковъ, постепенно увеличивается. Отсюда слѣдуетъ, что при постепенномъ удвоенiи числа сторонъ, эти периметры все болѣе и болѣе приближаются къ окружности круга; но такъ какъ между каждымъ вписаннымъ многоугольникомъ и каждымъ описаннымъ должна находиться окружность круга, то мы заключаемъ, что окружность круга есть предѣлъ, къ которому приближаются периметры вписанныхъ и описанныхъ правильныхъ многоугольниковъ при безконечномъ удвоенiи числа сторонъ.

109. **Теорема.** *Окружности круговъ пропорцiональны ихъ радiусамъ.*

Назовемъ данныя окружности чрезъ C и C′, и ихъ радiусы чрезъ R и R′. Впишемъ въ кругѣ C правильный многоугольникъ, и подобный ему многоугольникъ въ кругѣ C′. Назвавъ чрезъ P и P′

периметры этихъ многоугольниковъ, мы имѣемъ пропорцію (105)

$$\frac{P}{P'} = \frac{R}{R'},$$

которая справедлива при какомъ угодно числѣ сторонъ многоугольниковъ, даже если это число сдѣлается произвольно большимъ; но въ такомъ случаѣ периметры P и P' достигнутъ своихъ предѣловъ C и C', и отношеніе $\frac{P}{P'}$ замѣнится отношеніемъ $\frac{C}{C'}$; слѣдовательно при достиженіи предѣловъ предъидущая пропорція обратится въ

$$\frac{C}{C'} = \frac{R}{R'}.$$

110. Слѣдствіе. Въ выведенной пропорціи переставимъ средніе члены и въ новой пропорціи

$$\frac{C}{R} = \frac{C'}{R'}$$

помножимъ послѣдующіе члены на 2; получимъ

$$\frac{C}{2R} = \frac{C'}{2R'}.$$

Отсюда слѣдуетъ, что для всѣхъ окружностей существуетъ одно и то-же отношеніе окружности къ ея діаметру, или другими словами: *отношеніе окружности къ діаметру есть число постоянное.*

Это число, которое принято означать греческою буквою π, есть ирраціональное, т. е. число, которое не можетъ быть выражено точнымъ образомъ; это число можетъ быть вычислено съ какою угодно точностью.

111. **Задача.** *Вычислить отношеніе окружности къ діаметру.*

Отношеніе π выражаетъ длину полуокружности, коей радіусъ равенъ единицѣ, потому-что равенство $\frac{C}{2R} = \pi$ обращается въ $\pi = {}^1/_2 C$ при $R = 1$. По этой причинѣ если вычислить полупериметры правильныхъ многоугольниковъ съ 6, 12, 24, 48, 96.... сторонами (103, 5), вписанныхъ въ окружности C, коей радіусъ равенъ единицѣ, то полученными числами выражается приближенное отношеніе π, изъ которыхъ каждое меньше числа π и ближе подходитъ къ π,

нежели число предшествующаго полупериметра. Потомъ если вычислить полупериметры правильныхъ многоугольниковъ съ 6, 12, 24, 48, 96..... сторонами, описанныхъ около окружности C, то полученными числами выражается приближенное отношеніе π, изъ которыхъ каждое больше числа π и тѣмъ ближе подходитъ къ этому числу, чѣмъ больше сторонъ содержитъ соотвѣтствующій полупериметръ. Этими вычисленіями получаются слѣдующія числа, соотвѣтствующія правильнымъ многоугольникамъ съ 96 сторонами: 3,1410 для полупериметра вписаннаго и 3,1427 для полупериметра описаннаго многоугольника. Отсюда слѣдуетъ, что число π содержится между числами 3,1410 и 3,1427, и что 3,142 выражаетъ его величину съ точностью до 0,001.

Выше-описаннымъ способомъ отношеніе π вычислено Архимедомъ и найдено, что оно содержится между числами

$$3 + {}^{10}/_{71} = 3,140\ldots. \text{ и } 3 + {}^{10}/_{70} = {}^{22}/_{7} = 3,142\ldots.$$

Петръ Мецій (Metius), голландскій математикъ, жившій около 1550 года, нашелъ для π число ${}^{355}/_{113}$. По новѣйшимъ вычисленіямъ найдено

$$\pi = 3,1415926535\ldots; \text{ откуда } {}^{1}/\pi = 0,3183098861\ldots.$$

112. **Задача**. *По извѣстному радіусу найти длину окружности, и обратно: по данной окружности опредѣлить ея радіусъ.*

Изъ равенства $\frac{C}{2R} = \pi$ выводятся слѣдующія формулы

$$C = 2\pi R\ldots. (1) \text{ и } R = \frac{C}{2\pi}\ldots. (2);$$

слѣдовательно *1) чтобы найти длину окружности, должно помножить число π на удвоенный радіусъ, и 2) чтобы опредѣлить радіусъ, должно раздѣлить на π данную длину полуокружности.*

Примѣры.

1) Вычислить ободъ колеса, котораго радіусъ равенъ $10^1/_2$ вершкамъ.

Въ формулу (1) подставимъ 3,14 вмѣсто π и 10,5 вмѣсто R; получимъ
$C = 3,14 \times 21 = 64,89$ вершк. $= 4,05$ аршина съ точностью до 0,01 аршина.

2) Зная, что градусъ экватора содержитъ 15 географическихъ миль, найти радіусъ экватора.

Экваторъ содержитъ $15 \times 360 = 5400$ географическимъ милямъ. Чтобы найти радіусъ экватора, должно раздѣлить $^{5400}/_2 = 2700$ на $\pi = 3,14159$; получимъ $R = 859,437$ геогр. мил. съ точностью до 0,001 географической мили.

113. Слѣдствіе. Такъ какъ длина полуокружности, описанной радіусомъ R, равна πR, то длина дуги, содержащей одинъ градусъ, равна $\frac{\pi R}{180}$; слѣдовательно длина L дуги, содержащей n градусовъ и описанной радіусомъ R, выразится чрезъ

$$L = \frac{\pi R n}{180} \ldots\ldots (1).$$

Изъ этого выраженія выводятся двѣ слѣдующія формулы

$$n = \frac{180L}{\pi R} \ldots. (2) \text{ и } R = \frac{180L}{\pi n} \ldots.. (3),$$

по которымъ возможно вычислить число градусовъ и радіусъ какой-нибудь дуги, зная ея длину.

Примѣры.

1) Радіусъ окружности содержитъ $4^1/_2$ дюйма; сколько дюймовъ содержитъ длина дуги, равной $25^0 45'$?

Въ формулу (1) подставивъ $25^3/_4 = {}^{103}/_4$ вмѣсто n, 4,5 вмѣсто R и 3,14 вмѣсто π, получимъ

$$L = \frac{3,14 \times 4,5 \times 103}{180 \times 4} = 2,021 \text{ дюйма.}$$

2) Сколько градусовъ, минутъ и секундъ содержитъ дуга, длина которой равна ея радіусу?

По формулѣ (2) мы имѣемъ

$$n = \frac{180^0}{\pi} = 180^0 \times 0,31830988 = 57^0 17' 44,8''.$$

3) Вычислить радіусъ дуги, содержащей 30 градусовъ и 1 футъ длины.

По формулѣ (3) мы имѣемъ

$$R = \frac{180}{\pi.30} = \frac{6}{\pi} = 6 \times 0,3183 = 1,91 \text{ фута}.$$

114. **Теорема.** *Подобныя дуги пропорціональны ихъ радіусамъ.*

Двѣ дуги разныхъ круговъ, называются *подобными*, если соотвѣтствующіе имъ центральные углы равны.

Назовемъ чрезъ L и L' длины двухъ дугъ, чрезъ R и R' ихъ радіусы и чрезъ n и n' соотвѣтствующіе центральные углы; получимъ равенства (1,113)

$$L = \frac{\pi R n}{180} \text{ и } L' = \frac{\pi R' n'}{180}.$$

Раздѣливъ первое равенство по-членно на второе, получимъ

$$\frac{L}{L'} = \frac{R}{R'}.$$

ЧИСЛЕННЫЕ ВОПРОСЫ.

214) Вычислить окружность круга, котораго діаметръ равенъ: *a*) 51,5 дюйма, *b*) 3, 8 дюйма и *c*) 7/8 дюйма [1]).

215) Посредствомъ мѣрной тесьмы найдена окружность ствола дерева въ 11,775 фута. Опредѣлить діаметръ дерева.

216) Экипажное колесо, имѣющее въ діаметрѣ 4 фута, сдѣлало при своемъ движеніи 864 оборота. Сколько верстъ пробѣгало это колесо?

217) Опрдѣлить діаметръ колеса, которое на протяженіи 2,272 версты сдѣлало 500 оборотовъ.

218) Бокъ квадрата, вписаннаго въ кругѣ, равенъ 1,8 дюйма. Сколько дюймовъ содержитъ окружность этого круга?

219) Периметръ правильнаго шестиугольника, вписаннаго въ кругѣ, содержитъ 45 дюймовъ. Сколько дюймовъ содержитъ окружность этого круга?

220) Требуется приготовить экипажныя колеса такимъ образомъ,

[1]) Взять 4,13 для π.

чтобы заднее колесо сдѣлало 30 оборотовъ въ то время, когда переднее дѣлаетъ 40 оборотовъ. Сколько футъ долженъ содержать діаметръ передняго колеса, если окружность задняго равна 11,775 фута?

221) Сколько дюймовъ содержитъ радіусъ окружности, дуга которой равна 70,4 дюйма и соотвѣтствующій центральный уголъ равенъ 64°?

222) Сколько дюймовъ содержитъ окружность круга, въ которомъ хорда, равная 18 дюймамъ, отстоитъ отъ центра на 16 дюймовъ?

223) Опредѣлить длину дуги, описанной радіусомъ въ 7 дюймовъ и соотвѣтствующей центральному углу въ 97°13′15″.

224) Сколько градусовъ, минутъ и секундъ содержитъ центральный уголъ, которому соотвѣтствуетъ дуга въ 3,75 дюйма, описанная радіусомъ въ 10,25 дюйма?

225) Дуга, соотвѣтствующая центральному углу въ 112°, 4 дюймами больше радіуса. Сколько дюймовъ содержитъ эта дуга?

226) Окружность круга больше ея діаметра 8 дюймами. Сколько дюймовъ содержитъ этотъ діаметръ?

227) Окружность круга и ея діаметръ содержатъ вмѣстѣ 104,04 дюйма. Сколько дюймовъ содержитъ окружность?

228) Въ кругѣ вписанъ правильный восьмиугольникъ, сторонѣ котораго соотвѣтствуетъ дуга въ 13,5 дюйма. Сколько дюймовъ содержитъ радіусъ этого круга?

229) Сколько градусовъ содержатъ центральные углы, которымъ соотвѣтствуютъ дуги, равныя $^1/_4\pi$, $^1/_2\pi$, $^3/_2\pi$, $^1/_3\pi$, $^2/_3\pi$?

230) Оконечность минутной стрѣлки часовъ, содержащей 5 дюймовъ длины, описала дугу въ 7 дюймовъ. Сколько градусовъ, минутъ и секундъ содержитъ центральный уголъ, соотвѣтствующій этому пройденному пути минутной стрѣлки?

231) Сколько градусовъ, минутъ и секундъ содержитъ центральный уголъ, которому соотвѣтствуетъ дуга, равная утроенному радіусу?

232) Къ окружности, описанной радіусомъ въ 3,75 дюйма, проведены двѣ касательныя подъ угломъ въ 45°. Сколько дюймовъ содержитъ дуга, заключенная между этими касательными?

233) Сколько футовъ пробѣгаетъ въ секунду точка окружности машиннаго колеса, котораго діаметръ равенъ 12 футамъ, если въ минуту это колесо дѣлаетъ 40 оборотовъ?

234) Описаны двѣ дуги L и L′ равной длины: дуга L радіусомъ въ 0,25 фута к дуга L′ радіусомъ въ 0,18 фута. Сколько градусовъ и минутъ въ дугѣ L′, если дуга L содержитъ 16°30′?

235) Два города A и B лежатъ на параллельномъ кругѣ, котораго радіусъ равенъ 572 географическимъ милямъ; долгота города A равна 54°20′ и долгота города B равна 75°. Сколько географическихъ миль содержитъ разстояніе между городами A и B на параллельномъ кругѣ [1])?

236) Длина дуги, соотвѣтствующей центральному углу въ 112°, 4 дюймами больше радіуса. Сколько дюймовъ содержитъ длина дуги?

237) На сколько периметръ правильнаго десятиугольника, имѣющаго сторону въ 12 футъ, больше вписанной въ немъ окружности?

238) На сколько периметръ правильнаго двѣнадцатиугольника меньше описанной около него окружности, коей радіусъ равенъ 9 футамъ?

ОТДѢЛЪ II.

ПЛОЩАДИ.

ПЕРВАЯ ГЛАВА.

Площади: прямоугольника, параллелограма, треугольника, трапеціи и многоугольника. Задачи построенія.

115. Величина протяженія какой-либо плоской фигуры называется *площадью*.

Извѣстно, что двѣ совмѣщающіяся фигуры называются *равными*. Если площади двухъ несовмѣщающихся фигуръ равны, то эти фигуры называются *равномѣрными*.

Если какая-либо сторона треугольника принимается за его *осно-*

[1]) Въ этой и слѣдующихъ задачахъ взять $\pi = 3{,}1416$.

ваніе, то перпендикуляръ, опущенный на нее изъ противоположной вершины, есть *высота* треугольника.

Принявъ одну изъ сторонъ параллелограма за его *основаніе*, мы называемъ его *высотою* разстояніе между основаніемъ и противолежащимъ бокомъ.

Если одна изъ сторонъ прямоугольника принимается за его *основаніе*, то перпендикулярная къ ней сторона будетъ *высотою* прямоугольника.

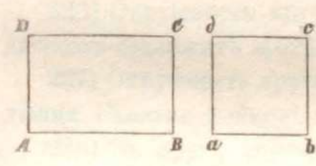
Разстояніе между *основаніями* трапеціи называется ея *высотою*.

116. Теорема. *Два прямоугольника, имѣющіе ту-же самую высоту, пропорціональны ихъ основаніямъ.*

Дано (фиг. 192): $BC = bc$. Требуется доказать, что

$$\frac{ABCD}{abcd} = \frac{AB}{ab}.$$

Фиг. 192.



1) Предположимъ, что основанія AB и ab соизмѣримы, и что ихъ общая мѣра k содержится m разъ въ AB и n разъ въ ab. Отложивъ общую мѣру k на прямыхъ AB и ab, и чрезъ полученныя точки дѣленія проведя прямыя параллельно къ прямымъ AD и ad, мы раздѣлимъ прямоугольникъ ABCD на m равныхъ прямоугольниковъ P, и $abcd$ на n такихъ-же прямоугольниковъ P; тогда получимъ

$$\frac{ABCD}{abcd} = \frac{m.P}{n.P} \text{ или}$$

$$\frac{ABCD}{abcd} = \frac{m}{n} \ldots\ldots (1);$$

но также $\frac{AB}{ab} = \frac{m}{n} \ldots\ldots (2)$; слѣдовательно получится

$$\frac{ABCD}{abcd} = \frac{AB}{ab} \ldots\ldots (3).$$

2) Докажемъ теперь, что выведенная пропорція (3) также справедлива для несоизмѣримыхъ основаній AB и ab. Для этого отложимъ на основаніи AB часть $AE = ab$ (фиг. 193) и проведемъ прямую EF перпендикулярно къ AB; получимъ прямоугольникъ AEFD,

Фиг. 193.

равный прямоугольнику $abcd$, потому-что $AE = ab$ и $AD = ad$. Раздѣляя прямую AB на произвольное число равныхъ частей, мы замѣчаемъ, что ни одна точка дѣленія не совпадетъ съ точкою E, потому-что въ противномъ случаѣ прямыя AB и AE (или ab) были бы соизмѣримы. Чрезъ точки H и L дѣленія, ближайшія къ точкѣ E, проведемъ прямыя HG и LK параллельно къ EF; получимъ два прямоугольника

$$ADGH > ADFE \text{ и } ADKL < ADFE.$$

Отсюда слѣдуетъ, что

$$\frac{ABCD}{ADFE} > \frac{ABCD}{ADGH} \text{ и}$$

$$\frac{ABCD}{ADFE} < \frac{ABCD}{ADKL}.$$

По соизмѣримости прямыхъ AB и AH, и прямыхъ AB и AL мы имѣемъ

$$\frac{ABCD}{ADGH} = \frac{AB}{AH} \text{ и } \frac{ABCD}{ADKL} = \frac{AB}{AL}.$$

Въ выведенныхъ неравенствахъ замѣнивъ отношенія равными имъ отношеніями, получимъ

$$\frac{ABCD}{ADFE} > \frac{AB}{AH} \text{ и } \frac{ABCD}{ADFE} < \frac{AB}{AL} \text{ или}$$

$$\frac{AB}{AH} < \frac{ABCD}{ADFE} < \frac{AB}{AL} \ldots\ldots (4).$$

Такъ какъ $AE > AL$ и $AE < AH$, то

$$\frac{AB}{AE} > \frac{AB}{AH} \text{ и } \frac{AB}{AE} < \frac{AB}{AL} \text{ или}$$

$$\frac{AB}{AH} < \frac{AB}{AE} < \frac{AB}{AL} \ldots\ldots (5).$$

Изъ неравенствъ (4 и 5) видно, что отношенія $\frac{ABCD}{ADFE}$ и $\frac{AB}{AE}$ заключаются между дробями $\frac{AB}{AH}$ и $\frac{AB}{AL}$, которыя могутъ быть сближены, какъ угодно. Въ самомъ дѣлѣ, раздѣленіемъ стороны AB на весьма большое число равныхъ частей увеличится прямая AL и уменьшится прямая AH, т. е. точки H и L приближаются къ точкѣ E;

вслѣдствіе чего дробь $\frac{AB}{AL}$ уменьшится и дробь $\frac{AB}{AH}$ увеличится. Если же раздѣлить прямую AB на безконечное число равныхъ частей, то дроби $\frac{AB}{AL}$ и $\frac{AB}{AH}$ могутъ быть сближены такимъ образомъ, что ихъ разность сдѣлается меньше всякой произвольно малой величины. Но какъ мала ни была разность дробей $\frac{AB}{AL}$ и $\frac{AB}{AH}$ всегда должны находиться между ними отношенія $\frac{ABCD}{ADFE}$ и $\frac{AB}{AE}$; а по предъидущему (17) извѣстно: если между двумя величинами, которыхъ разность можетъ быть сдѣлана меньше всякой произвольно малой величины, заключаются двѣ другія величины, то послѣднія должны быть равны между собою; слѣдовательно

$$\frac{ABCD}{ADFE} = \frac{AB}{AE} \text{ или}$$

$$\frac{ABCD}{abcd} = \frac{AB}{ab}.$$

117. Слѣдствіе. Въ прямоугольникахъ ABCD и *abcd* мы можемъ принять прямыя AD и *ad* за основанія; тогда прямыя AB и *ab* будутъ высотами этихъ прямоугольниковъ и слѣдовательно доказанная пропорція (3) означаетъ, что *два прямоугольника, имѣющіе равныя основанія, пропорціональны ихъ высотамъ.*

118. **Теорема**. *Два прямоугольника относятся между собою, какъ произведенія ихъ основаній на соотвѣтствующія высоты.*

Требуется доказать, что $\frac{ABCD}{abcd} = \frac{AB \times AD}{ab \times ad}$ (фиг. 194).

Фиг. 194.

На прямой AD отложимъ AE = *ad* и проведемъ прямую EF параллельно къ AB. Такъ какъ прямоугольники ABCD и ABFE имѣютъ общее основаніе AB, то

$$\frac{ABCD}{ABFE} = \frac{AD}{AE}.$$

Прямоугольники ABFE и *abcd* имѣютъ равныя высоты AE и *ad*; слѣдовательно

$$\frac{ABFE}{abcd} = \frac{AB}{ab}.$$

Изъ этихъ двухъ пропорцій по предъидущему (15) получимъ

$$\frac{ABCD}{abcd}=\frac{AD}{AE}\times\frac{AB}{ab} \text{ или}$$

$$\frac{ABCD}{abcd}=\frac{AB}{ab}\times\frac{AD}{ad}=\frac{AB\times AD}{ab\times ad}.$$

119. **Теорема.** *Площадь прямоугольника измѣряется произведеніемъ числа линейныхъ единицъ, содержащихся въ его основаніи, на число тѣхъ-же линейныхъ единицъ, содержащихся въ его высотѣ.*

Вычислить площадь прямоугольника значитъ: найти ея отношеніе къ площади, принятой за единицу площадей. Единица или мѣра площадей есть квадратъ, бокъ котораго равенъ какой-нибудь мѣрѣ длины; такъ напримѣръ квадратъ, бокъ котораго равенъ аршину, есть квадратная мѣра (мѣра площадей), называемая *квадратнымъ аршиномъ*.

Даны (фиг. 195) прямоугольникъ ABCD и квадратъ *abcd*, бокъ

Фиг. 195.

котораго равенъ какой-нибудь линейной мѣрѣ. Основываясь на теоремѣ (118), мы имѣемъ

$$\frac{ABCD}{abcd}=\frac{AB}{ab}\times\frac{AD}{ad},$$

т. е. квадратъ *abcd*, принятый за единицу площадей, содержится въ прямоугольникѣ ABCD столько разъ, сколько получится отъ умноженія числа линейныхъ единицъ, содержащихся въ основаніи AB, на число тѣхъ-же единицъ, содержащихся въ высотѣ AD. Отсюда слѣдуетъ: чтобы узнать, сколько квадратныхъ мѣръ *abcd* содержитъ прямоугольникъ ABCD, должно измѣрить основаніе AB и высоту AD линейною мѣрою *ab* и полученныя числа перемножить; слѣдовательно назвавъ числа $\frac{ABCD}{abcd}$, $\frac{AB}{ab}$, $\frac{AD}{ad}$ соотвѣтственно чрезъ Q, B и H, получимъ формулу

$$Q=B\times H,$$

которая выражается вотъ какъ: *площадь прямоугольника равна произведенію основанія на высоту.*

Примѣры. *Найти площадь пола, коего длина равна $5^3/_4$ аршина и ширина содержитъ $4^5/_8$ аршина.*

По выведенной формулѣ мы имѣемъ

$$Q = 5^3/_4 \times 4^5/_8 = 26^{19}/_{32} \text{ квадр. ар.}$$

или 26 квадр. ар. 152 квадр. верш.

Сколько саженъ длины содержитъ прямоугольное поле, равное 1 десятинѣ, если его ширина равна 52 саженямъ?

Изъ выведенной формулы мы получимъ

$$B = \frac{Q}{H}.$$

Замѣнимъ Q числомъ 2400, потому-что десятина равна 2400 квадр. саж., и H числомъ 32; получимъ

$$B = {}^{2400}/_{32} = 75 \text{ саженямъ.}$$

120. Слѣдствіе. Означивъ чрезъ B отношеніе бока какого-нибудь квадрата къ линейной мѣрѣ, мы узнаемъ по формулѣ (теор. 119), что площадь квадрата равна

$$Q = B \times B = B^2$$

или *площадь квадрата равна второй степени одного изъ его боковъ.*

Вторая степень какого-нибудь числа можетъ быть принята за площадь квадрата, котораго бокъ равенъ этому числу. Этимъ объясняется однозначность словъ „квадратъ“ и „вторая стень“, употребляемыхъ въ Алгебрѣ.

121. **Теорема.** *Квадратъ, построенный на суммѣ двухъ прямыхъ, равенъ суммѣ квадратовъ, построенныхъ на этихъ прямыхъ, вмѣстѣ съ удвоеннымъ прямоугольникомъ, коего высота и основаніе соотвѣтственно равны даннымъ прямымъ.*

Фиг. 196.

Дано (фиг. 196) $AC = AB + BC$. Требуется доказать, что $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2AB.BC$.

На прямой AC построимъ квадратъ ACDE. Чрезъ точку B проведемъ BK параллельно къ AE, отложимъ $AH = AB$ и чрезъ H проведемъ HF параллельно къ AC; тогда квадратъ ACDE разложится

на два квадрата ABGH, DFGK и два прямоугольника BCFG и EHGK. По предъидущему (119, 120) извѣстно, что ACDE $= \overline{AC}^2$, ABGH $= \overline{AB}^2$, DFGK $= \overline{BC}^2$, BCFG $=$ BG.BC $=$ AB.BC, EHGK $=$ HG.DF $=$ AB.BC; слѣдовательно

$$ACDE = \overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2AB.BC.$$

Означивъ длину AB чрезъ a и длину BC чрезъ b, мы имѣемъ

$$\overline{AC}^2 = (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab.$$

Отсюда мы заключаемъ, что выведенная формула соотвѣтствуетъ формулѣ, выражающей вторую степень суммы двухъ количествъ.

122. **Теорема.** *Квадратъ, построенный на разности двухъ прямыхъ, равенъ суммѣ квадратовъ, построенныхъ на этихъ прямыхъ, безъ удвоеннаго прямоугольника, коего высота и основаніе соотвѣтственно равны даннымъ прямымъ.*

Дано (фиг. 196) AB $=$ AC $-$ BC. Требуется доказать, что $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2AB \times BC$.

Прямоугольники DFHE и BCDK равны и прямоугольникъ BCFG $=$ BCDK $-$ DFGK. Квадратъ ABGH равенъ ACDE $-$ DFHE $-$ BCFG или

$$ABGH = ACDE - DFHE - BCDK + DFGK;$$

но ABGH $= \overline{AB}^2$, ACDE $= \overline{AC}^2$, DFHE $=$ DE $\times$ DF $=$ AC $\times$ BC, BCDK $=$ CD $\times$ BC $=$ AC $\times$ BC, DFGK $= \overline{KD}^2 = \overline{BC}^2$; слѣдовательно

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 - AC \times BC - AC \times BC + \overline{BC}^2 \text{ или}$$

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2AC \times BC.$$

Означивъ длину AC чрезъ a и длину BC чрезъ b, получимъ выраженіе

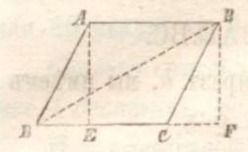
$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab,$$

совершенно однозначущее съ алгебраическимъ выраженіемъ второй степени разности двухъ количествъ.

123. Теорема. *Площадь параллелограма измѣряется произведеніемъ его основанія на высоту.*

Изъ вершины A и B параллелограма ABCD (фиг. 197) опустивъ перпендикуляры AE и BF на противоположный бокъ DC, получимъ прямоугольникъ ABFE, равномѣрный данному параллелограму. Въ самомъ дѣлѣ, параллелограмъ ABCD = трапеціи ABCE + треуг. ADE и прямоугольникъ ABFE = трапеціи ABCE + треуг. BCF; но треугольники ADE и BCF равны, потому-что AD = BC (противолежащія стороны параллелограма), AE = BF и $\angle$ AED = $\angle$ BFC = 90^0. Извѣстно, что площадь прямоугольника, коего основаніе AB равно B и высота AE равна H, выражается чрезъ Q = B $\times$ H; слѣдовательно площадь параллелограма ABCD, равномѣрнаго прямоугольнику ABFE, выразится также чрезъ

Фиг. 197.



$$Q = B \times H.$$

Отсюда слѣдуетъ: чтобы найти площадь параллелограма, должно измѣрить его основаніе и высоту и потомъ перемножить найденныя числа.

Слѣдствіе. Два параллелограма съ равными основаніями и равными высотами равномѣрны.

Два параллелограма относятся между собою, какъ произведенія ихъ основаній на высоты.

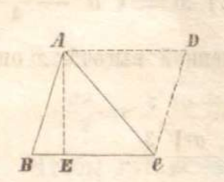
Два параллелограма съ равными высотами пропорціональны ихъ основаніямъ.

Два параллелограма съ равными основаніями пропорціональны ихъ высотамъ.

124. Теорема. *Площадь треугольника равна половинѣ произведенія его основанія на высоту.*

Чрезъ вершины A и C (фиг. 198) даннаго треугольника ABC проведя прямыя AD и CD соотвѣтственно параллельно къ сторонамъ

Фиг. 198.



BC и AB, получимъ параллелограмъ ABCD. Треугольникъ ABC составляетъ половину параллелограма ABCD, потому-что всякій параллелограмъ раздѣляется діагональю на два равные треугольники (I, 84). Такъ какъ площадь параллелограма ABCD равна произведенію его основанія BC на высоту AE (123), то площадь треугольника ABC должна равняться половинѣ произведенія его основанія BC на высоту AE; слѣдовательно означивъ чрезъ B число линейныхъ мѣръ, содержащихся въ основаніи BC, и чрезъ H число тѣхъ-же мѣръ, содержащихся въ высотѣ AE, получимъ формулу

$$Q = \frac{B.H}{2} = \frac{B}{2}.H = B.\frac{H}{2}.$$

Слѣдствіе. Два треугольника съ равными основаніями и равными высотами равномѣрны.

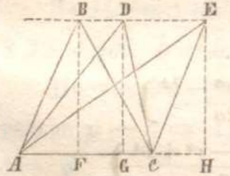
Два треугольника относятся между собою, какъ произведенія ихъ основаній на высоты.

Два треугольника съ равными высотами пропорціональны ихъ основаніямъ.

Два треугольника съ равными основаніями пропорціональны ихъ высотамъ.

Треугольники ABC, ADC, AEC (фиг. 199) равномѣрны. Въ самомъ дѣлѣ, у нихъ общее основаніе AC, и ихъ высоты BF, DG, EH равны, потому-что вершины B, D, E находятся на прямой BE, параллельной къ основанію AC.

Фиг. 199.



125. **Задача.** *По даннымъ сторонамъ треугольника опредѣлить его площадь.*

1) Данъ равносторонній треугольникъ ABC, котораго бокъ равенъ a. Изъ вершины A опустивъ перпендикуляръ x на противолежащій бокъ, получимъ прямоугольный треугольникъ съ катетами x

и $\frac{a}{2}$, и гипотенузою a; слѣдовательно (72) $x = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{3}$. По извѣстному основанію a и вычисленной высотѣ x опредѣлится площадь

$$ABC = \frac{a}{2} \cdot x = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

2) Данъ равнобедренный треугольникъ ABC, коего основаніе BC равно a и бокъ AB равенъ c. Изъ вершины A опустивъ перпендикуляръ x на основаніе BC, получимъ прямоугольный треугольникъ, въ которомъ (70) катетъ $x = \sqrt{c^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{4c^2 - a^2}}{2}$. Площадь даннаго треугольника равна

$$S = \frac{ax}{2} = \frac{a\sqrt{4c^2 - a^2}}{4} = \frac{a\sqrt{(2c+a)(2c-a)}}{4}.$$

3) Данъ разносторонній треугольникъ ABC (фиг. 174), въ которомъ $AB = c$, $AC = b$ и $BC = a$. Означивъ высоту AD этого треугольника чрезъ x и отрѣзокъ BD чрезъ y, получимъ $DC = a - y$, $x^2 = c^2 - y^2$..... (1) изъ прямоугольнаго треугольника ABD и $x^2 = b^2 - (a-y)^2$.... (2) изъ прямоугольнаго треугольника ACD.

Изъ уравненій (1) и (2) составится уравненіе

$$c^2 - y^2 = b^2 - (a-y)^2 \text{ или}$$

$$c^2 = b^2 - a^2 + 2ay; \text{ откуда}$$

$$y = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}.$$

Подставивъ найденную величину y въ уравненіе (1), получимъ

$$x^2 = c^2 - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right)^2$$

$$= \left(c + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right)\left(c - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right)$$

$$= \left(\frac{2ac + a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right)\left(\frac{2ac - a^2 - c^2 + b^2}{2a}\right)$$

$$= \left(\frac{(a+c)^2 - b^2}{2a}\right)\left(\frac{b^2 - (a-c)^2}{2a}\right)$$

$$= \frac{(a+c+b)(a+c-b)(b+a-c)(b+c-a)}{4a^2}; \text{ откуда}$$

$$x = \frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}}{2a}.$$

Площадь S треугольника ABC (124) равна

$$\frac{ax}{2} = \frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}}{4}.$$

Чтобы дать этому выраженію простѣйшій видъ, назовемъ полупериметръ $\frac{a+b+c}{2}$ чрезъ p; тогда

$a+b+c=2p$, $a+b-c=2p-2c=2(p-c)$,

$a+c-b=2p-2b=2(p-b)$,

$b+c-a=2p-2a=2(p-a)$ и

$$S = \frac{\sqrt{2p.\ 2(p-a).\ 2(p-b).\ 2(p-c)}}{4} \text{ или}$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Примѣры. *1) Найти площадь равносторонняго треугольника, коего бокъ равенъ одной сажени.*

Въ формулѣ $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ подставивъ $a=1$, получимъ

$$S = \frac{1.\sqrt{3}}{4} = \frac{1{,}732}{4} = 0{,}433 \text{ квадр. сажени.}$$

2) *Найти площадь равнобедреннаго треугольника, коего бокъ содержитъ 12 футъ и основаніе равно 15 футамъ.*

Въ выведенной формулѣ подставивъ $a=15$ и $c=12$, получимъ

$$S = \frac{15\sqrt{(24+15)(24-15)}}{4} = \frac{15\sqrt{39.9}}{4} = 72{,}229 \text{ квадр. фут.}$$

3) *Найти площадь треугольника, коего стороны суть $a = 8{,}13$ фут., $b=5{,}67$ фут. и $c=6{,}3$ фут.*

Полупериметръ этого треугольника равенъ $p=10{,}05$; слѣдовательно $p-a=1{,}92$ фут., $p-b=4{,}38$ фут., $p-c=3{,}75$ фут. и

$$S = \sqrt{10{,}05 \times 1{,}92 \times 4{,}38 \times 3{,}75} = 17{,}8 \text{ квадр. фут.}$$

126. *Площадь трапеціи равна полусуммѣ ея основаній, помноженной на высоту.*

Продолживъ стороны AB и DC (фиг. 200) данной трапеціи ABCD, отложимъ $BF = DC$ и $CE = AB$, и проведемъ прямую EF. Такъ какъ $DC = BF$ и $CE = AB$, то непремѣнно $DC + CE = AB + BF$ или $DE = AF$.

Фиг. 200.

По равенству и параллельности прямыхъ DE и AF мы заключаемъ, что четыреугольникъ ADEF параллелограмъ; слѣдовательно стороны AD и EF равны и параллельны. Трапеціи ABCD и BCEF равны, потому-что сторона BC общая, $AB = CE$, $DC = BF$, $AD = EF$, $\angle ABC = \angle BCE$, $\angle BCD = \angle CBF$, $\angle ADC = \angle AFE$, $\angle BAD = \angle DEF$; откуда

$ADEF = ABCD + BCEF = 2ABCD$ и

$ABCD = {}^1/_2 ADEF$; но (123)

$ADEF = AF \times DH = (AB + BF) \times DH = (AB + DC) \times DH$;

слѣдовательно

$$ABCD = {}^1/_2 (AB + DC) \times DH.$$

Слѣдствіе. Зная (I, 107), что хорда MN трапеціи ABCD равна ${}^1/_2 (AB + DC)$, мы подставимъ MN въ выведенной формулѣ; получимъ

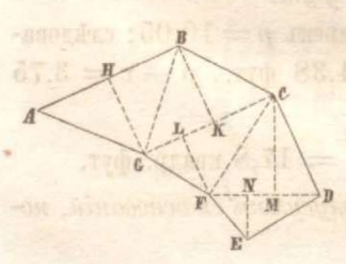
$$ABCD = MN \times DH,$$

т. е. *площадь трапеціи равна произведенію ея хорды на высоту.*

127. **Задача.** *Вычислить площадь какого-нибудь многоугольника.*

1) Проведя діагонали GB, GC, FC, FD (фиг. 201), опустимъ на нихъ перпендикуляры BK, FL, CM, EN и перпендикуляръ GH на AB. Потомъ измѣримъ основанія AB, GC, FD и высоты GH, BK, FL, CM, EN, и вычислимъ площади треугольниковъ ABG, CBG, CGF, CDF, DEF. Наконецъ сложивъ эти площади, получимъ площадь даннаго многоугольника.

Фиг. 201.

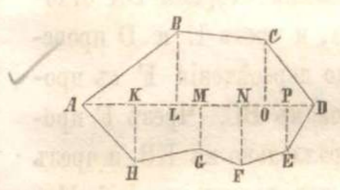


2) Соединимъ точку O (фиг. 202), взятую внутри даннаго многоугольника, съ его вершинами. Потомъ измѣримъ стороны даннаго многоугольника и перпендикуляры OF, OG, OH, OK, OL, опущенные на нихъ изъ точки O. Вычисливъ площади треугольниковъ ABO, BCO, CDO и т. д. и взявъ ихъ сумму, получимъ площадь даннаго многоугольника.

Фиг. 202.

3) Проведя діагональ между отдаленнѣйшими вершинами A и D даннаго многоугольника (фиг. 203), опустимъ на нее перпендикуляры BL, CO, EP и т. д. изъ всѣхъ вершинъ; этими перпендикулярами многоугольникъ раздѣлится на трапеціи и прямоугольные треугольники. Измѣривъ прямыя AK, AL, KM, LO, MN, NP, OD, PD и проведенные перпендикуляры, вычислимъ площади образовавшихся трапецій и прямоугольныхъ треугольниковъ. Наконецъ сложимъ эти площади, чтобы получить площадь даннаго многоугольника.

Фиг. 203.

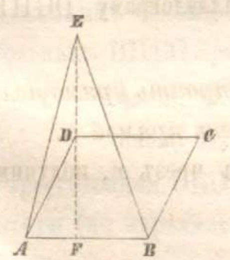


128. **Задача.** *Построить треугольникъ, равномѣрный данному параллелограму* ABCD, *такимъ образомъ, чтобы основаніе треугольника равнялось основанію параллелограма.*

Продоживъ высоту FD (фиг. 204), отложимъ DE = DF и проведемъ прямыя EA и EB; получимъ требуемый треугольникъ ABE. Въ самомъ дѣлѣ, площадь ABCD = AB $\times$ DF и площадь ABE

$$= \frac{AB \times EF}{2} = \frac{AB \times 2DF}{2} = AB \times DF.$$

Фиг. 204.

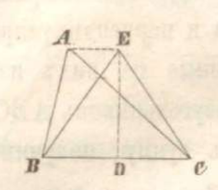


129. **Задача.** *Обратить данный треугольникъ въ равномѣрный ему равнобедренный треугольникъ.*

Изъ средины D (фиг. 205) основанія BC даннаго треугольника

ABC возставимъ перпендикуляръ DE до пересѣченія E съ прямою

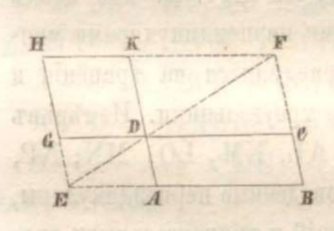
Фиг. 205.



AE, проведенною чрезъ вершину A параллельно къ BC. Соединивъ точку E съ вершинами B и C, получимъ требуемый треугольникъ EBC. Въ самомъ дѣлѣ, треугольники ABC и EBC равномѣрны (124) и треугольникъ EBC равнобедренный, потому-что (I, 49) BE = CE.

129. **Задача.** *На данной прямой m построить параллелограмъ, равномѣрный данному параллелограму* ABCD (фиг. 206).

Фиг. 206.



На продолженіи стороны BA отложимъ AE = m, и чрезъ E и D проведемъ прямую до пересѣченія F съ продолженнымъ бокомъ BC. Чрезъ F проведемъ FH параллельно къ EB, и чрезъ E прямую EH параллельно къ BF. Наконецъ продоливъ бокъ AD до пересѣченія K съ прямою FH, и бокъ CD до пересѣченія G съ прямою EH, получимъ требуемый параллелограмъ DGHK. Въ самомъ дѣлѣ (I, 92), треуг. ADE = треуг. GDE, треуг. CDF = треуг. KDF; слѣдовательно треуг. ADE + треуг. CDF = треуг. GDE + треуг. KDF. Также треуг. EFB = треуг. EFH, слѣдовательно

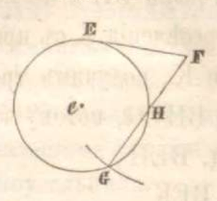
треуг. EFB — (треуг. ADE + треуг. CDF) =
треуг. EFH — (треуг. GDE + треуг. KDF)

или параллелограмъ ABCD равномѣренъ параллелограму DGHK, коего бокъ DG = AE = m.

130. **Задача.** *На данной прямой m построить прямоугольникъ, равномѣрный квадрату, коего бокъ равенъ прямой a.*

Означивъ высоту искомаго прямоугольника чрезъ x, получимъ $m.x = a^2$, откуда $\frac{m}{a} = \frac{a}{x}$.

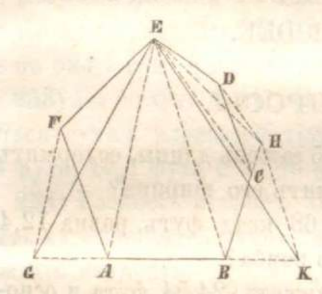
Чтобы найти высоту x прямоугольника, должно провести касательную EF = a къ какой-нибудь окружности C (фиг. 207), и изъ



Фиг. 207.

точки F описать дугу радіусомъ m до пересѣ- G съ окружностью. Проведя прямую FG, получимъ (83) $\frac{FG}{FE} = \frac{FE}{FH}$. Сравненіемъ этой пропорціи съ пропорціею $\frac{m}{a} = \frac{a}{x}$ мы заключаемъ, что $x = FH$.

131. **Задача.** *Обратить данный многоугольникъ* ABCDEF *въ равномѣрный ему треугольникъ.*



Фиг. 208.

Проведемъ діагональ AE (фиг. 208) и къ ней параллельно прямую FG чрезъ вершину F до пересѣченія G съ продолженнымъ бокомъ BA. Соединивъ точки E и G, получимъ пятиугольникъ BCDEG, равномѣрный данному многоугольнику ABCDEF. Въ самомъ дѣлѣ,

площ. ABCDEF = площ. ABCDE + площ. AEF,

площ. BCDEG = площ. ABCDE + площ. AEG и

треугольники AEF и AEG равномѣрны, потому-что у нихъ общее основаніе AE и ихъ вершины находятся на прямой FG, параллельной къ AE (124).

Въ пятиугольникѣ BCDEG проведемъ діагональ EC и къ ней параллельно чрезъ вершину D прямую DH до пересѣченія H съ продолженнымъ бокомъ BC. Соединивъ точки E и H, получимъ четыреугольникъ BHEG, равномѣрный пятиугольнику BCDEG, потому-что

площ. BCDEG = площ. BCEG + площ. CED,

площ. BHEG = площ. BCEG + площ. CEH

и треугольники CED и CEH, имѣющіе общее основаніе CE и равныя высоты (по параллельности прямыхъ DH и CE), равномѣрны.

Такъ какъ площ. BCDEG = площ. ABCDEF и площ. BCDEG = площ. BHEG, то площ. BHEG = площ. ABCDEF.

Въ четыреугольникѣ BHEG проведемъ діагональ BE и къ ней параллельно чрезъ вершину H прямую HK до пересѣченія K съ продолженнымъ бокомъ GB. Соединивъ точки E и K, получимъ треугольникъ EGK, равномѣрный четыреугольнику BHEG, потому-что

площ. BHEG = площ. BEG + площ. BEH,

площ. EGK = площ. BEG + площ. BEK

и треугольники BEH и BEK, имѣющіе общее основаніе BE и равныя высоты (по параллельности прямыхъ KH и BC), равномѣрны.

Такъ какъ площ. BHEG = площ. ABCDEF и площ. BHEG = площ. EGK, то площ. EGK = площ. ABCDEF.

ЧИСЛЕННЫЕ ВОПРОСЫ.

239) Прямоугольный садъ, имѣющій 35 сажень длины, содержитъ $857\frac{1}{2}$ квадр. саж. Сколько сажень содержитъ его ширина?

240) Высота ромба, содержащаго 473,68 квад. футъ, равна 12,4 фута. Сколько футъ содержитъ бокъ этого ромба?

241) Периметръ прямоугольника содержитъ 24,54 фута и основаніе вдвое больше высоты. Сколько квадратныхъ футъ содержитъ площадь этого прямоугольника?

242) Вычислить площадь треугольника, коего основаніе равно 56,8 фут. и высота равна 80,7 фута.

243) Вычислить площадь прямоугольнаго треугольника, котораго катеты равны 248,2 саж. и 160,5 саж.

244) Площадь треугольника содержитъ 125,36 квад. саж. и его высота равна 18,4 саж. Сколько сажень содержитъ его основаніе?

245) Вычислить площадь ромба, діагонали котораго равны 8,52 фут. и 6,38 фут.

246) Периметръ трапеціи содержитъ 122 саж., ея бока равны 36 саж. и 32 саж., и высота равна 30,4 саж. Вычислить площадь этой трапеціи.

247) Площадь трапеціи содержитъ 151,9 квад. саж., бо̀льшее основаніе равно 18,6 саж. и высота равна 12,4 саж. Сколько сажень содержитъ меньшее основаніе?

248) Высота треугольника, содержащаго 44,02 квад. саж., больше основанія 8 саженями. Сколько сажень содержитъ основаніе?

249) Основаніе прямоугольника, содержащаго 46,44 квад. саж., 3,2 саженями больше высоты. Вычислить основаніе и высоту этого прямоугольника.

250) Периметръ прямоугольника, содержащаго 20,88 квад. саж., 13 саженями больше одной изъ сторонъ. Вычислить стороны этого прямоугольника.

251) Сумма двухъ квадратовъ содержитъ 900 квад. саж., а ихъ разность равна 252 квад. саж. Вычислить стороны этихъ квадратовъ.

252) Сколько сажень должна содержать сторона квадрата, чтобы его площадь равнялась площади прямоугольника, имѣющаго основаніе въ 624,1 саж. и высоту въ 250 саж.?

253) Вычислить бокъ квадрата, котораго площадь должна равняться суммѣ площадей трехъ квадратовъ, имѣющихъ стороны въ 8,4 фута, 17,3 фута и 25,86 фута.

254) Разность сторонъ двухъ квадратовъ равна 12 саж., а разность ихъ площадей равна 240 квад. саж. Вычислить бокъ и площадь каждаго квадрата.

255) Вычислить площадь равнобедреннаго треугольника, котораго бокъ равенъ 5,25 фута и основаніе равно 8,4 фута.

256) Периметръ равнобедреннаго треугольника содержитъ 24 фута, и бокъ равенъ 7,5 фута. Вычислить площадь этого треугольника.

257) Площадь равнобедреннаго треугольника содержитъ 20,28 квад. саж. и его бокъ равенъ 6,5 саж. Вычислить основаніе этого треугольника.

258) Вычислить площадь равнобедреннаго треугольника, котораго бокъ содержитъ 40,5 саж. и высота 16,2 саженями меньше основанія.

259) Вычислить площадь равнобедреннаго прямоугольнаго треугольника, котораго гипотенуза равна 8,4 фута.

260) Вычислить площадь равносторонняго треугольника, котораго бокъ содержитъ 13,6 саж.

261) Опредѣлить въ десятинахъ площадь треугольника, котораго стороны равны 585 саж., 488 саж. и 137 саж.

262) Опредѣлить въ квадратныхъ верстахъ площадь треугольника, котораго стороны равны 1068 саж., 193 саж. и 905 саж.

263) Вычислить площадь прямоугольника, котораго основаніе равно 306 саж. и діагональ равна $382\frac{1}{2}$ саж.

264) Вычислить площадь квадрата, если его бокъ вмѣстѣ съ діагональю составляетъ 100 футъ.

265) Вычислить площадь квадрата, если его периметръ 48 футами больше діагонали.

266) Вычислить стороны прямоугольника, котораго площадь содержитъ 2883 квад. саж. и діагональ равна $77\frac{1}{2}$ саж.

267) Вычислить площадь ромба, котораго сторона равна 3,44 фут. и прилежащій къ ней уголъ равенъ 60°.

268) Вычислить площадь ромба, котораго сторона равна 3,92 фут. и прилежащій къ ней уголъ равенъ 45°.

ТЕОРЕМЫ.

269) Площадь ромба равна полупроизведенію его діагоналей.

270) Площадь какого-нибудь четыреугольника равно произведенію его діагонали на полусумму перпендикуляровъ, опущенныхъ на эту діагональ изъ двухъ противолежащихъ ей вершинъ четыреугольника.

271) Если изъ вершинъ C и D четыреугольника ABCD опустить перпендикуляры CE и DF на длиннѣйшую сторону AB, то площадь этого четыреугольника равна полупроизведенію отрѣзка AE на перпендикуляръ DF, сложенному съ полупроизведеніемъ отрѣзка BF на перпендикуляръ CE.

272) Въ ромбѣ сумма квадратовъ его діагоналей равна квадрату его полупериметра.

273) Если въ параллелограмѣ ABCD чрезъ точку E его діагонали AC провести прямую FG параллельно къ AB и прямую KH параллельно къ AD, то образуются равномѣрные параллелограмы BHEG и DFEK.

274) Изо-всѣхъ треугольниковъ, построенныхъ на данной прямой AB и имѣющихъ равные углы, противолежащіе общему основанію AB, равнобедренный треугольникъ имѣетъ наибольшую площадь.

275) Если въ параллелограмѣ ABCD опущены перпендикуляры: DE на AB и BF на AD, то должно быть $\frac{AB}{AD}=\frac{BF}{DE}$.

276) Разность квадратовъ, построенныхъ на двухъ данныхъ прямыхъ, равна площади прямоугольника, коего основаніе равно суммѣ этихъ прямыхъ, а высота равна ихъ разности.

277) Площадь треугольника равна произведенію его сторонъ, раздѣленному на учетверенный радіусъ описаннаго круга.

ЗАДАЧИ ПОСТРОЕНІЯ.

278) Обратить данный параллелограмъ ABCD въ такой равномѣрный ему параллелограмъ, въ которомъ одинъ изъ угловъ равнялся бы данному углу *m*.

279) Обратить данный треугольникъ ABC въ такой равномѣрный ему треугольникъ, въ которомъ: *a*) одна изъ сторонъ равнялась бы данной прямой *m* и *b*) одинъ изъ угловъ равнялся бы данному углу *n*.

280) Обратить треугольникъ ABC въ такой параллелограмъ, въ которомъ одна изъ сторонъ равнялась бы данной прямой *m*.

281) Раздѣлить данный треугольникъ ABC на двѣ равныя части прямою, проходящею чрезъ точку O, данную на сторонѣ AC.

282) Обратить трапецію ABCD въ равномѣрный ей треугольникъ такимъ образомъ, чтобы въ немъ одинъ изъ угловъ равнялся углу BAD и его высота равнялась высотѣ трапеціи.

283) Обратить данный треугольникъ въ равномѣрный ему треугольникъ, котораго высота равнялась бы данной прямой *m*.

284) Обратить трапецію ABCD въ равномѣрный ей параллелограмъ такимъ образомъ, чтобы его высота, сторона и прилежащіе къ ней углы соотвѣтственно равнялись высотѣ, сторонѣ AD и угламъ BAD и ADC трапеціи.

285) Обратить данный пятиугольникъ въ равномѣрный ему прямоугольникъ.

286) Обратить данный треугольникъ ABC въ равномѣрный ему треугольникъ, котораго сторона пришлась бы на данной прямой MN а вершина совпала бы съ вершиною A.

287) Обратить данный пятиугольникъ въ равномѣрный ему треугольникъ, сторона котораго должна лежать на данной прямой MN.

288) Обратить данный треугольникъ ABC въ равномѣрный ему

треугольникъ, котораго бокъ долженъ равняться сторонѣ BC и уголъ, противолежащій этому боку, долженъ равняться данному углу *m*.

289) Обратить данный треугольникъ ABC въ равномѣрный ему треугольникъ, котораго бокъ долженъ равняться сторонѣ BC и уголъ, прилежащій къ этому боку, долженъ равняться данному углу *m*.

290) Обратить данный прямоугольникъ въ равномѣрный ему квадратъ.

291) Построить параллелограмъ, коего периметръ и площадь должны равняться периметру и площади даннаго треугольника ABC.

292) Обратить данный параллелограмъ ABCD въ равномѣрный ему параллелограмъ, котораго стороны должны равняться даннымъ прямымъ *m* и *n*.

293) Раздѣлить данный параллелограмъ ABCD на двѣ равныя части прямою, проходящею чрезъ данную точку M.

294) Обратить данный параллелограмъ въ равномѣрный ему параллелограмъ, котораго сторона должна равняться данной прямой *m* и уголъ долженъ равняться данному углу *n*.

295) Раздѣлить данный четыреугольникъ ABCD на двѣ равныя части прямою, проходящею чрезъ вершину A.

296) Внутри даннаго треугольника ABC найти такую точку, чтобы прямыя, соединяющія ее съ вершинами A, B и C, раздѣлили данный треугольникъ на три равныя части.

297) Раздѣлить данный треугольникъ ABC на три равныя части прямыми, выходящими изъ точки P, данной внутри треугольника.

298) Раздѣлить данный параллелограмъ ABCD на четыре равныя части прямыми, выходящими изъ вершины A.

299) Раздѣлить трапецію ABCD на четыре равныя части прямыми, проходящими чрезъ вершину A.

300) Раздѣлить четыреугольникъ ABCD на двѣ равныя части прямою, выходящею изъ точки F, данной на сторонѣ BC.

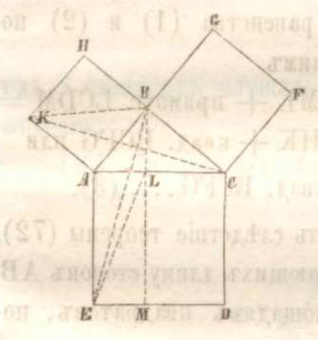
ВТОРАЯ ГЛАВА.

Пиѳагорова теорема. Площадь правильнаго многоугольника. Площади: круга, сектора, сегмента. Задачи построенія.

132. Теорема. *Квадратъ, построенный на гипотенузѣ прямоугольнаго треугольника, равенъ суммѣ квадратовъ, построенныхъ на катетахъ.*

На сторонахъ прямоугольнаго треугольника ABC (фиг. 209a) построены квадраты ACDE, BCFG, ABHK. Такъ какъ углы ABC, ABH, CBG прямые, то сторона BG находится на продолженіи катета AB и сторона BH на продолженіи катета CB. Изъ вершины B опустимъ перпендикуляръ BL на гипотенузу AC и продолжимъ его до пересѣченія M съ бокомъ ED. Потомъ проведемъ прямыя BE, CK и діагонали LE и BK. Треугольники BAE и LAE

Фиг. 209a.



равномѣрны, потому-что у нихъ общее основаніе AE и равныя высоты (по параллельности прямыхъ BM и AE); но треугольникъ LAE составляетъ половину прямоугольника ALME, слѣдовательно

треуг. BAE = ½ прямоуг. ALME.

Треугольники CAK и BAK равномѣрны, потому-что у нихъ общее основаніе AK и равныя высоты (по параллельности прямыхъ AK и BH); но треугольникъ BAK составляетъ половину квадрата ABHK, слѣдовательно

треуг. CAK = ½ квад. ABHK.

Треугольники BAE и CAK равны, потому-что BA = AK (стороны квадрата ABHK), AE = AC (стороны квадрата ACDE) и ∠ BAE = ∠ CAK (потому-что ∠ BAE = ∠ CAE + ∠ BAC =

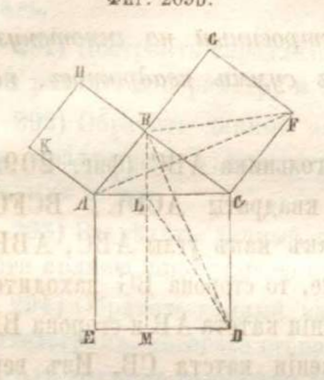
$90^0 + \angle BAC$ и $\angle CAK = \angle BAK + \angle BAC = 90^0 + \angle BAC$).

По равенству треугольниковъ BAE и CAK мы заключаемъ, что

прямоуг. ALME = квад. ABHK.... (1).

Проведя прямыя AF, BD и діагонали BF и LD (фиг. 209b), докажемъ по предъидущему, что

Фиг. 209b.



треуг. BCD = $^1/_2$прямоуг. LCDM,

треуг. ACF = $^1/_2$квад. BCFG и

треуг. BCD = треуг. ACF;

слѣдовательно

прямоуг. LCDM = квад. BCFG.... (2).

Сложивъ равенства (1) и (2) почленно, получимъ

прямоуг. ALME + прямоуг. LCDM = квад. ABHK + квад. BCFG или

квад. ACDE = квад. ABHK + квад. BCFG.... (3).

Примѣчаніе. Доказанная теорема есть слѣдствіе теоремы (72), потому-что вторыя степени чиселъ, выражающихъ длину сторонъ AB, BC и AC треугольника ABC, равны площадямъ квадратовъ, построенныхъ на этихъ сторонахъ.

Слѣдствіе. Выведенное равенство (3) можетъ быть представлено въ слѣдующемъ видѣ

$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$; откуда получится

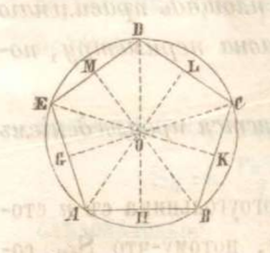
$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{BC}^2$,

т. е. *квадратъ, построенный на катетѣ прямоугольнаго треугольника, равенъ квадрату, построенному на гипотенузѣ, безъ квадрата, построеннаго на другомъ катетѣ.*

133. **Теорема**. *Площадь правильнаго многоугольника равна произведенію его периметра на половину апоѳемы.*

Соединивъ центръ O (фиг. 210) правильнаго многоугольника ABCDE съ вершинами A, B, C..., получимъ треугольники OAB,

Фиг. 210.



OBC, OCD...., которыхъ основанія суть стороны AB, BC, CD.... и высоты суть апоѳемы OH, OK, OL....

Площади этихъ треугольниковъ равны:

$$OAB = AB.\frac{OH}{2}$$

$$OBC = BC.\frac{OK}{2}$$

$$OCD = CD.\frac{OL}{2} \text{ и т. д.}$$

Взявъ сумму этихъ площадей, получимъ

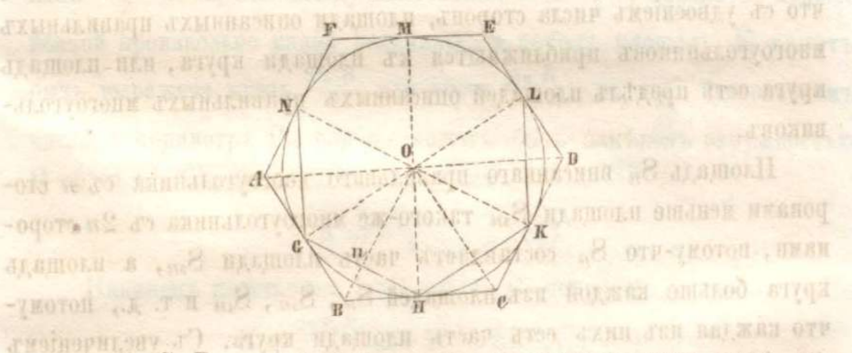
$$OAB + OBC + OCD + ... = (AB + BC + CD + ...) \times \frac{OH}{2}$$

$$\text{или } S = p.\frac{r}{2},$$

гдѣ S означаетъ площадь многоугольника, p его периметръ и r его апоѳему.

134. Слѣдствіе. Соединивъ центръ O (фиг. 211) съ верши-

Фиг. 211.



нами A, B, C, D..... многоугольника, описаннаго около круга, получимъ равные треугольники OAB, OBC, OCD..... Площадь

$$ABCDE..... = OAB + OBC + OCD + ...$$

$$= AB.\frac{OG}{2} + BC.\frac{OH}{2} + CD.\frac{OK}{2} + ...$$

$$= (AB + BC + CD + ...) \times \frac{OG}{2} \text{ или}$$

$$ABCDE.... = P.\frac{R}{2},$$

гдѣ P означаетъ периметръ многоугольника ABCDE.... и R радіусъ вписанной окружности. Отсюда слѣдуетъ, что *площадь правильнаго многоугольника, описаннаго около круга, равна периметру, помноженному на половину радіуса.*

135. **Теорема.** *Площадь круга измѣряется произведеніемъ его окружности на половину радіуса.*

Площадь S_n описаннаго правильнаго многоугольника съ n сторонами больше площади S_{2n} съ $2n$ сторонами, потому-что S_{2n} составляетъ часть площади S_n; но каждая изъ площадей S_n, S_{2n}, S_{4n} и т. д. больше площади K вписаннаго круга, потому-что эта площадь составляетъ часть площади всякаго описаннаго правильнаго многоугольника. Съ увеличеніемъ числа сторонъ описаннаго правильнаго многоугольника уменьшаются части его, лежащія внѣ круга; но такъ какъ возможно увеличить число сторонъ до безконечности, то части многоугольника, лежащія внѣ круга, могутъ быть сдѣланы меньше всякой произвольно малой величины. Отсюда мы заключаемъ, что съ удвоеніемъ числа сторонъ, площади описанныхъ правильныхъ многоугольниковъ приближаются къ площади круга, или площадь круга есть предѣлъ площадей описанныхъ правильныхъ многоугольниковъ.

Площадь S_n вписаннаго правильнаго многоугольника съ n сторонами меньше площади S_{2n} такого-же многоугольника съ $2n$ сторонами, потому-что S_n составляетъ часть площади S_{2n}, а площадь круга больше каждой изъ площадей S_n, S_{2n}, S_{4n} и т. д., потому-что каждая изъ нихъ есть часть площади круга. Съ увеличеніемъ числа сторонъ вписаннаго правильнаго многоугольника уменьшаются части его, лежащія между его сторонами и окружностью круга. Наконецъ если число сторонъ сдѣлается больше всякой произвольно большой величины, то части круга, лежащія внѣ многоугольника, сдѣлаются меньше всякой произвольно малой величины.

Означивъ площадь круга чрезъ K, его радіусъ чрезъ R, периметръ описаннаго правильнаго многоугольника съ n сторонами чрезъ

P_n, его площадь чрезъ S_n, периметръ вписаннаго правильнаго многоугольника чрезъ p_n, его сторону чрезъ a и его площадь чрезъ S_n, получимъ

$$S_n > K > s_n,$$

но по предъидущему извѣстно (134, 133, 102), что

$$S_n = \frac{P_n \cdot R}{2},\ s_n = p_n \cdot \frac{r}{2} \text{ и } r = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}},$$

слѣдовательно

$$\frac{P_n \cdot R}{2} > K > \frac{p_n \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}}{2}.$$

Если число n сдѣлается больше всякой произвольно большой величины, то сторона a сдѣлается меньше всякой произвольно малой величины, величина $\sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}$ обратится въ $\sqrt{R^2} = R$ и площадь S_n обратится въ $\frac{p_n \cdot R}{2}$. Въ такомъ случаѣ разность между величинами $\frac{P_n \cdot R}{2}$ и K, или между величинами K и $\frac{p_n \cdot R}{2}$, сдѣлается меньше всякой произвольно малой величины; а потому площадь K можетъ быть выражена чрезъ $\frac{P_n \cdot R}{2}$ или чрезъ $\frac{p_n \cdot R}{2}$; но при безконечномъ числѣ n периметръ P_n или p_n можетъ быть замѣненъ окружностью C круга (109); слѣдовательно получимъ

$$K = \frac{C.R}{2} \ldots\ldots (1).$$

Наконецъ подставивъ $2\pi R$ вмѣсто C, получимъ

$$K = \frac{2\pi R.R}{2} \text{ или } K = \pi R^2 \ldots (2).$$

Изъ этого выраженія выводится

$$R = \sqrt{\frac{K}{\pi}} \ldots\ldots (3).$$

Отсюда слѣдуетъ: *1) чтобы по извѣстному радіусу вычислить площадь круга, должно помножить число π на квадратъ радіуса*, и *2) чтобы по извѣстной площади круга вычислить его радіусъ, должно раздѣлить данную площадь на число π.*

Подставивъ $R = \frac{C}{2\pi}$ (см. 112, форм. 2) въ выраженіе (1), получимъ формулу

$$K = \frac{C}{2} \cdot \frac{C}{2\pi} \text{ или } K = \frac{C^2}{4} \cdot \frac{1}{\pi} \ldots\ldots (4),$$

посредствомъ которой возможно вычислить площадь круга по извѣстной его окружности [1].

Примѣры. *1) Найти площадь круга, коего радіусъ равенъ 2,5 дюйма.*

По формулѣ (2) мы имѣемъ

$$K = 3{,}14 \times (2{,}5)^2 = 19{,}625 \text{ квад. дюйма.}$$

2) Вычислить радіусъ круга, содержащаго 20 квадратныхъ футъ.

По формулѣ (3) мы имѣемъ

$$R = \sqrt{\frac{20}{3{,}14}} = \sqrt{20 . 0{,}31831} = 2{,}523 \text{ фута.}$$

3) Вычислить площадь круга, коего окружность содержитъ 10 дюймовъ.

По формулѣ (4) мы имѣемъ

$$K = \frac{10^2}{4} \cdot \frac{1}{3{,}14} = \frac{10^2}{4} \cdot 0{,}31831 = \frac{31{,}831}{4} = 7{,}96 \text{ квад. дюйм.}$$

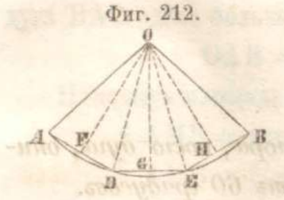
136. *Секторомъ* называется часть круга, заключенная между дугою и радіусами, проходящими чрезъ оконечности этой дуги.

Теорема. *Площадь сектора равна произведенію его дуги на половину радіуса.*

Въ данномъ секторѣ OADB (фиг. 212) вписана часть ADEB

---

[1]) Съ древнѣйшихъ временъ старались найти *квадратуру круга*, т. е. построить такой квадратъ, площадь котораго равнялась бы площади круга. Такъ какъ кругъ равномѣренъ прямоугольнику, коего основаніе равно окружности и высота равна радіусу круга, и всякій прямоугольникъ можетъ быть обращенъ въ равномѣрный ему квадратъ, то вся задача состоитъ въ отысканіи прямой линіи равной длины съ окружностью круга; но всѣ старанія, употребленныя для опредѣленія такой прямой, остались тщетными, а потому квадратура круга считается задачею неразрѣшимою.



Фиг. 212.

правильнаго многоугольника, площадь которой равна

$$AD.\frac{OF}{2} + DE.\frac{OG}{2} + EB.\frac{OH}{2} =$$

$$(AD + DE + EB).\frac{OF}{2} =$$

$$(AD + DE + EB) \times \frac{\sqrt{R^2 - {}^1/_4 AD^2}}{2},$$

гдѣ R означаетъ радіусъ AO (см. 102).

Удвоивъ число сторонъ вписаннаго многоугольника до безконечности, мы замѣчаемъ, что вписанная ломанная линія $AD + DE + EB$ все болѣе и болѣе приближается къ дугѣ ADEB и наконецъ разность между этими линіями сдѣлается меньше всякой произвольно малой величины; тогда сторона AD сдѣлается меньше всякой произвольно малой величины, величина $\sqrt{R^2 - {}^1/_4 AD^2}$ обратится въ $\sqrt{R^2} = R$ и площадь ADEBOA обратится въ площадь сектора; слѣдовательно эта площадь выразится чрезъ

$$S' = l.\frac{R}{2} \ldots\ldots (1),$$

гдѣ l означаетъ длину дуги ADEB.

137. Слѣдствіе. Сравненіемъ этой формулы съ формулою $K = 2\pi R.\frac{R}{2}$ составится пропорція

$$\frac{S'}{K} = \frac{l}{2\pi R} \ldots\ldots (2),$$

которая показываетъ, что *площадь сектора относится къ площади круга точно такъ, какъ дуга сектора относится къ цѣлой окружности*.

Если дуга сектора содержитъ n градусовъ, то выведенная пропорція можетъ быть представлена въ слѣдующемъ видѣ

$$\frac{S'}{K} = \frac{n}{360} \text{ или } \frac{S'}{\pi R^2} = \frac{n}{360};$$

откуда получатся слѣдующія формулы

$$S' = \pi R^2.\frac{n}{360} \ldots\ldots (3),$$

$$n = \frac{360}{\pi R^2}.S' \ldots. (4)$$

$$R = \sqrt{\frac{360}{\pi n}.S'} \ldots.. (5).$$

Примѣры. *1) Найти площадь сектора, коего дуга, описанная радіусомъ въ 10 дюймовъ, содержитъ 60 градусовъ.*

По формулѣ (3) мы имѣемъ

$$S' = \pi.100.\frac{60}{360} = \frac{314,2}{6} = 52,36 \text{ квад. дюйм.}$$

2) Зная, что площадь сектора равна площади квадрата, построеннаго на радіусѣ, найти число градусовъ, содержащихся въ дугѣ сектора.

По условію вопроса должно быть

$$\pi R^2.\frac{n}{360} = R^2, \text{ откуда}$$

$$n = \frac{360^0}{\pi} = 114^0 35' 29,6''.$$

3) Площадь сектора, котораго дуга содержитъ 45 градусовъ, равна 0,125 квадратнаго дюйма. Найти радіусъ дуги этого сектора.

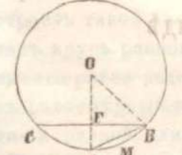
По формулѣ (5) мы имѣемъ

$$R = \sqrt{\frac{360.0,125}{3,142.45}} = \sqrt{\frac{1}{3,142}} = 0,564 \text{ дюйма.}$$

138. **Теорема.** *Площадь сегмента равна произведенію половины радіуса на разность между дугою сегмента и половиною хорды, соотвѣтствующей удвоенной дугѣ сегмента.*

Площадь сегмента AMB (фиг. 213) равна площади сектора OAMB безъ площади треугольника OAB. По предъидущему (136, 1) площадь сектора

Фиг. 213.



$$OAMB = \text{дуг. } AB.\, {}^1/_2 OA.$$

Чтобы найти площадь треугольника OAB, проведемъ хорду BC перпендикулярно къ радіусу OA. Такъ какъ эта хорда дѣлится радіусомъ OA въ точкѣ F на двѣ равныя части, то соотвѣтствующая

дуга BAC вдвое больше дуги AMB. Площадь треугольника

$$OAB = BF.{}^1/_2OA = {}^1/_2BC.{}^1/_2OA.$$

Наконецъ площадь сегмента

$$AMB = \text{дуг. } AB \times {}^1/_2OA - {}^1/_2BC \times {}^1/_2OA \text{ или}$$

$$AMB = {}^1/_2OA\ (\text{дуг. } AB - {}^1/_2BC).$$

Примѣчаніе. Возможно вычислить площадь сегмента только въ такомъ случаѣ, когда хорда BC есть бокъ такого правильнаго многоугольника, который по предъидущему (94, 95, 96, 97, 98, 99, 101) можетъ быть вписанъ въ кругѣ. Во всѣхъ другихъ случаяхъ должно прибѣгнуть къ вычисленіямъ, не относящимся къ начальной Геометріи.

Примѣръ. *Найти площадь сегмента, коего дуга, описанная радіусомъ въ 2 дюйма, содержитъ 60 градусовъ.*

Дуга AB, составляющая въ этомъ случаѣ шестую часть окружности, равна

$$\frac{2\pi.2}{6} = \frac{2\pi}{3}.$$

Хорда BC, составляющая бокъ вписаннаго правильнаго треугольника, равна $2\sqrt{3}$. Площадь сегмента равна

$$AMB = \frac{2\pi}{3} - \sqrt{3} = 0{,}362344 \text{ квад. дюйм.}$$

139. **Задача.** *Построить квадратъ, равный 1) суммѣ двухъ данныхъ квадратовъ, и 2) разности двухъ данныхъ квадратовъ.*

1) Построимъ прямоугольный треугольникъ, котораго катеты соотвѣтственно равны бокамъ данныхъ квадратовъ. Потомъ построимъ квадратъ на гипотенузѣ полученнаго прямоугольнаго треугольника.

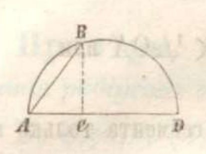
2) Построимъ прямоугольный треугольникъ, котораго гипотенуза равна боку большаго квадрата и катетъ равенъ боку меньшаго квадрата. Потомъ построимъ квадратъ на другомъ катетѣ этого прямоугольнаго треугольника.

140. **Задача.** *Построить квадратъ, равный какой-нибудь долѣ даннаго квадрата.*

Чтобы площадь искомаго квадрата x^2 составляла, напримѣръ

$^3/_8$ даннаго квадрата a^2, должно на прямой $AD = a$ (фиг. 214) описать полуокружность и отъ A до C отсчитать $^3/_8$ частей прямой AD. Наконецъ изъ точки C должно возставить перпендикуляръ CB къ AD и провести хорду AB; тогда $\overline{AB}^2 = {}^3/_8\overline{AD}^2$. Въ самомъ дѣлѣ, $\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AC}$ (см. 75), откуда

Фиг. 214.

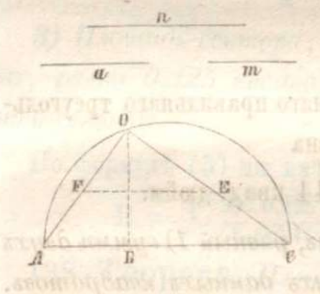


$$\overline{AB}^2 = AD.\ AC = AD.\ {}^3/_8 AD = {}^3/_8\ \overline{AD}^2.$$

141. Задача. *Построить квадратъ, котораго площадь x^2 должна относиться къ площади a^2 даннаго квадрата точно такъ, какъ прямыя m и n относятся между собою.*

На какой-нибудь прямой (фиг. 215) отложимъ $AB = m$ и $BC = n$. На прямой AC опишемъ полуокружность и изъ точки B къ AC возставимъ перпендикуляръ BD. Проведя хорды AD и CD, отложимъ $DE = a$ и чрезъ E проведемъ прямую EF параллельно къ AC. Наконецъ на прямой DF построимъ квадратъ, который удовлетворяетъ вопросу. Въ самомъ дѣлѣ, по предъидущему (75)

Фиг. 215.



$$\overline{DA}^2 = AC.AB \text{ и } \overline{DC}^2 = AC.BC;$$

$$\text{откуда } \frac{\overline{DA}^2}{\overline{DC}^2} = \frac{AB}{BC} = \frac{m}{n}.$$

По параллельности прямыхъ FE и AC получимъ

$$\frac{DF}{DE} = \frac{DA}{DC}; \text{ откуда}$$

$$\frac{\overline{DF}^2}{\overline{DE}^2} = \frac{\overline{DA}^2}{\overline{DC}^2} = \frac{m}{n} \text{ или } \frac{\overline{DF}^2}{a^2} = \frac{m}{n}.$$

ЧИСЛЕННЫЕ ВОПРОСЫ.

301) Найти площадь правильнаго треугольника, когда радіусъ описанной окружности равенъ 18 футамъ.

302) Найти площадь квадрата, вписаннаго въ кругѣ, коего радіусъ равенъ 0,7 фута.

303) Площадь правильнаго треугольника, вписаннаго въ кругѣ, равна 169 квадр. фут. Сколько футъ содержитъ радіусъ этого круга?

304) Площадь квадрата, вписаннаго въ кругѣ, равна 2304 квадр. фут. Сколько футъ содержитъ радіусъ этого круга?

305) Радіусъ круга, вписаннаго въ правильномъ треугольникѣ, равенъ 3 футамъ. Вычислить площадь этого треугольника.

306) Радіусъ круга, вписаннаго въ квадратѣ, равенъ 12 футамъ. Вычислить площадь этого квадрата.

307) Площадь квадрата, описаннаго около круга, равна 11664 квадр. фут. Сколько футъ содержитъ радіусъ этого круга?

308) Найти радіусъ круга, равномѣрнаго правильному треугольнику, коего бокъ равенъ 2,4 фут.

309) Квадратъ, содержащій 70,56 квадр. фут. равномѣренъ данному кругу. На сколько бокъ квадрата больше или меньше діаметра круга?

310) Найти площадь сектора, коего дуга, описанная радіусомъ въ 5,4 фута, содержитъ 16,8 фута.

311) Найти площадь круга, коего окружность содержитъ 128,0199 фута.

312) Найти площадь круга, коего окружность больше діаметра на 8 дюймовъ.

313) Найти площадь правильнаго восьмиугольника, вписаннаго въ кругѣ, коего радіусъ равенъ 3,8 фута.

314) Около правильнаго восьмиугольника, коего площадь равна 98,01 квадр. фута, описана окружность. Сколько футъ содержитъ радіусъ этой окружности?

315) Найти площадь правильнаго десятиугольника, описаннагоококо круга, коего радіусъ равенъ 6 футамъ.

316) Площадь правильнаго восьмиугольника, описаннаго около

круга, равна 2621,44 квадр. фут. Сколько футъ содержитъ радіусъ этого круга?

317) Найти площадь круга, коего окружность и діаметръ содержатъ вмѣстѣ 104,04 фута.

318) Найти площадь правильнаго шестиугольника, вписаннаго въ кругѣ, коего площадь содержитъ 706,5 квад. фута.

319) Найти площадь сектора, коего дуга, описанная радіусомъ въ 7,2 фута, содержитъ 68°36′.

320) Периметръ правильнаго восьмиугольника, вписаннаго въ кругѣ, содержитъ 80 футъ. Вычислить площадь сегмента, заключающагося между стороною этого восьмиугольника и соотвѣтствующею дугою.

321) Окружности двухъ концентрическихъ круговъ содержатъ 21,98 и 18,84 фута. Вычислить площадь круговаго кольца, содержащагося между этими окружностями.

322) Опредѣлить бокъ квадрата, вписаннаго въ кругѣ, коего площадь равна 7,065 квад. дюйма.

323) На сколько площадь правильнаго десятиугольника, описаннаго около круга, коего радіусъ равенъ 8 дюймамъ, больше площади такого-же многоугольника, вписаннаго въ томъ-же кругѣ?

324) Площадь правильнаго двѣнадцатиугольника, описаннаго около круга, равна 484 квад. фут. Сколько квадратныхъ футъ должна содержать площадь правильнаго пятиугольника, вписаннаго въ томъ-же кругѣ?

325) Найти площадь правильнаго двѣнадцатиугольника, вписаннаго въ кругѣ, когда извѣстно, что радіусъ круга больше стороны этого многоугольника на 2 фута.

326) Сторона правильнаго пятиугольника, описаннаго около круга, равна 20 фут. Найти площадь этого круга.

327) Найти площадь сектора, котораго дуга содержитъ 84°12′, и который составляетъ часть круга, содержащаго 432 квад. фута.

328) Дуга сектора, содержащая 72°, больше ея радіуса на 12 футъ. Вычислить площадь этого сектора.

329) Радіусъ сектора, содержащаго 64,4 квадр. фута, равенъ 18,4 фута. Сколько футъ содержитъ дуга этого сектора, и сколько градусовъ и минутъ имѣетъ соотвѣтствующій центральный уголъ?

330) Въ кругѣ, коего окружность равна $78^{1}/_{2}$ футъ, проведены двѣ параллельныя хорды такимъ образомъ, что центръ находится между ними; этимъ хордамъ соотвѣтствуютъ центральные углы въ 120^0 и 72^0. Сколько квадратныхъ футъ содержитъ часть круга, находящаяся между проведенными хордами.

ТЕОРЕМЫ.

331) Площадь круговаго кольца, содержащаяся между двумя концентрическими кругами, равна числу π, помноженному на произведеніе суммы и разности радіусовъ данныхъ круговъ.

332) Площадь правильнаго шестиугольника, вписаннаго въ круга, равна полупроизведенію утроеннаго квадрата радіуса на корень квадратный изъ числа 3.

333) Площадь правильнаго восьмиугольника, коего сторона равна m, измѣряется произведеніемъ $2\,m^2\,(1+\sqrt{2})$.

334) Площадь правильнаго десятиугольника, коего сторона равна m, измѣряется произведеніемъ $^5/_2\,m^2\sqrt{5+2\sqrt{5}}$.

335) Площадь квадрата, описаннаго около круга, вдвое больше площади квадрата, вписаннаго въ томъ-же кругѣ.

336) Площадь правильнаго восьмиугольника, вписаннаго въ кругѣ, равна площади такого прямоугольника, коего основаніе равно боку квадрата, описаннаго около того-же круга, а высота равна боку квадрата, вписаннаго въ томъ-же кругѣ.

337) Площадь правильнаго шестиугольника, вписаннаго въ кругѣ, есть средняя пропорціональная между площадями правильныхъ треугольниковъ: вписаннаго въ томъ-же кругѣ и около него описаннаго.

338) Если изъ точекъ B и C, равно-отстоящихъ отъ оконечныхъ точекъ A и D дуги ABMCD четверти окружности опустить перпендикуляры BG и CH на радіусъ OD, то образуется фигура BMCHG, равномѣрная сектору BMCO.

339) Если изъ какой-нибудь точки D радіуса BO круга возставить перпендикуляръ DA до пересѣченія съ окружностью, и отложить дугу AC, равную прямой AD, то секторъ OBC равномѣренъ сегменту ACB.

340) Площадь правильнаго двѣнадцатиугольника, вписаннаго въ кругѣ, равна утроенному квадрату радуіса этого круга.

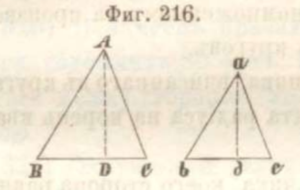
ТРЕТЬЯ ГЛАВА.

Пропорціональность площадей подобныхъ фигуръ.

142. Теорема. *Площади подобныхъ треугольниковъ относятся между собою, какъ квадраты сходственныхъ сторонъ.*

Площади подобныхъ треугольниковъ ABC и abc (фиг. 216)

Фиг. 216.



равны $Q=\frac{BC.AD}{2}$ и $q=\frac{bc.ad}{2}$; откуда $\frac{Q}{q}=\frac{BC.AD}{bc.ad}=\frac{BC}{bc}\times\frac{AD}{ad}$.... (1).

Изъ подобныхъ прямоугольныхъ треугольниковъ ABD и abd получится $\frac{AD}{ad}=\frac{AB}{ab}$ и изъ данныхъ треугольниковъ составится $\frac{BC}{bc}=\frac{AB}{ab}$, слѣдовательно $\frac{AD}{ad}=\frac{BC}{bc}$. Замѣнивъ въ пропорціи (1) дробь $\frac{AD}{ad}$ дробью $\frac{BC}{bc}$, получимъ

$$\frac{Q}{q}=\frac{BC}{bc}\times\frac{BC}{bc}=\frac{\overline{BC}^2}{\overline{bc}^2}.$$

143. Теорема. *Площади двухъ треугольниковъ, имѣющихъ по равному углу, относятся между собою, какъ произведенія сторонъ, составляющихъ эти углы.*

Даны треугольники ABC и ADE (фиг. 217), имѣющіе общій

Фиг. 217.

уголъ A. Требуется доказать, что $\frac{Q}{Q'}=\frac{AB.AC}{AD.AE}$, гдѣ Q и Q' суть площади треугольниковъ ABC и ADE.

Изъ вершинъ B и D опустивъ перпендикуляры BG и DH на сторону AC, получимъ $Q=\frac{AC.BG}{2}$ и $Q'=\frac{AE.DH}{2}$, откуда

$$\frac{Q}{Q'}=\frac{AC.BG}{AE.DH}=\frac{AC}{AE}\times\frac{BG}{DH},$$

но изъ подобныхъ прямоугольныхъ треугольниковъ ABG и ADH мы

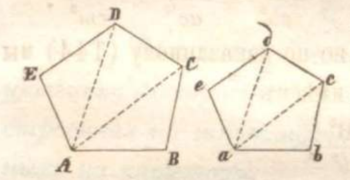
имѣемъ $\frac{BG}{DH}=\frac{AB}{AD}$; слѣдовательно замѣнивъ дробь $\frac{BG}{DH}$ дробью $\frac{AB}{AD}$, получимъ

$$\frac{Q}{Q'}=\frac{AC}{AE}\times\frac{AB}{AD}=\frac{AC.AB}{AE.AD}.$$

144. Теорема. *Площади подобныхъ многоугольниковъ относятся между собою, какъ квадраты сходственныхъ сторонъ.*

Раздѣлимъ данные многоугольники (фиг. 218) діагоналями AC, AD, ac, ad на треугольники и означимъ площади этихъ треугольниковъ чрезъ Q, Q′, Q″ ...., q, q', q'' ....; тогда по предъидущему (142)

Фиг. 218.



$$\frac{Q}{q}=\frac{\overline{AE}^2}{\overline{ae}^2},\ \frac{Q'}{q'}=\frac{\overline{DC}^2}{\overline{dc}^2},\ \frac{Q''}{q''}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{ab}^2};$$

но по подобію данныхъ многоугольниковъ получится

$$\frac{AE}{ae}=\frac{DC}{dc}=\frac{AB}{ab},\text{ откуда}$$

$$\frac{\overline{AE}^2}{\overline{ae}^2}=\frac{\overline{DC}^2}{\overline{dc}^2}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{ab}^2};\text{ слѣдовательно}$$

$$\frac{Q}{q}=\frac{\overline{AE}^2}{\overline{ae}^2},\ \frac{Q'}{q'}=\frac{\overline{AE}^2}{\overline{ae}^2},\ \frac{Q''}{q''}=\frac{\overline{AE}^2}{\overline{ae}^2}.$$

Изъ этихъ пропорцій получимъ

$$Q=\frac{\overline{AE}^2}{\overline{ae}^2}.q,$$

$$Q'=\frac{\overline{AE}^2}{\overline{ae}^2}.q',$$

$$Q''=\frac{\overline{AE}^2}{\overline{ae}^2}.q'';$$

откуда $Q+Q'+Q''+\ldots=(q+q'+q''+\ldots).\frac{\overline{AE}^2}{\overline{ae}^2}$; слѣдовательно

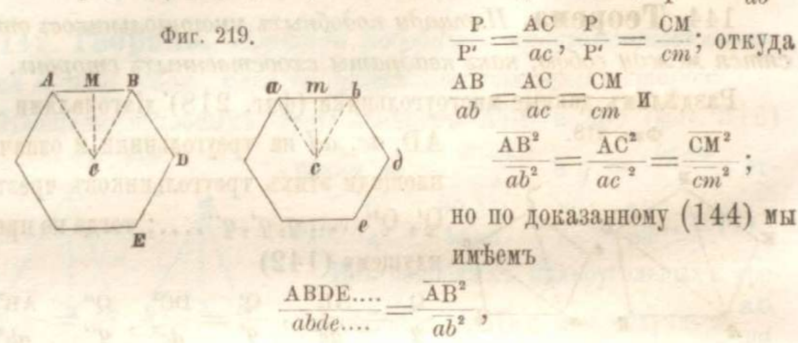
$$\frac{Q+Q'+Q''+\ldots}{q+q'+q''+\ldots}=\frac{\overline{AE}^2}{\overline{ae}^2}\text{ или}$$

$$\frac{ABCDE}{abcde}=\frac{\overline{AE}^2}{\overline{ae}^2}.$$

145. **Теорема**. *Площади двухъ подобныхъ правильныхъ многоугольниковъ пропорціоналны квадратамъ ихъ радіусовъ и апоѳемъ.*

По предъидущему (105) извѣстно, что (фиг. 219) $\frac{P}{P'}=\frac{AB}{ab}$,

Фиг. 219.



$\frac{P}{P'}=\frac{AC}{ac}$, $\frac{P}{P'}=\frac{CM}{cm}$; откуда $\frac{AB}{ab}=\frac{AC}{ac}=\frac{CM}{cm}$ и

$$\frac{\overline{AB}^2}{\overline{ab}^2}=\frac{\overline{AC}^2}{\overline{ac}^2}=\frac{\overline{CM}^2}{\overline{cm}^2};$$

но по доказанному (144) мы имѣемъ

$$\frac{ABDE....}{abde....}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{ab}^2},$$

слѣдовательно

$$\frac{ABDE....}{abde}=\frac{\overline{AC}^2}{\overline{ac}^2}=\frac{\overline{CM}^2}{\overline{cm}^2}.$$

146. **Теорема.** *Площади двухъ круговъ пропорціональны квадратамъ ихъ радіусовъ или квадратамъ ихъ діаметровъ.*

Зная, что площади двухъ круговъ, имѣющихъ радіусы R и R′, соотвѣтственно равны

$$Q=\pi R^2 \text{ и } Q'=\pi R'^2$$

получимъ $\frac{Q}{Q'}=\frac{\pi R^2}{\pi R'^2}$ или $\frac{Q}{Q'}=\frac{R^2}{R'^2}$.

Если $D=2R$ и $D'=2R'$, гдѣ D и D′ суть діаметры круговъ, то выведенная пропорція замѣнится пропорціею

$$\frac{Q}{Q'}=\frac{D^2}{D'^2}.$$

147. Секторы, ограниченные подобными дугами, называются *подобными.*

Теорема. *Площади двухъ подобныхъ секторовъ пропорціональны квадратамъ ихъ радіусовъ.*

Назовемъ площади двухъ подобныхъ секторовъ чрезъ Q и Q′, ихъ дуги чрезъ l и l', и ихъ радіусы чрезъ R и R′; тогда (136) получимъ

$$Q = l.\frac{R}{2} \text{ и } Q' = l'.\frac{R'}{2};$$

$$\text{откуда } \frac{Q}{Q'} = \frac{l.R}{l'R'} = \frac{l}{l'} \times \frac{R}{R'},$$

но по предъидущему (114) извѣстно, что

$$\frac{l}{l'} = \frac{R}{R'},$$

слѣдовательно

$$\frac{Q}{Q'} = \frac{R}{R'}.\frac{R}{R'} = \frac{R^2}{R'^2}.$$

148. **Теорема.** *Если на сторонахъ прямоугольнаго треугольника построены подобные многоугольники, то площадь, построенная на гипотенузѣ, равна суммѣ площадей, построенныхъ на катетахъ.*

По предъидущему (144) мы имѣемъ (фиг. 220) $\frac{Q'}{Q''} = \frac{\overline{BC}^2}{\overline{AC}^2}$

Фиг. 220.

$$\text{и } \frac{Q}{Q''} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}; \text{ откуда } Q' = \frac{\overline{BC}^2}{\overline{AC}^2}\,Q'' \text{ и}$$

$$Q = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}.Q''.$$

Сложивъ эти два равенства по-членно, получимъ

$$Q' + Q = \frac{\overline{BC}^2 + \overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}.Q'', \text{ но}$$

$$\overline{BC}^2 + \overline{AB}^2 = \overline{AC}^2, \text{ слѣдовательно}$$

$$\frac{\overline{BC}^2 + \overline{AB}^2}{\overline{AC}^2} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{AC}^2} = 1 \text{ и}$$

$$Q' + Q = Q''.$$

Описавъ окружности на сторонахъ прямоугольнаго треугольника ABC и назвавъ площади образовавшихся круговъ чрезъ S, S', S'', докажемъ точно такимъ-же образомъ, что

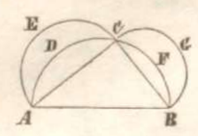
$$S'' = S' + S.$$

149. **Теорема.** *Если на катетахъ прямоугольнаго треугольника описать полуокружности внаружу, а на гипотенузѣ начертить полуокружность во-внутрь, то площадь этого тре-*

угольника равна суммѣ площадей, содержащихся между дугами, построенными на катетахъ.

Назвавъ (фиг. 221) площади полукруговъ ACE, BCG, ABFCD

Фиг. 221.



соотвѣтственно чрезъ S, S', S'', получимъ по предъидущему

$$S'' = S + S';$$ откуда

$$S'' - (ACD + BCF) =$$

$$(S + S') - (ACD + BCF)$$ или

площ. треуг. $ABC = S - ACD + S' - BCF$ или

площ. треуг. $ABC = ADCE + BFCG$.

Эта теорема, изобрѣтенная Ипократомъ изъ Хіоса (450 л. до Р. Х.), извѣстна подъ названіемъ „Ипократовыхъ луночекъ“ (lunulae Hippocratis).

ЧИСЛЕННЫЕ ВОПРОСЫ.

341) Вычислить площадь круга, которая должна быть втрое больше площади круга, имѣющаго радіусъ въ $3\frac{1}{2}$ дюйма.

342) Во сколько разъ площадь круга, имѣющаго радіусъ въ $6\frac{2}{3}$ дюйма, больше площади круга, коего радіусъ равенъ $1\frac{1}{3}$ дюйма?

343) Площадь треугольника ABC, сторона AB котораго содержитъ 112,4 сажени, равна 3259,6 квад. саж. Сколько квадратныхъ сажень содержитъ треугольникъ *abc,* подобный треугольнику ABC, если сторона *ab*, соотвѣтствующая боку AB, равна 28,1 сажени?

344) Стороны треугольника ABC, содержащаго 1296,54 квад. сажени, соотвѣтственно равны 44,1 саж., 58,8 саж., 73,5 саж. Вычислить стороны треугольника *abc*, подобнаго треугольнику ABC и содержащаго 105,84 квад. сажени.

345) Стороны треугольника ABC равны 389,2 саж., 486,5 саж. и 291,9 саж., а площадь треугольника *abc*, подобнаго треугольнику ABC, равна 2098,14 квад. саж. Вычислить стороны треугольника *abc*.

346) Площади двухъ подобныхъ треугольниковъ ABC и *abc* равны 182,7 квад. фут. и 24,36 квад. фут., и сторона *ab* меньше сходственной стороны AB на 8.5 фут. Вычислить стороны AB и *ab*.

347) Площади двухъ подобныхъ четыреугольниковъ ABCD и *abcd*

пропорціональны числамъ 9 и 4, и сторона AB $= 6^5/_{24}$ саж. Сколько сажень содержитъ сходственная сторона *ab*?

348) Площади треугольниковъ ABC и ADE (фиг. 217), имѣющихъ общій уголъ A, равны 21,66 квад. саж. и 43,74 квад. саж., стороны AB и AC содержитъ 5,7 саж. и 7,6 саж., и сторона AD больше стороны AE на 2,7 саж. Вычислить стороны AD и AE.

349) Периметры двухъ подобныхъ пятиугольниковъ соотвѣтственно равны 109,44 саж. и 76 саж., и площадь большаго пятиугольника равна 615,2 квад. саж. Вычислить площадь меньшаго пятиугольника.

350) Площадь многоугольника ABC... въ 8 разъ больше площади многоугольника *abc*..., и сторона AB больше сходственной стороны *ab* на 3 саж. Вычислить стороны AB и *ab*.

351) Вычислить часть круговаго кольца, дугамъ котораго, описаннымъ радіусами въ 6 и 8 дюймовъ, соотвѣтствуетъ центральный уголъ въ 42°.

352) Извѣстно, что съ увеличеніемъ радіуса на 0,01 фута площадь круга увеличится на 1 квадратн. футъ. Вычислить радіусъ этого круга.

353) Отъ треугольника ABC, стороны котораго суть: AB = 645 саж., BC = 1075 саж. и AC = 860 саж., требуется отдѣлить часть въ 73960 квад. саж. прямою DF, параллельною къ боку BC. Въ какомъ разстояніи отъ вершины A прямая DF должна пересѣкать стороны AB и AC?

354) Сколько дюймовъ долженъ содержать радіусъ круга, равнаго разности двухъ круговъ, если площадь перваго круга равна 19,625 квад. дюйма, а радіусъ втораго равенъ 0,7 дюйма?

355) Стороны AB и AC треугольника ABC равны 240 и 270 саж. Требуется раздѣлить этотъ треугольникъ на двѣ равныя части прямою DF, параллельною къ боку BC. Сколько должно содержать каждое изъ разстояній AD и AF?

356) Требуется раздѣлить на двѣ равныя части трапецію ABCD, коей основаніе AB = 160 саж., основаніе DC = 120 саж. и высота DF = 140 саж. прямою MN, параллельною къ основаніямъ. Въ какомъ разстояніи отъ вершины D прямая MN пересѣкаетъ высоту DF?

357) Внутри даннаго квадрата, коего бокъ равенъ 8 дюйм., описаны два круга, изъ которыхъ первый 6 квадратными дюймами больше втораго, а часть площади квадрата, лежащая внѣ круговъ, равна 20 квадратнымъ дюйм. Вычислить радіусы этихъ круговъ.

358) Основаніе AB трапеціи ABCD равно 168 саж., основаніе DC = 130 саж. и высота DF равна 120 саж. Прямою MN, параллельною къ основаніямъ, требуется раздѣлить эту трапецію на двѣ части, пропорціональныя числамъ 3 и 7. Въ какомъ разстояніи отъ вершины D прямая MN пересѣкаетъ высоту DF?

359) Площади двухъ подобныхъ многоугольниковъ *abc..* и ABC.. равны 46,37 квад. фут. и 185,48 квад. фут., и сторона *ab* меньше сходственной стороны AB на 15 футъ. Вычислить стороны *ab* и AB.

360) Стороны треугольника ABC суть: AB = 645 саж., BC = 1075 саж. и AC = 860 саж. Требуется раздѣлить этотъ треугольникъ прямыми DF и GH, параллельными къ BC, на три части такимъ образомъ, чтобы часть ADF составляла $^2/_5$ треугольника ABC и часть DFGH была 550 квад. саженями больше части GHCB. Опредѣлить разстоянія AD, AG, AF и AH.

ЗАДАЧИ ПОСТРОЕНІЯ.

361) Построить равносторонній треугольникъ, который долженъ быть въ 9 разъ больше даннаго равносторонняго треугольника.

362) Построить многоугольникъ, подобный данному многоугольнику и составляющій $^1/_3$ сего послѣдняго.

363) Описать кругъ, площадь котораго равнялась бы суммѣ площадей трехъ данныхъ круговъ.

364) Требуется раздѣлить данный треугольникъ ABC на двѣ равныя части прямою, параллельною къ боку BC.

365) Описать кругъ, равный разности двухъ данныхъ круговъ.

366) Данный треугольникъ ABC раздѣлить на три равныя части прямыми, параллельными къ данной прямой MN.

367) Требуется раздѣлить данный кругъ концентрическимъ кру гомъ на двѣ равныя части.

368) Построить треугольникъ, который долженъ быть подобенъ данному треугольнику и вдвое больше сего послѣдняго.

369) Построить многоугольникъ, который долженъ быть подобенъ данному многоугольнику и относиться къ сему послѣднему точно такъ, какъ относятся между собою данныя прямыя *n* и *m*.

370) Обратить квадратъ ABC въ равномѣрный ему равносторонній треугольникъ.

Теоремы и задачи построенія, относящіяся ко всѣмъ отдѣламъ Планиметріи.

371) Между сторонами угла BAC проведены прямыя DE, EF, FG, GH, HK, равныя каждая отрѣзку AD. Требуется доказать, $\angle$FDE = 2 $\angle$ A, $\angle$ FEG = 3 $\angle$ A, $\angle$GFH = 4 $\angle$ A и т. д.

372) Если сумма угловъ A и a, находящихся при вершинахъ двухъ равнобедренныхъ треугольниковъ ABC и abc, равна 180°, то сумма угловъ B и b, лежащихъ при основаніяхъ BC и bc, равна 90°.

373) Если средину E бока BC трапеціи ABCD соединить съ оконечностями A и D противоположной стороны, то образуется треугольникъ ADE, составляющій половину трапеціи ABCD.

374) Если на гипотенузѣ BC прямоугольнаго треугольника ABC отложить части BD = AB и CE = AC, и провести прямыя AD и AE, то образуется уголъ DAE, равный половинѣ прямаго угла.

375) Если изъ точекъ D и E хорды AB, равно-отстоящихъ отъ оконечныхъ точекъ A и B, возставить перпендикуляры до пересѣченія съ окружностью, то эти перпендикуляры равны между собою.

376) Если чрезъ точку пересѣченія двухъ окружностей провести прямую AC парраллельно къ центральной линіи OO′, то прямая AC вдвое больше прямой OO′.

377) Изъ вершины A треугольника ABC опущенъ перпендикуляръ AD на противолежащій бокъ BC, и прямою AE раздѣленъ уголъ BAC на двѣ равныя части. Требуется доказать, что образовавшійся уголъ DAE равенъ полуразности угловъ B и C.

378) Периметръ равнобедреннаго треугольника меньше периметра какого угодно рявномѣрнаго треугольника, имѣющаго общее основаніе съ равнобедреннымъ треугольникомъ.

379) Равнобедренный треугольникъ больше всѣхъ треугольниковъ, имѣющихъ съ нимъ общее основаніе и одинъ и тотъ-же периметръ.

380) Если точку O, взятую внутри параллелограма ABCD, соединить съ его вершинами, то сумма треугольниковъ ABO и DCO равномѣрна половинѣ параллелограма.

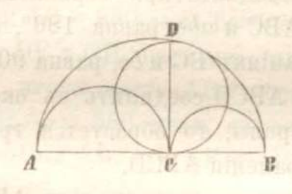
381) Если въ четыреугольникѣ ABCD діагонали AC и BD пересѣкаются подъ прямыми углами, то сумма квадратовъ противолежащихъ

сторонъ AB и CD равна суммѣ квадратовъ противолежащихъ сторонъ AD и BC.

382) Чрезъ вершину A треугольника ABC, вписаннаго въ кругѣ, проведена касательная AO до пересѣченія съ противолѣжащимъ бокомъ CB. Требуется доказать, что $\frac{AB^2}{AC^2}=\frac{OB}{OC}$.

383) Діаметръ AB полуокружности раздѣленъ на двѣ какія-нибудь части AC и CB, и на нихъ описаны полукружности (фиг. 222); потомъ изъ точки C къ прямой AB возставленъ перпендикуляръ CD и на немъ описана окружность. Требуется доказать, что площадь, заключенная между большою полуокружностью и двумя малыми полукружностями, равна площади круга CD.

Фиг. 222.



384) Стороны параллелограма, описаннаго около круга, должны быть равны.

385) Сторона квадрата, вписаннаго въ кругѣ, вмѣстѣ съ стороною правильнаго треугольника, вписаннаго въ томъ-же кругѣ, превышаетъ полуокружность числомъ, которое меньше 5 тысячныхъ частей радіуса.

386) Изо всѣхъ треугольниковъ, въ которыхъ по двѣ стороны соотвѣтственно равны, прямоугольный треугольникъ имѣетъ наибольшую площадь.

387) Въ прямоугольномъ треугольникѣ ABC произведеніе гипотенузы BC на перпендикуляръ AD, опущенный изъ вершины A на гипотенузу, равно произведенію катетовъ.

388) Между двумя параллельными касательными проведена къ тому-же кругу еще касательная AB, и точки A и B соединены съ центромъ O. Требуется доказать, что уголъ AOB прямой.

389) Въ прямоугольномъ треугольникѣ ABC вписанъ квадратъ DEGF такимъ образомъ, что его бокъ DE совмѣщается съ гипотенузою BC. Требуется доказать, что этотъ бокъ есть средняя пропорціональная между отрѣзками BD и CE гипотенузы.

390) На сторонѣ BC внѣ треугольника ABC построенъ квадратъ BCDE и проведены прямыя AE и AD, пересѣкающія сторону BC въ

точкахъ P и Q. Требуется доказать, что PQ есть сторона квадрата, вписаннаго въ треугольникѣ ABC.

391) Въ разностороннемъ треугольникѣ ABC прямая CD, раздѣляющая большій уголъ ACB на двѣ равныя части, меньше прямой BE, раздѣляющей меньшій уголъ ABC по-поламъ.

392) Если въ треугольникѣ прямыя, которыми раздѣляются два угла соотвѣтственно на двѣ равныя части, равны, то онъ долженъ быть равнобедренный.

393) Если изъ вершинъ треугольника ABC на противолежащія имъ стороны опущены перпендикуляры AD, BC, EF, пересѣкающіеся въ точкѣ O, то должно быть AO. OD = BO. OE = CO. OF.

394) Если чрезъ основанія D,E,F перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ вершинъ треугольника ABC на противоположныя стороны и пересѣкающихся въ точкѣ O, описать окружность, то она раздѣлитъ каждую изъ сторонъ треугольника и каждую изъ прямыхъ OA, OB, OC на двѣ равныя части.

395) Отношеніе двухъ неравныхъ дугъ, описанныхъ однимъ и тѣмъ-же радіусомъ, больше отношенія соотвѣтствующихъ имъ хордъ.

396) Та изъ двухъ дугъ AB и DE, стягиваемыхъ равными хордами AB и DE, наибольшая, которой радіусъ наименьшій.

397) Если въ треугольникѣ ABC чрезъ вершину A проведены прямыя AD и AE до пересѣченія съ основаніемъ BC такимъ образомъ что $\angle BAD = \angle EAC$, то должно быть $\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2} = \frac{DB \times BE}{EC \times CD}$.

398) Во всякомъ четыреугольникѣ сумма квадратовъ его сторонъ равна суммѣ квадратовъ діагоналей, увеличенной учетвереннымъ квадратомъ прямой, соединяющей среднія точки діагоналей. (Теорема Эйлера).

399) Во всякой трапеціи сумма квадратовъ всѣхъ сторонъ равна суммѣ квадратовъ діагоналей, уменьшенной удвоеннымъ произведеніемъ основаній трапеціи.

400) Если изъ какой-нибудь точки O хорды DE опущенъ перпендикуляръ OP на діаметръ AB, то должно быть AP. PB = DO. OE + $\overline{OP}^2$.

401) Въ четыреугольникѣ ABCD средина E стороны AB соединена съ оконечными точками C и D противоположной стороны, и средина F стороны CD соединена съ оконечными точками стороны AB.

Требуется доказать, что сумма площадей ABF и CDE равна площади ABCD.

402) По данной сторонѣ a правильнаго многоугольника съ $2n$ сторонами и извѣстному радіусу R описанной окружности, найти выраженіе для стороны a' вписаннаго правильнаго многоугольника съ n сторонами, относительно величинъ a и R.

403) Геометрическое мѣсто точекъ, для которыхъ сумма квадратовъ разстояній отъ двухъ постоянныхъ точекъ одна и та-же, есть окружность круга.

404) По данной сторонѣ a описаннаго правильнаго многоугольника съ n сторонами и извѣстному радіусу R найти выраженіе для стороны a' вписаннаго правильнаго многоугольника съ n сторонами.

405) Если въ кругѣ двѣ хорды пересѣкаются подъ прямыми углами, то сумма квадратовъ отрѣзковъ этихъ хордъ равна квадрату діаметра.

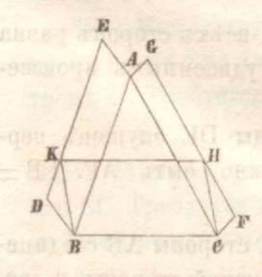
406) Высота AH какого-нибудь треугольника ABC, вписаннаго въ кругѣ, относится къ боку AB точно такъ, какъ сторона AC относится къ діаметру AD.

407) Прямая пересѣкаетъ двѣ пересѣкающіяся окружности въ точкахъ A, B, C, D и ихъ общую хорду въ точкѣ E. Требуется доказать, что $\frac{EA}{EB} = \frac{ED}{EC}$.

408) Если около правильнаго треугольника описать окружность и соединить хордою DE среднія точки дугъ, соотвѣтствующихъ бокамъ AB и AC, то эта хорда раздѣлится прямыми AB и AC на три равныя части.

409) На сторонахъ треугольника ABC построены параллелограмы ABDE, ACFG и BCHK (фиг. 223) такимъ образомъ, что вершины H и K параллелограма BCHK помѣщаются на сторонахъ DE и FG. Требуется доказать, что площадь BCHK равна суммѣ площадей ABDE и ACFA. (Теорема Паппуса).

Фиг. 223.



410) Если какую-нибудь точку F діаметра AB соединить съ оконечностями D и E хорды, параллельной къ этому діаметру, то сумма квадратовъ прямыхъ DF и EF равна суммѣ квадратовъ отрѣзковъ діаметра.

411) Между точкою С и данною прямою АВ провести прямую такимъ образомъ, чтобы она данною прямою DE раздѣлилась на двѣ равныя части.

412) Построить квадратъ, когда извѣстно, что разность между его діагональю и бокомъ равна данной прямой a.

413) Построить квадратъ, котораго бокъ и діагональ вмѣстѣ должны равняться данной прямой a.

414) На діагонали d даннаго прямоугольника построить равномѣрный ему прямоугольникъ.

415) Построить треугольникъ АВС, въ которомъ сумма сторонъ АВ и АС должна равняться данной прямой m, уголъ АВС долженъ равняться данному углу n и высота CD должна равняться данной прямой p.

416) Построить прямоугольникъ по данной діагонали a и суммѣ b двухъ смежныхъ сторонъ.

417) Построить прямоугольникъ ABCD по данной прямой b, равной его основанію АВ, и данной прямой d, равной разности между діагональю АС и высотою ВС.

418) По данному периметру p построить равнобедренный прямоугольный треугольникъ.

419) Описать дугу, касающуюся къ двумъ даннымъ окружностямъ С и С'.

420) Построить треугольникъ, равномѣрный данной трапеціи ABCD.

421) Радіусомъ, равнымъ прямой m, описать окружность такимъ образомъ, чтобы она касалась къ данной прямой АВ, а на данной прямой CD отрѣзала хорду, равную данной прямой n.

422) На основаніи, равномъ прямой LM, построить треугольникъ, равномѣрный данному треугольнику АВС.

423) Раздѣлить данный треугольникъ АВС на двѣ равныя части прямыми, выходящими изъ точки F, данной внутри треугольника.

424) Дана окружность О, касающаяся къ двумъ пересѣкающимся прямымъ АВ и АС. Требуется описать окружность, касающуюся къ данной окружности и къ даннымъ прямымъ.

425) Чрезъ точки А и В, данныя на окружности, провести двѣ параллельныя хорды, которыхъ сумма должна равнятсья данной прямой m.

426) Требуется найти такую точку X, чтобы прямыя, соединяющія ее съ данными точками A,B,C, составляли равные углы.

427) Чрезъ точку C требуется провести такую прямую, чтобы сумма перпендикуляровъ, опущенныхъ на нее изъ точекъ A и B, равнялась данной прямой m.

428) По тремъ даннымъ точкамъ A, B и C опредѣлить четвертую точку X такимъ образомъ, чтобы при ней образовались углы AXC и BXC, соотвѣтственно равные даннымъ угламъ m и n.

429) Въ данномъ кругѣ вписать прямоугольникъ, равномѣрный данному прямоугольнику ABCD.

430) Отъ точки A провести прямую, которая должна пересѣкать двѣ данныя окружности C и C′ такимъ образомъ, чтобы отрѣзки AY и AX были пропорціональны даннымъ прямымъ m и n.

431) Построить треугольникъ по двумъ извѣстнымъ угламъ B и C, и данной суммѣ сторонъ, противулежащихъ этимъ угламъ.

432) Радіусомъ, равнымъ прямой a, описать окружность такимъ образомъ, чтобы она отрѣзала на прямой AB хорду, равную данной прямой m, а на прямой CD хорду, равную данной прямой n.

433) Въ данномъ квадратѣ ABCD вписать квадратъ, коего вершины должны находиться на сторонахъ AB, BC, CD, AC.

434) Прямою AD, проведенною чрезъ вершину A, треугольникъ ABC раздѣленъ на двѣ равныя части. Требуется провести чрезъ вершину B прямую, которая должна пересѣкать прямую AD въ точкѣ X и сторону AC въ точкѣ Y такимъ образомъ, чтобы треугольникъ ABX сдѣлался равномѣрнымъ четыреугольнику DXYC.

435) Построить треугольникъ по данной сторонѣ a, противолежащей углу m, и суммѣ p сторонъ, составляющихъ этотъ уголъ.

436) Раздѣлить трапецію ABCD на двѣ равныя части прямою, проходящею чрезъ вершину A.

437) Построить равнобедренный треугольникъ такимъ образомъ, чтобы его вершина находилась въ данной точкѣ G, оконечности его основанія пришлись на данныхъ параллельныхъ прямыхъ AB и CD, и основаніе составляло съ прямыми AB и CD углы, равные данному углу m.

438) По данной сторонѣ a правильнаго многоугольника, имѣющаго n сторонъ и периметръ p, построить сторону x правильнаго многоугольника, имѣющаго $2n$ сторонъ и периметръ p.

439) По данному периметру p и извѣстному углу m построить прямоугольный треугольникъ.

440) Описать окружность, касающуюся къ данной окружности C, а къ данной окружности C′ въ точкѣ A.

441) Внутри прямоугольника ABCD дана точка E. На сторонахъ AD, DC и CB этого прямоугольника найти точки F, G, H такимъ образомъ, чтобы $\angle EFA = \angle GFD$, $\angle DGF = \angle CGH$ и $\angle CHG = \angle BHE$.

442) Изъ трехъ данныхъ точекъ A, B, C описать три касающіяся между собою окружности.

443) Построить треугольникъ по извѣстной сторонѣ a и даннымъ прямымъ m и n, соединяющимъ оконечности этой стороны съ средними точками двухъ остальныхъ сторонъ.

444) Раздѣлить параллелограмъ ABCD на четыре равныя части прямыми, проходящими чрезъ вершину A.

445) Отъ точекъ A и B, находящихся внѣ данной прямой MN, провести двѣ прямыя такимъ образомъ, чтобы они, пересѣкаясь на MN въ точкѣ X, образовали углы AXM и BXN, которыхъ разность дожна равняться данному углу m.

446) Описать окружность, касающуюся къ данной прямой AB и къ двумъ равнымъ кругамъ изъ-внѣ.

447) Описать окружность, касающуюся къ данной прямой AB и къ двумъ равнымъ кругамъ изъ-внутри.

448) Чрезъ точку H, данную внутри угла ABC, провести окружность, касающуюся къ прямымъ BA и BC.

449) Построить треугольникъ ABC, котораго высоты AF, BG, CD соотвѣтственно должны равняться прямымъ m, n, p.

450) Описать окружность, проходящую чрезъ точки A и B, и касающуюся къ данной окружности изъ-внѣ.

451) Описать окружность, проходящую чрезъ данныя точки A и B, и касающуюся къ данной окружности изъ-внутри.

452) Описать окружность такимъ образомъ, чтобы она касалась къ данной окружности и прошла чрезъ точки A и B, находящіяся внутри этой окружности.

453) Построить равносторонній треугольникъ ABC такимъ образомъ, чтобы его вершины пришлись соотвѣтственно на данныхъ параллельныхъ прямыхъ ED, NK, LM.

454) Въ данномъ кругѣ вписать треугольникъ XYZ такимъ образомъ, чтобы стороны XY и XZ соотвѣтственно прошли чрезъ данныя точки A и B, а сторона YZ была параллельна къ данной прямой MN.

455) На окружности круга даны точки A и B, и проведена сѣкущая CD, на которой дана точка E. Требуется найти на этой окружности такую точку X, чтобы прямыя AX и BY отрѣзали на сѣкущей CD двѣ части EM и EN, пропорціональныя числамъ *m* и *n*.

456) Данный уголъ ABC раздѣленъ прямою BD на двѣ равныя части, и на его сторонѣ BC даны точки E и F. Требуется найти на сторонѣ AB такую точку X, чтобы части XM и XN прямыхъ XE и XF, лежащія между прямыми BA и BD, были равны.

457) Внѣ круга O даны точка A и прямая BC. Требуется описать окружность, проходящую чрезъ A и касающуюся къ данной окружности и къ прямой BC.

458) Требуется описать окружность, касающуюся къ сторонамъ угла BAC и къ окружности O, лежащей внутри этого угла.

459) Описать окружность, касающуюся къ данной прямой AB и къ двумъ окружностямъ C и C′, имѣющимъ радіусы R и R′.

460) Описать окружность, касающуюся къ тремъ окружностямъ C, C′, C″, имѣющимъ радіусы R, R′, R″. Сколько рѣшеній допускаетъ эта задача?

Результаты численныхъ вопросовъ, доказательства теоремъ и рѣшенія задачъ построенія.

1) AB = 24*m* и CD = 7*m*.
2) Нѣтъ; онъ долженъ быть меньше $\frac{4{,}325}{16}$ дюйма.
3) До $\frac{1}{16000}$ саж.
4) 255 саж.
5) 6,88 дюйма.
6) $2^5/_8$ дюйма.
7) $\frac{AD}{DB} = {}^{15}/_{37}$.
8) Почти на 5,21 дюйма.
9) Почти 5,4 дюйма.
10) $\frac{AC}{CB} = {}^{39}/_{29}$ и $\frac{AD}{DB} = {}^{29}/_{39}$.
11) AB = 81 саж., BC = 36 саж.
12) $^3/_4$ дюйма.
13) 4,5 дюйма.
14) $\frac{AB}{EF} = {}^{24}/_{23}$ и $\frac{CD}{GH} = {}^{21}/_{20}$.
15) 3,2 дюйма.
16) $^{229}/_{360}$ окружности.
17) 13°30'.
18) 42°.
19) 100°.
20) 39°22'.
21) 56°.
22) 19°54'.
23) 22°50'.
24) Въ сегментѣ ACB углы равны 73°20' и въ сегментѣ AEB углы равны 106°40'.
25) $45°32^1/_2'$.
26) $31°46^2/_3'$.
27) 62°30'; 100°.
28) 148°46'; 31°14'.
29) 72°.
30) $176°52^2/_9'$.
31) Проведя хорду BE ∥ къ CD, получимъ ∠ ABE, который измѣряется четвертью окружности; но ∠ ABE = ∠ AFD и ∠ AFD измѣряется полусуммою дугъ AD и BC; слѣдовательно сумма дугъ AD и BC равна полуокружности.
32) ∠ AFG = $^1/_2$(AD — BD), ∠ EGC = $^1/_2$(EC — AD; но AE = EC и BD = AD, слѣдовательно ∠ AFG = ∠ EGC = ∠ AGF.
33) ∠ AME = $^1/_2$(DB + AE), ∠ FEM = $^1/_2$(DA + AE); но

DB = DA, слѣдовательно ∠ FME = ∠ FEM и FE = FM.

34) ∠ ABC = 1/2AEC и ∠ ACB = 1/2AB, откуда ∠ ABC — ∠ ACB = 1/2(AEC — AB). Сдѣлавъ CF = AB, проведемъ хорды DF, AE, EF; тогда треугольники ADE и DEF равны, потому-что сторона ED общая, ∠ DAE = ∠ DFE и ∠ DEA = ∠ DEF, ибо ∠ DEA = 1/2(AB + BD) ∠ DEF = 1/2(FC + CD) и AB + BD = FC + CD; слѣдов. хор. AE = хор. EF и дуг. AE = дуг. EF; откуда дуг. AEC — дуг. AB = дуг. AF, 1/2(дуг. AEC — дуг. AB) = 1/2дуг. AF = дуг. AE, ∠ ADE = 1/2дуг. AE или ∠ ADE = ∠ ABC — ∠ ACB.

35) Такъ какъ ∠ BC'P = 90° и ∠ BAP = 90°, то окружность, описанная на BP, пройдетъ чрезъ точки A' и C' (112 части I). Точно также окружность, описанная на CP, пройдетъ чрезъ A' и B', и наконецъ окружность, описанная на AP, пройдетъ чрезъ B' и C'. Изъ треугольника CBC' получимъ

∠ CBC' + ∠ BCC' = 90° или ∠ C'BP + ∠ PBC + ∠ BCC' = 90°.

Изъ треугольника CBB' получимъ

∠ BCB' + ∠ CBB' = 90° или ∠ BCP + ∠ PCB' + CBB' = 90°.

Откуда

∠ C'BP + ∠ PBC + ∠ BCC' = ∠ BCP + ∠ PCB' + CBB' или ∠ C'BP = ∠ PCB'; но ∠ C'BP = ∠ C'A'P = 1/2дуг. C'P и ∠ PCB' = ∠ PA'B' = 1/2дуг. PB';

слѣдов. ∠ C'A'P = ∠ PA'B'.

Подобнымъ образомъ доказывается, что ∠ A'B'P = ∠ PB'C' и ∠ A'C'P = ∠ PC'B'.

36) Прямая DE не параллельна къ BC.

37) AE = 14m, EC = 11m.

38) 24 11/24 саж.

39) 54 9/14 саж.

40) 42 саж.

41) 94 саж.

42) Раздѣляетъ.

43) 35 21/65 саж.

44) 22 10/11 саж.

45) 28 7/16 саж.

46) 31,2 саж.

47) 30,31 саж.

48) 0,7 дюйма.

49) Проведя дiагональ BD, получимъ треугольники ABD и CBD, изъ которыхъ составятся пропорцiи $\frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AH}$ и $\frac{CB}{CF} = \frac{CD}{CG}$. Откуда слѣдуетъ, что HE || къ BD, FG || къ BD и HE || къ FG. Точно такимъ-же образомъ узнаемъ, что EF || къ HG. Откуда заключаемъ (63 части I), что

EH = FG и EF = HG; слѣдовательно четыреугольникъ EFGH параллелограмъ.

50) Проведя діагональ BD, получимъ треугольники ABD и BCD, къ которымъ примѣнимъ теор. (36, II).

51) Вслѣдствіе теор. (43, II) мы имѣемъ $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$ и $\frac{AB}{BC} = \frac{AE'}{CE'}$; но по заданію $\frac{BD}{DC} = \frac{AE'}{CE'}$, слѣдовательно $\frac{AB}{AC} = \frac{AE'}{CE'}$ и $\frac{AB}{AC} = \frac{AB}{BC}$; откуда AC = BC.

52) Такъ какъ AD = $^1/_2$AB и AE = $^1/_2$AC, то составится пропорція $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$, изъ которой слѣдуетъ (37, II), что DE || къ BC.

53) Пропорціи 1 и 2 (43 и 44, II) представятся въ слѣдующихъ видахъ:

$\frac{BD}{a - BD} = \frac{c}{b}$, $\frac{a - DC}{DC} = \frac{b}{c}$,

$\frac{D'B}{D'B + a} = \frac{c}{b}$, $\frac{D'C - a}{D'C} = \frac{c}{b}$.

Изъ этихъ пропорцій легко опредѣлить BD, DC, D'B и D'C.

54) Изъ центровъ C и C' опустивъ перпендикуляры CD и C'D' на AF, получимъ $\frac{AC}{AC'} = \frac{AD}{AD'}$; но такъ какъ AD = $^1/_2$AF и AD' = $^1/_2$AE, то $\frac{AF}{AE} = \frac{AD}{AD'}$; слѣдовательно $\frac{AF}{AE} = \frac{AC}{AC'}$.

55) Проведя A'D || къ BC, получимъ $\frac{A'F}{FB'} = \frac{DC}{CB'}$ или $\frac{A'F}{FB'} = \frac{DC}{BA'}$. Также $\frac{AC}{AB} = \frac{DC}{BA'}$; слѣдовательно $\frac{A'F}{FB'} = \frac{AC}{AB}$.

56) 10,6 саж.

57) 4,9 саж.

58) 3,5 дюйма.

59) $ac = m' . \frac{p}{m}$, $bc = m' . \frac{n}{m}$.

60) 10,5 дюйма.

61) 15 $^1/_3$ дюйм.

62) AC = 5,8 фут., BC = 6,6 фут. и $ac = 1\,^{14}/_{15}$ фута.

63) $ab = 0{,}76$ дюйма, $ac = 0{,}54$ дюйма, $bc = 0{,}56$ дюйма.

64) $mn = {}^1/_{2520}$MN.

65) 37 $^1/_2$ фут.

66) 12 фут.

67) 25 саж.

68) 1 $^1/_4$ саж.

69) 8 $^{29}/_{62}$ фут.

70) AB = 176 саж., AC = 68 саж., BC = 84 саж.

71) $ab = 1{,}44$ дюйм., $bc = 2{,}016$ дюйм., $ac = 1{,}344$ дюйма.

72) 2.4 дюйм., 4 дюйм., 2,2 дюйм., 3 дюйм., 4,4 дюйм.

73) AB = 36,75 фута, $ab = 5{,}25$ фута.

74) $ab = 0{,}74$ дюйма, $ac = 0{,}784$ дюйма, $bc = 0{,}712$ дюйма.

75) 6 саж.; 32 саж.

76) $ab = 3\,^5/_8$ саж., $ac = 4\,^3/_4$ саж., $bc = 5\,^1/_2$ саж.

77) AB = 40 $^4/_9$ саж., BC = 70 $^7/_9$ саж., $bc = 22\,^3/_4$ саж.

78) Треугольники AOB и COD подобны, потому-что ∠ AOB =

$\angle$ COD, $\angle$ ABO $=$ $\angle$ CDO, $\angle$ BAO $=$ $\angle$ DCO; слѣдовательно $\frac{AB}{DC}=\frac{AO}{OC}=\frac{BO}{OD}$.

79) Изъ точекъ M и P опустимъ перпендикуляры ME и PC на сторону AC и перпендикуляры MF и PD на сторону AD; тогда получимъ $\frac{EM}{CP}=\frac{AM}{AP}$ и $\frac{FM}{DP}=\frac{AM}{AP}$; откуда $\frac{EM}{CP}=\frac{FM}{DP}$ или $\frac{EM}{FM}=\frac{CP}{DP}$.

80) Вслѣдствіе теоремы (64, II) мы имѣемъ
$\frac{\frac{1}{2}AB}{\frac{1}{2}DC}=\frac{AO}{OC}$ или $\frac{AE}{FC}=\frac{AO}{OC}$.
Изъ послѣдней пропорціи слѣдуетъ, что прямыя EF и AC пересѣкаются въ точкѣ O.

81) Изъ треугольниковъ ACD и BDC мы имѣемъ
$\frac{AE}{AC}=\frac{EF}{CD}$ и $\frac{BH}{BD}=\frac{GH}{CD}$; но AE $=$ BH, AC $=$ BD и CD $=$ CD, слѣдовательно EF $=$ GH.

82) Проведемъ прямую OO′ и назовемъ чрезъ C точку ея пересѣченія съ продолженною Aa и чрезъ C′ точку ея пересѣченія съ продолженною Bb; тогда изъ треугольниковъ AOC и BOC′ получимъ
$\frac{OC}{O'C}=\frac{OA}{O'a}$ и $\frac{OC'}{O'C'}=\frac{OB}{O'b}$. Такъ какъ OA $=$ OB и O′a $=$ O′b, то OC $=$ OC′ и O′C $=$ O′C′; слѣдовательно точки C и C′ совпадаютъ.

83) Треугольники ADE и DCF подобны, потому-что $\angle$AED $=$ $\angle$ CFD и $\angle$ EAD $=$ $\angle$ ABC $=$ $\angle$ DCF; слѣдовательно $\frac{AD}{DC}=\frac{DE}{DF}$ или $\frac{BC}{AB}=\frac{DE}{DF}$.

84) Треугольники BOD и COD равны, треугольники BOD и AOE подобны, треугольники COD и AOF подобны, треугольники ADB, AOF подобны, треугольники ADC и AOE подобны. Треугольники BOF и COE равны, треугольники ABE и ACF равны, треугольники BOF и ABE подобны, треугольники COE и ACF подобны. Треугольники AOB и AOC равны.

85) Изъ центровъ C и C′ опустимъ перпендикуляры CG и C′H на прямую EF; получимъ подобные треугольники ACG и AC′H, изъ которыхъ выводится $\frac{AH}{AG}=\frac{AC'}{AC}$; откуда $\frac{2AH}{2AG}=\frac{AC'}{AC}$ или $\frac{AE}{AF}=\frac{AC'}{AC}$.

86) Треугольники ABC и ADE подобны, потому-что $\angle$ A общій и $\angle$ ACB $=$ $\angle$ ADE; слѣдовательно $\frac{AB}{AE}=\frac{AC}{AD}$ или $\frac{AB}{AC}=\frac{AE}{AD}$.

87) Проведя FG ∥ къ BC до пересѣченія съ AD, получимъ $\frac{AB}{AF}=\frac{BD}{FG}$ или $\frac{AB}{AF}=\frac{CD}{FG}$. Изъ подобныхъ треугольниковъ COD и FOG получится $\frac{DO}{GO}=\frac{CD}{FG}$. Изъ выведенныхъ пропорцій мы имѣ-

емъ $\frac{AB}{AF}=\frac{DO}{GO}={}^2/_1$, откуда DO $= {}^2/_3$DG; но DG $= {}^1/_2$AD; слѣдовательно DO $= {}^1/_3$AD и AO $= {}^2/_3$AD.

88) Изъ треугольника ABC получимъ $\frac{AB}{AF}=\frac{BC}{FG}$ и изъ треугольника ABD имѣемъ $\frac{AB}{AF}=\frac{BD}{HD}$; откуда $\frac{BC}{FG}=\frac{BD}{HD}$; но $\frac{BE}{FH}=\frac{BD}{HD}$, слѣдовательно FG = FH.

89) Изъ вершины A какого-нибудь равносторонняго треугольника ABC опустимъ ⊥ AD на BC, и на немъ отложимъ AE = m; чрезъ E проведемъ FG ∥ къ BC между сторонами AB и AC.

94) Проведя PD ∥ къ CB, раздѣлимъ BD на m равныхъ частей и отъ D до E отложимъ n такихъ-же частей. Наконецъ чрезъ E и P проведемъ EF.

95) Чрезъ A проведемъ какую-нибудь прямую AL и на ней отъ A до D отложимъ m равныхъ частей, и n такихъ-же частей отъ D до E. Чрезъ E проведемъ EC ∥ къ DB до пересѣченія съ продолженною AB.

96) Раздѣлимъ сторону BC на части BL и LC, пропорціональныя числамъ m и n, и чрезъ A и L проведемъ прямую. Опустивъ на нее перпендикуляры BD и CE, получимъ подобные треугольники BDL и CEL, изъ которыхъ выводится $\frac{BL}{CL}=\frac{BD}{CE}$; но $\frac{BL}{CL}=\frac{m}{n}$; слѣдов. $\frac{BD}{CE}=\frac{m}{n}$.

97) На перпендикулярѣ DE, возставленномъ къ AB изъ какой-нибудь точки D, отложимъ m равныхъ частей, и проведемъ EH ∥ къ BA. На прямой FG, проведенной перпендикулярно къ BC, отложимъ n частей прямой DE и проведемъ GK ∥ къ CB. Точку K пересѣченія прямыхъ EH и GK соединивъ съ вершиною B, получимъ геометрическое мѣсто BK точекъ, удовлетворяющихъ вопросу.

98) Построимъ прямоугольный треугольникъ bcd, котораго катетъ bc содержитъ m равныхъ частей и катетъ cd равенъ n такимъже частямъ. Потомъ на гипотенузѣ a построимъ треугольникъ BCD, подобный треугольнику bcd.

99) Построимъ прямоугольный треугольникъ bcd, котораго катетъ bc содержитъ m равныхъ частей и катетъ cd содержитъ n такихъ-же частей. Потомъ опустимъ перпендикуляръ ce на гипотенузу bd, и на прямой a построимъ треугольники CED и CEB, подобные треугольникамъ ced и ceb.

100) На какой-нибудь прямой отложимъ m равныхъ частей отъ b до c, и n такихъ-же частей

отъ c до d. Къ bd изъ точки c возставимъ $\perp ce$, и изъ средины прямой bd радіусомъ, равнымъ $\frac{1}{2}bd$, опишемъ полуокружность; точку e ея пересѣченія съ $\perp ce$ соединимъ съ b и d. Потомъ на прямой a построимъ треугольники BCE и DCE, подобные треугольникамъ bce и dce.

101) Сдѣлаемъ $AD = h$ и на этой прямой опишемъ полуокружность. Потомъ отложимъ хорду $DE = \frac{1}{2}h'$, и проведемъ AE до пересѣченія B съ $\perp$, возставленнымъ изъ D къ AD. На продолженіи этого $\perp$ отложимъ $DC = BD$ и соединимъ C и A. Для доказательства опустимъ $\perp$ CF на AB; тогда $\frac{BD}{BC} = \frac{DE}{CF}$, но $BD = \frac{1}{2}BC$, слѣдовательно $DE = \frac{1}{2}h' = CF$.

102) Построимъ треугольникъ abc, въ которомъ $ac = m$ равнымъ частямъ, $bc = n$ такимъ-же частямъ и $\angle bca = \angle p$. Изъ a опустимъ $\perp ad$ на bc, отложимъ $dA = da + aA = h$ и проведемъ CA $\parallel$ къ ca и BA $\parallel$ къ ba.

103) На $AB = a$ построимъ прямоугольный треугольникъ ABC съ катетами BC и $AC = h$. На BC отложимъ $BD = m$ и изъ D радіусомъ $DF = n$ опишемъ дугу; получится точка F на AB. Наконецъ проведемъ AG $\parallel$ къ FD.

104) Сдѣлаемъ $HF = m$ и построимъ $\angle HBG = \angle p$. Изъ H радіусомъ $HG = n$ опишемъ дугу; получится точка G на BG. Проведемъ HG, отложимъ $BA = a$ на HB и проведемъ AC $\parallel$ къ HG.

105) Построимъ треугольникъ ABC, въ которомъ $AB = 2c$, $AC = a$ и $BC = b$. На продолженной AC отложимъ $CD = AC$ и проведемъ BD; получимъ требуемый треугольникъ BCD. Въ самомъ дѣлѣ, проведя CE $\parallel$ къ AB, получимъ $\frac{AB}{CE} = \frac{AD}{AC} = \frac{2}{1}$, откуда $CE = \frac{1}{2}AB = c$. Потомъ $\frac{BE}{ED} = \frac{AC}{CD}$, откуда $BE = ED$.

106) Построимъ центральный $\angle DOE = 2\angle BAC$ и центральный $\angle DOF = 2\angle ABC$ и т. д.

107) На AB опишемъ дугу въ 120^0 и на AC дугу въ 120^0; пересѣченіемъ этихъ дугъ опредѣлится точка P.

108) На HK отложимъ m равныхъ частей отъ A до C, и n такихъ-же частей отъ B до D на LM. Чрезъ P проведемъ EF $\parallel$ къ CD.

109) Между сторонами $\angle$ BAC проведемъ ED чрезъ P перпендикулярно къ AB. Соединимъ

A и P, и продолжимъ AP. Изъ E опишемъ дугу радіусомъ, равнымъ ED, до пересѣченія F съ AP. Чрезъ P проведемъ PX || къ FE и изъ X опустимъ $\perp$ XQ на AB; тогда XQ = XP. Въ самомъ дѣлѣ, треугольники EFP и XPG подобны, потому-что $\angle$PGX = $\angle$FPE и $\angle$GPX = $\angle$PFE. Треугольники GQP и PDF подобны, потому-что $\angle$QGP = $\angle$DPF и $\angle$GPQ = $\angle$PFD; слѣдовательно также треугольники XPQ и DEF подобны и $\frac{DE}{EF} = \frac{QX}{XP}$. Такъ какъ DE = EF, то QX = XP.

110) 10,8 дюйма.
111) Катеты равны 21,6 и 69,62 саж.; перпендикуляръ = 20,63 саж.
112) Катеты = 42,31 и 12,96 саж.; гипотенуза = 44,26 саж.
113) 185,2 саж.
114) Почти 85 саж.
115) 3,91 фута.
116) На 4,58 дюйма.
117) 91,2 саж.
118) Катетъ = 7,447 дюйм.; перпендикуляръ = 3,723 дюйм.
119) 4,356 дюйма.
120) 28 дюйма.
121) 24 фута.
122) $11^5/_6$ фута.
123) 3,9 фута.
124) 7,857 фута.
125) 59,86 фута.
126) 24 дюйма.
127) Почти 11,6 саж.
128) 7,225 фута.
129) 18,325 фута.
130) 24,5 фута.
131) 1,581 фута.
132) $25^{11}/_{18}$ фута.
133) 10,998 фута.
134) Почти 10,4 дюйма.
135) AB = 5,7, AD = 8,9 фут.
136) Почти 23 саж.
137) AC = $53^1/_7$, AE = $70^6/_7$ фут.
138) 20,8 дюйм., 11,7 дюйм.
139) Катеты = 1,767 дюйм. и 2,325 дюйм.; гипотенуза = 2,912 дюйм.
140) 21,9 фут., 29,2 фут.
141) AB = 7,1231 фут., AD = 9,1231 фут.
142) Треугольники ABF и ACD подобны, потому-что $\angle$AFB = $\angle$ADC = 90° и $\angle$BAC общій; слѣдовательно $\angle$ABF = $\angle$ACD и $\frac{AB}{AC} = \frac{BF}{CD}$.
143) Треугольники ABE и ABC подобны, потому-что $\angle$A общій и $\angle$ABE = $\angle$ACB; слѣдовательно $\angle$AEB = $\angle$ABC и $\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{AE}$.
144) Треугольники ABF и ACD подобны, потому-что $\angle$A общій, $\angle$AFB = $\angle$ADC = 90°; слѣдовательно $\angle$ABF = $\angle$ACD и $\frac{AB}{AC} = \frac{AF}{AD}$.

145) Изъ пропорцій $\frac{AB}{AC}=\frac{AC}{AD}$ и $\frac{AB}{AC}=\frac{AB}{AC}$ получится $\frac{AB}{AC}\times\frac{AB}{AC}=\frac{AC}{AD}\times\frac{AB}{AC}$ или $\frac{AB^2}{AC^2}=\frac{AB}{AD}$.

146) Изъ прямоугольнаго треугольника ABC имѣемъ $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2-\overline{AC}^2=(BC+AC)(BC-AC)$; откуда $\frac{BC+AC}{AB}=\frac{AB}{BC-AC}$.

147) Изъ треугольника ABC, въ которомъ $AB<AC$, прямая AD перпендикулярна къ BC и AM проведена чрезъ средину M стороны BC, получимъ
$\overline{AC}^2=\overline{AM}^2+\overline{MC}^2+2MC.DM$
и $\overline{AB}^2=$
$\overline{AM}^2+\overline{BM}^2-2BM.DM$,
откуда
$\overline{AC}^2-\overline{AB}^2=2BC.DM$.

148) $\overline{AC}^2=AB.AE$ и
$\overline{AD}^2=AB.AF$, откуда
$\frac{\overline{AC}^2}{\overline{AD}^2}=\frac{AE}{AF}$.

149) Чрезъ точки A и B касанія проведемъ діаметры AC и BD, и соединимъ точки A и D, также точки B и C; получимъ подобные треугольники ABC и ABD, потому-что $\angle BAC=\angle ABD=90^0$ и $\angle ACB+\angle CAD=90^0$ и $\angle BAD+\angle CAD=90^0$, слѣдов. $\angle ACB=\angle BAD$ и $\frac{AC}{AB}=\frac{AB}{BD}$.

150) На прямой DE опишемъ полуокружность, проходящую чрезъ C. Проведя хорды DC и EC, получимъ $\frac{DF}{CF}=\frac{CF}{FE}$.

151) Проведемъ хорды EG, BE, BG. Въ треуг. ABE уголъ BAE $+\angle ABE=90^0$; но $\angle ABE=\angle AGE$, слѣдов. $\angle BAE+\angle AGE=90^0$. Въ треуг. ACD уг. CAD $+\angle ADC=90^0$. Откуда $\angle BAE+\angle AGE=\angle CAD+\angle ADC$ или $\angle AGE=\angle ADC$. Въ треуг. ABG уг. BAG $+\angle ABG=90^0$; но $\angle ABG=\angle AEG$, слѣдовательно $\angle BAG+\angle AEG=90^0$. Также $\angle CAF+\angle AFC=90^0$. Откуда $\angle BAG+\angle AEG=\angle CAF+\angle AFC$ или $\angle ACG=\angle AFC$.

Отсюда мы заключаемъ, что треугольники AEG и ADF подобны и слѣдовательно $\frac{AD}{AG}=\frac{AF}{AE}$.

152) Отъ точки A проведемъ касательную AB къ окружности и на продолженной AB отложимъ BE = AB. На AB опишемъ полуокружность и изъ B возставимъ $\perp$ BF до пересѣченія F съ полуокружностью. Проведя хорду AF, опишемъ изъ A дугу радіусомъ AF; получимъ точку

D на данной окружности. Наконецъ соединимъ A и D. Какъ доказать равенство отрѣзковъ AC и CD?

153) Отложимъ хорду $DE = m$ и на нее изъ центра C опустимъ $\perp$ CF. Потомъ изъ C радіусомъ CF опишемъ окружность, и къ ней отъ точки A проведемъ касательную, которая пересѣчетъ данную окружность въ точкахъ G и H; часть $GH = DE = m$.

154) Раздѣлимъ діаметръ DB на 3 равныя части, и на его продолженіи отложимъ $BA = {}^1/_3 BD$. Наконецъ изъ A проведемъ касательныя AE и AF; получимъ $\frac{AD}{AE} = \frac{AE}{{}^1/_4 AD}$ или $\overline{AE}^2 = {}^1/_4 \overline{AD}^2$ или $AE = {}^1/_2 AD$.

155) Предположимъ, что задача рѣшена и найдены касательныя XE и XF; тогда $\frac{DX}{XE} = \frac{XE}{XB}$ и $\overline{XE}^2 = DX.XB$; но $XE = XA$, $BX = AB - XA$, $DX = BX + BD = AB - AX + BD = AD - AX$; слѣдовательно $\overline{XA}^2 = (AD - AX)(AB - AX) = AD.AB - AX.AB - AD.AX + \overline{AX}^2$; откуда $(AB + AD).AX = AD.AB$ и $\frac{AB + AD}{AD} = \frac{AB}{AX}$, гдѣ AX есть четвертая пропорціональная между $AB + AD$, AB и AD.

156) Положимъ, что задача рѣшена и найденъ отрѣзокъ $BC = m$. Проведемъ діаметръ AD, пересѣкающій малую окружность въ точкѣ E, и хорды AB и EC; получимъ подобные треугольники ABD и ECD, потому-что $\angle D$ общій, $\angle ABD = \angle ECD = 90^0$; слѣдовательно $\frac{AD}{ED} = \frac{BD}{CD}$; но такъ какъ $CD = BD - BC = BD - m$, то $\frac{AD}{ED} = \frac{BD}{BD - m}$; откуда $AD.BD - AD.m = ED.BD$ или $AD.BD - ED.BD = AD.m$ или $(AD - ED).BD = AD.m$ или $AE.BD = AD.m$ или $\frac{AE}{AD} = \frac{m}{BD}$, т. е. хорда BD есть четвертая пропорціональная тремъ извѣстнымъ прямымъ.

157) На $AB = m$ построимъ $\angle ABD = 120^0$. Изъ B къ BD возставимъ перпендикуляръ и къ прямой m изъ ея средины возставимъ перпендикуляръ. Точкою C пересѣченія этихъ перпендикуляровъ опредѣлится искомый центръ.

158) Раздѣлимъ хорду AB на отрѣзки AF и FB такимъ образомъ, чтобы $\frac{AF}{FB} = \frac{m}{n}$. Потомъ раздѣлимъ дугу AB въ точкѣ E на двѣ равныя части, и чрезъ E и F проведемъ хорду EM. Проведя хорды AM и BM, получимъ $\angle AMF = \angle BMF$ и $\frac{AB}{BM} = \frac{AF}{FB} = \frac{m}{n}$.

159) Сдѣлаемъ AB = m и изъ A и B возставимъ перпендикуляры AC = a и BD = d. Изъ средины прямой CD опишемъ полуокружность, которая пересѣчетъ AB въ M и N; получимъ x = AM и y = BM. Въ самомъ дѣлѣ, изъ подобныхъ треугольниковъ ACM и BDM получится $\frac{a}{y} = \frac{x}{d}$ или $\frac{a}{x} = \frac{y}{d}$.

160) Соединимъ точки D и C, и продолжимъ DC до пересѣченія F съ AB. Потомъ построимъ среднюю геометрическую x между прямыми FD и FC, и отложимъ x на AB отъ F до E; получится точка E касанія искомой окружности и т. д.

161) Изъ оконечности D произвольно проведеннаго радіуса CD возставимъ ⊥ DE = m, и изъ C радіусомъ CE опишемъ дугу, которая пересѣчетъ AB въ точкахъ F и F′, которыя удовлетворяютъ задачѣ. Сколько получится рѣшеній въ этомъ случаѣ? Въ какомъ случаѣ вопросъ даетъ только одно рѣшеніе и когда онъ не возможенъ?

162) Изъ оконечности D произвольно проведеннаго радіуса C′D возставимъ ⊥ DE = C′D, и потомъ изъ C′ радіусомъ C′E опишемъ дугу, которая пересѣчетъ окружность C въ точкахъ A и B, которыя удовлетворяютъ вопросу. Въ какомъ случаѣ вопросу удовлетворяетъ только одно рѣшеніе и когда онъ не возможенъ?

163) Изъ пропорціи $\frac{m-x}{x-n} = \frac{m}{x}$ составится сложная пропорція $\frac{m-x+x-n}{m+n} = \frac{x-n}{n}$ или $\frac{m-n}{m+n} = \frac{x-n}{n}$; откуда $mn - n^2 = mx + nx - mn - n^2$ или $2mn = (m+n)x$; слѣдоват. $\frac{m}{{}^1/_2(m+n)} = \frac{x}{n}$, гдѣ x есть четвертая пропорціональная прямыхъ m, ${}^1/_2(m+n)$, n.

164) 13,8564 фута.

165) 6 футъ.

166) 12 футъ.

167) 5 футъ.

168) 15 футъ.

169) 5,6568 фута.

170) 2,884 фута.

171) 3,708 фута.

172) 14,1066 фута.

173) 5,18 фута.

174) 4,0451 фута.

175) 150 футъ.

176) 2,8877 фута.

177) 6,9282 фута.

178) 4,6764 фута.

179) 0,994 фута.

180) 6,06221 фута.

181) 0,5198 фута.

182) 30,8 фута.

183) 1,086 фута.

184) 7,653 фута.

185) 2,4115 фута.

186) 11,0024 фута.
187) 8,5599 фута.
188) 6,0339 фута.
189) 8 футъ.
190) 25 футъ.
191) 0,3059 фута.
192) 23,9568 фута.
193) 38,6336 фута.
194) Стороны AB, BC, CD, AD даннаго четыреугольника касаются къ окружности въ точкахъ E, F, G, H. По предъидущему (I, 152) имѣемъ AE = AH, BE = BF, CG = CF, DG = DH; откуда AE + BE + CG + DG = AH + BF + CE + DH или AB + CD = AD + BC.
195) $\angle$CAG = $\angle$ADB и $\angle$CAG = $\angle$ABC. Треугольники ABC и ABD подобны, потому-что $\angle$A общій и $\angle$ABC = $\angle$ADB; слѣдовательно $\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{AD}$ и $\overline{AB}^2 = AC \times AD$.
196) Квадратъ стороны b вписаннаго правильнаго треугольника $= 3R^2$, гдѣ R есть радіусъ; но такъ какъ R = боку a вписаннаго правильнаго шестиугольника, то $b^2 = 3a^2$.
197) Вслѣдствіе (II, 87) мы имѣемъ AM.BC = AB.MC + BM.AC; но такъ какъ BC = AB = AC, то AM = BM + MC.
198) $\frac{b}{a} = \frac{R}{1/2R}$ (гдѣ R радіусъ круга; слѣдовательно $b = 2a$.
199) Подставимъ R вмѣсто a въ формулу $\frac{2R.a}{\sqrt{4R^2-a^2}} = \frac{2R^2}{\sqrt{3R^2}} = \frac{2R}{3}\sqrt{3}$; но сторона вписаннаго правильнаго треугольника равна $R\sqrt{3}$; слѣдовательно отношеніе между этими сторонами равно $^2/_3 R\sqrt{3} : R\sqrt{3} = {}^2/_3$.
200) Проведя хорды AE и AD, получимъ $\angle$AEF = $\angle$EAF и AF = EF. По параллельности DE и BC мы имѣемъ $\frac{AF}{FG} = \frac{AC}{BC}$ и по равенству прямыхъ AC и BC будетъ AF = FG; слѣдовательно EF = FG. Также $\angle$ADG = $\angle$DAG и AG = GD, но $\frac{AG}{FG} = \frac{AB}{BC}$ и AB = BC, слѣдовательно AG = FG, EF = FG = GD.
201) AB бокъ вписаннаго правильнаго пятиугольника ABCDE, AC его діагональ, пересѣкающая радіусъ BO въ точкѣ K, AF и BF бока вписаннаго правильнаго десятиугольника, радіусъ OF пересѣкаетъ бокъ AB въ G. Треугольники AFG и AOK подобны, потому-что $\angle$AGF = $\angle$AKO = 90° и $\angle$AFG = $\angle$AOK = 72°; слѣдовательно $\frac{AG}{AK} = \frac{AF}{AO}$ или $\frac{2AG}{2AK} = \frac{AF}{AO}$ или $\frac{AB}{AC} = \frac{AF}{AO}$ или $\frac{AB}{AF} = \frac{AC}{AO}$.
202) Отложимъ BG = BF, про-

ведемъ CF, CB, CG, FG, и соединимъ точку H пересѣченія прямыхъ AB и FG съ центромъ C. Изъ подобныхъ треугольниковъ BFH и ABF получимъ $\overline{BF}^2 = HB \times BA$; потомъ изъ подобныхъ треугольниковъ ACH и ACB получимъ $\overline{AC}^2 = AH \times AB$. Наконецъ изъ выведенныхъ равенствъ составится $\overline{BF}^2 + \overline{AC}^2 = AB.(BH + AH) = \overline{AB}^2$.

203) Проведя хорду CE ‖ къ BD, получимъ равныя дуги ED и BC, и $\angle$ EAD = $\angle$ BAC. Изъ подобныхъ треугольниковъ AOD и ABC мы имѣемъ $\frac{BA}{AC} = \frac{OA}{AD}$, а изъ подобныхъ треугольниковъ DOE и ADC получится $\frac{DC}{CA} = \frac{OE}{ED}$. Отсюда BA.AD = AC.OA, DC.ED=OE.AC,(OA+OE).AC = BA.AD + BC.CD или AE.AC = BA.AD + BC.CD. Проведя хорду BG ‖ къ AC, получимъ равныя дуги AG, BC, DE и BD.DG = AB.BC + AD.DC; но AE = DG, слѣдовательно $\frac{AC}{BD} = \frac{AB.AD + BC.DC}{AB.BC + AD.DC}$.

204) Отложимъ хорду AB = m и на ней опишемъ полуокружность. Въ этой полуокружности отложимъ хорду AD = n, проведемъ прямую BD и продолжимъ ее до пересѣченія C съ данною окружностью и т. д.

205) Построимъ вписанный $\angle$ DEF = $\angle p$ и проведемъ радіусы: OG ⊥ къ EF и OH ⊥ DE. Потомъ чрезъ H и G проведемъ касательныя, пересѣкающіяся въ B; отложимъ на нихъ BA = m и BC = n и т. д.

206) Изъ средины D прямой AB возставимъ ⊥ DX, на немъ отложимъ DE = AD, и EC = AE. Изъ точки C опишемъ окружность, въ которой отложимъ AB хордою. Какъ доказать, что $\angle$ ACB = 45°?

207) Чрезъ какую-нибудь точку C окружности проведемъ касательную DE, и на ней построимъ $\angle$ DCA = $\angle m$ и $\angle$ ECB = $\angle n$ и т. д.

208) Чрезъ какую-нибудь точку D окружности проведемъ касательную и на ней построимъ $\angle$ DMN = $\angle m$. Потомъ проведемъ касательную AK ‖ къ MN. При точкѣ K построимъ $\angle$ AKL = $\angle n$ и проведемъ касательную BC ‖ къ KL.

209) Изъ средины D прямой AB возставимъ ⊥ DX и построимъ $\angle$ DAE = 60°. Потомъ на DX отложимъ EC = AE и изъ C опишемъ окружность радіусомъ CA и т. д. Какъ доказать, что $\angle$ ACB = 30°?

210) Отложимъ хорду AB = m и соединимъ B съ центромъ O. На радіусѣ BO опишемъ окруж-

ность и изъ A радіусомъ n опишемъ дугу такъ, чтобы она пересѣкла малую окружность въ точкахъ D и D'. Чрезъ B и D проведемъ хорду BC, и чрезъ B и D' хорду BC'. Треугольники ABC и ABC' удовлетворяютъ вопросу. Въ самомъ дѣлѣ, проведя хорды BOF, CF, DO, C'F, D'O, получимъ подобные треугольники BDO и BCF, BD'O и B'CF, потому-что $\angle$ BDO= $\angle$ BCF и $\angle$ DBO = $\angle$ CBF, $\angle$ BD'O = BC'F и $\angle$ D'BO= $\angle$ C'BF; слѣдовательно $\frac{BD}{BC} = \frac{BO}{BF}$ и $\frac{BD'}{BC'} = \frac{BO}{BF}$; но такъ какъ BO = $^1/_2$BF, то и BD = $^1/_2$BC и BD' = $^1/_2$BC'. Въ какомъ случаѣ вопросъ допускаетъ только одно рѣшеніе, и когда онъ невозможенъ?

211) Отложимъ хорду AB = m и изъ центра O опустимъ на нее $\perp$ OE. При O построимъ $\angle$ EOF = $\angle$ p и проведемъ хорду CD = n перпендикулярно къ OF и т. д.

212) Отложимъ хорду AB = m и хорду AC = n. Изъ центра O опустимъ $\perp$ OE на AC и при O построимъ $\angle$ EOF = $\angle$ p. Чрезъ B проведемъ хорду BD перпендикулярно къ OF.

213) Проведя діагонали AC и BD (они пересѣкаются въ O), построимъ $\angle$ AOE = $\angle$ AOF= $\angle$ BOG = $\angle$ BOH = $\angle$ COK = $\angle$ COL= $\angle$ DOM= $\angle$DON = $\frac{90^0}{4}$ и т. д.

214) a) 161,71 дюйм.; b) 11,932 дюйм.; c) 2,8725 дюйма.

215) 3,75 фут.

216) 3,1 версты съ точностью до 0,1 версты.

217) Почти 5,065 фута.

218) 7,9128 дюйма.

219) 47,1 дюйма.

220) 1,365 фута.

221) 63 дюйма.

222) 115,238 дюйма.

223) 11,87 дюйма.

224) 20°58'21".

225) 8,194 дюйм.

226) 3,738 дюйма.

227) 78,91 дюйм.

228) 17,19 дюйм.

229) 45°, 90°, 270°, 60°, 120°.

230) 80°15'17".

231) 171°58'28".

232) 8,8312 дюйма.

233) 25,12 фут.

234) 20°55'.

235) 206,3217 геогр. мили.

236) 8,189 дюйма.

237) На 3,9739 фута.

238) На 0,3223 фута.

239) 24 $^1/_2$ саж.

240) 38,2 фут.

241) 33,4562 квад. фут.

242) 2291,88 квад. фут.

243) 8 десятинъ 718,05 кв. саж.

244) 13,626 саж.

245) 27,1788 квад. фут.
246) 820,8 квад. саж.
247) 5,9 саж.
248) 6,2 саж.
249) Осн.=8,6 саж., выс.=5,4 саж.
250) 5,8 саж., 3,6 саж. или 7,2 саж., 2,9 саж.
251) 24 саж., 18 саж.
252) 395 саж.
253) 32,227 фута.
254) 4 саж. и 16 саж.; 16 кв. саж. и 256 кв. саж.
255) 13,23 кв. фута.
256) 27 квад. футъ.
257) 7,8 саж. или 10,4 саж.
258) 787,32 квад. саж.
259) 17,64 квад. фута.
260) 80,0876 квад. саж.
261) 10 десят. 1740 кв. саж.
262) 21 дес. 330 кв. саж.
263) 29 дес. 627 кв. саж.
264) 1715,6164 кв. фут.
265) 344,544375 кв. фут.
266) 62 саж. и 46,5 саж.
267) 10,24789 квад. фут.
268) 10,8623 квад. фут.

269) Въ ромбѣ ABCD проведя діагонали AC и BD, пересѣкающіяся въ точкѣ O, получимъ площадь $ABC = \frac{AC.BO}{2}$ и площадь $ADC = \frac{AC.DO}{2}$; отсюда $ABC + ADC = ABCD = \frac{AC.(BO+DO)}{2} = \frac{AC.BD}{2}$.

270) На діагональ AC четыреугольника ABCD опустимъ перпендикуляры BE и DF; тогда площ. $ABC = AC.\frac{BE}{2}$, площ. $ADC = AC.\frac{DF}{2}$; отсюда $ABC + ADC = ABCD = AC.\frac{(BE+DF)}{2}$.

271) Площ. $ADF = \frac{AF.DF}{2}$, площ. $BCF = \frac{BE.CE}{2}$ и площ. $CDFE = EF.\frac{(DF+CE)}{2} = \frac{EF.DF}{2} + \frac{EF.CF}{2}$; отсюда $ABCD = \frac{(AF+FE)DF}{2} + \frac{(BE+EF).CE}{2} = \frac{AE.DF}{2} + \frac{BF.CE}{2}$.

272) Въ ромбѣ ABCD проведя діагонали AC и BD, пересѣкающіяся въ O, получимъ $CO = \sqrt{\overline{CD}^2 - \overline{DO}^2}$ и $AO = \sqrt{\overline{CD}^2 - \overline{DO}^2}$; откуда $AC = 2\sqrt{\overline{CD}^2 - \overline{DO}^2}$. Точно также мы узнаемъ, что $BD = 2\sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{CO}^2}$; слѣдовательно $\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = 4\overline{CD}^2 - 4\overline{DO}^2 + 4\overline{BC}^2 - 4\overline{CO}^2 = 8\overline{AB}^2 - 4(\overline{DO}^2 + \overline{CO}^2) = 8\overline{AB}^2 - 4\overline{AB}^2 = 4\overline{AB}^2$, гдѣ 2AB есть полупериметръ.

273) Площ. GCE = площ. KCE и площ. HAE = площ. FAE; отсюда GCE + HAE = KCE + FAE. Вычтя GCE + HAE изъ BAC, и KCE + FAE изъ DAC, получимъ равные остатки, т. е. BHEG = DFEK.

274) На AB построимъ сегментъ, вмѣщающій въ себѣ равные углы ADB, AEB, AFB и т. д.; тогда высота h треугольника ABD, проходящая чрезъ центръ описанной окружности, больше высоты h' треугольника ABE, больше высоты h'' треугольника ABF и т. д.; слѣдов. площ. ABD > площ. ABE, площ. ABD > площ. ABF.

275) Площадь параллелограма ABCD = AB × DE и также она = AD × BF; слѣдов. AB × DE = AD × BF и $\frac{AB}{AD} = \frac{BF}{DE}$.

276) Даны прямыя AB и AE; на AB построенъ квадратъ ABDC и на AE квадратъ AEGF. Разность ABDC — AEGF = BDCFGE. Продоживъ EG до пересѣченія H съ бокомъ CD, мы узнаемъ, что BDCFGE = BEHD + CHGF; но BEHD = AB.BE и CHGF = AE.BE, слѣдовательно BDCFGE = (AB + AE). BE = (AB + AE) (AB — AE). Назвавъ AB чрезъ a и AE чрезъ b, получимъ ABDC = a^2, AEGF = b^2; слѣдоват. $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

277) Въ кругѣ вписанъ треугольникъ ABC. Проведя діаметръ BF и хорду AF, опустимъ ⊥ BD на AC и изъ центра O ⊥ OE на AB; получимъ ∠ FAB = ∠ OEB = 90°, а потому AF ∥ къ EO, ∠ AFB = ∠ EOB; но такъ какъ ∠ AFB = ∠ ACB, то ∠ ACB = ∠ EOB. Треугольники BEO и BDC подобны, потому-что ∠ BEO = ∠ BDC = 90° и ∠ EOB = ∠ ACB; слѣдов. $\frac{BE}{BD} = \frac{BO}{BC}$ и BD = $\frac{BC.BE}{BO}$ = $\frac{AB.BC}{2BO}$. Площадь ABC = $\frac{AC.BD}{2} = \frac{AC.BC.AB}{4BO}$.

278) На сторонѣ AB построимъ ∠ BAE = ∠ m такъ, чтобы точка E пришлась на CD; чрезъ B проведемъ BF ∥ къ AE до пересѣченія F съ CD и т. д.

279) Отложимъ BD = m, проведемъ DC, AE ∥ къ DC до пересѣченія E съ продолженною BC и наконецъ DE; получимъ площ. DBE = площ. ABC. Въ самомъ дѣлѣ,
DBE = DBC + DCE и
ABC = DBC + DCA;
треугольники DCE и DCA равмѣрны, потому-что у нихъ общее основаніе DC и ихъ вершины E и A находятся на прямой AE, параллельной къ DC.
b) На BC построимъ ∠ CBD = ∠ m такимъ образомъ, чтобы сторона BD пересѣклась съ прямою AD, проведенною ∥ къ BC.

280) По предъидущему (зад. 279,a) обратимъ треугольникъ ABC въ равномѣрный ему треугольникъ BDF съ стороною BD

$= m$. Раздѣлимъ BF въ точкѣ G на двѣ равныя части и проведемъ GH ‖ къ BD и DH ‖ къ BF.

281) Раздѣлимъ сторону BC въ точкѣ D на двѣ равныя части и проведемъ AD и OD. Проведя AE ‖ къ OD, соединимъ E и O; получимъ требуемый треуг. EOC. Въ самомъ дѣлѣ, треуг. ADC $= \frac{1}{2}$треуг. ABC, треуг. ADC $=$ODC $+$ ADO, треуг. EOC $=$ ODC $+$ EDO и треугольники ADO и EDO равномѣрны; слѣдов. EOC $=$ ADC $= \frac{1}{2}$ABC.

282) На продолженной сторонѣ AB отложимъ BF $=$ CD и проведемъ DF.

283) Изъ какой-нибудь точки G стороны BC возставимъ $\perp$ GH $= m$, проведемъ HF ‖ къ BC до пересѣченія F съ AB. Соединимъ F и C, и чрезъ A проведемъ AD ‖ къ FC. Наконецъ соединивъ F и D, получимъ требуемый треуг. FBD.

284) Раздѣлимъ сторону BC въ точкѣ E по-поламъ и чрезъ E проведемъ GH ‖ къ AD до пересѣченія съ сторонами AB и DC.

285) По примѣру задачи (131) обратимъ данный пятиугольникъ ABCDE въ равномѣрный ему треугольникъ DFG и потомъ обратимъ этотъ треугольникъ (128, II) въ равномѣрный прямоугольникъ.

286) Проведемъ BD ‖ къ AC до пересѣченія D съ MN. Соединивъ A съ D, проведемъ CF ‖ къ AD до пересѣченія F съ MN. Наконецъ соединивъ A и F, получимъ требуемый треугольникъ ADF. Въ самомъ дѣлѣ, проведя DC, получимъ равномѣрные треугольники ACD и ACB, и еще равномѣрные треугольники ADC и ADF; слѣдоват. треугольники ACB и ADF равномѣрны.

287) Обратимъ пятиугольникъ (131, II) въ равномѣрный ему треугольникъ и потомъ руководствуемся задачею (286).

288) На прямой BC построимъ сегментъ, вмѣщающій въ себѣ вписанные углы, равные $\angle m$ (35, II). Потомъ проведемъ AD ‖ къ BC до пересѣченія D съ описанною окружностью. Наконецъ соединимъ D съ B и C.

289) На BC построимъ $\angle$ CBD $= \angle m$ и чрезъ A проведемъ AD ‖ къ BC до пересѣченія съ BD. Наконецъ соединимъ D и C.

290) На продолженіи стороны AB прямоугольника ABCD отложимъ BD $=$ BC и на AD опишемъ полуокружность. Продоливъ BC до E пересѣченія съ полуокружностью, получимъ бокъ BE искомаго квадрата.

291) Чрезъ A проведемъ AF ‖ къ BC и изъ средины D бока BC

опишемъ радіусомъ, равнымъ $^1/_2$(AB + AC), дугу, которая пересѣчетъ AF въ G. Проведя DG и BH ∥ къ DG, получимъ требуемый параллелограмъ BDGH.

292) Изъ A радіусомъ m опишемъ дугу до пересѣченія E съ DC и чрезъ B проведемъ BF ∥ къ AE до пересѣченія F съ DC. Изъ A радіусомъ n опишемъ дугу до пересѣченія G съ BF и чрезъ E проведемъ EH ∥ къ AG до пересѣченія H съ BF; получимъ площ. ABCD = площ. ABFE = площ. AGHE.

293) Чрезъ M и точку пересѣченія діагоналей проведемъ прямую между двумя противоположными сторонами параллелограма.

294) Обратимъ параллелограмъ ABCD въ равномѣрный ему параллелограмъ ABFE, коего сторона AE = m. Потомъ обратимъ параллелограмъ ABFE въ равномѣрный ему параллелограмъ AEHG, коего $\angle$ EAG = $\angle$ m.

295) Раздѣлимъ діагональ BD въ точкѣ F на двѣ равныя части и проведемъ прямыя AF и CF; получимъ площ. ABCF = площ. AFCD. Потомъ обратимъ четыреугольникъ ABCF въ равномѣрный ему треугольникъ ABE.

296) Положимъ, что точка P удовлетворяетъ вопросу; тогда проведя прямыя AP, BP, CP, продолжимъ AP до пересѣченія D съ BC, BP до пересѣченія E съ AC, CP до пересѣченія F съ AB. По условію вопроса треугольники APB и APC должны быть равномѣрны. Такъ какъ у нихъ общее основаніе AP, то ихъ высоты BG и CH должны быть равны; а потому прямоугольные треугольники BGD и CHD равны и BD = CD. Подобнымъ образомъ узнаемъ, что AE = CE, AF = BF. Какъ должно рѣшить эту задачу?

297) Проведемъ AP и, раздѣливъ BC въ точкахъ D и E на три равныя части, проведемъ PE, и AF ∥ къ PE. Потомъ соединимъ P и F, проведемъ PD, и AG ∥ къ PD. Наконецъ соединимъ P и G. Треугольникъ ABC раздѣлится прямыми PA, PG и PF на три равныя части. Въ самомъ дѣлѣ,
пл. ABG + пл. AGD =
пл. ABG + пл. AGP =
$^1/_3$пл. ABC;
пл. ACF + пл. AFE =
пл. ACF + пл. AFP =
$^1/_3$пл. ABC.

298) Прямая EF, проведенная чрезъ точку пересѣченія діагоналей AC и BD, раздѣляетъ параллелограмъ на двѣ равныя части. Потомъ, какъ въ задачѣ

295, раздѣлимъ четыреугольникъ ADEF прямою AG на двѣ равныя части. Раздѣливъ діагональ BG на три равныя части K и L, замѣнимъ образовавшійся четыреугольникъ ABCK равномѣрнымъ ему треугольникомъ ABH. Наконецъ раздѣлимъ четыреугольникъ AGCH на двѣ равныя части.

299) Руководствуемся рѣшеніями задачъ 295 и 298.

300) Проведемъ діагональ BD и къ ней параллельно AG до пересѣченія G съ продолженною стороною CD. Проведемъ BF и раздѣлимъ CG на четыре равныя части въ точкахъ H, K, L. Чрезъ эти точки проведемъ прямыя HE, KM, LN ∥ къ BF до пересѣченія съ BC и съ AB; полученныя точки E, M, N соединимъ съ точкою F; образуются площади CFE = EFMB = MFN = NFDA = $^1/_4$BCG = $^1/_4$ABCD, потому-что BCG = BCD + BDG, ABCD = BCD + ABD, и ABD = BDG. Въ самомъ дѣлѣ, проведя BH, получимъ CEH + BEH = CEH + FEH, потому-что BEH = FEH, слѣдовательно CBH = CEF = $^1/_4$ABCD. Проведя BK, получимъ BCK = BCF + BFK и BCFM = BCF + BFM; но такъ какъ BFK = BFM, то BCK = BCFM = $^1/_2$ABCD и BCFM — CEF = EFMB = $^1/_4$ABCD. Проведя BL, получимъ BCL = BCF + BFL и BCFN = BCF + BFN; но такъ какъ BFL = BFN, то BCL = BCFN = $^3/_4$ABCD и BCFN — BCFM = $^1/_4$ABCD.

301) 420,88896 квад. фут.

302) 0,98 квад. фута.

303) 11,40594 фута.

304) 33,9408 фута.

305) 46,76211 квад. фут.

306) 576 квад. фут.

307) 54 фут.

308) 0,89 фута.

309) Бокъ квадрата меньше діаметра на 1,078 фута.

310) 45,36 квад. фут.

311) 1303,5 квад. фут.

312) 6,7184 квад. дюйм.

313) 40,84253 квад. фут.

314) 5,88654 фут.

315) 116,9712 фут.

316) 28,12416 фут.

317) 490,8738 квад. фут.

318) 584,3 квад. фут.

319) 31,03398 квад. фут.

320) 6,7433 квад. фут.

321) 10,205 квад. фут.

322) 2,121 дюйма.

323) На 19,856 квад. дюйма.

324) 357,9257 квад. фут.

325) 51,5611 квад. фут.

326) 595,15 квад. фут.

327) 100,8 квад. фут.

328) 1373,7056 квад. фут.

329) 7 футъ; 20°47′50″.

330) 370,9 квад. фут.

331) Если радіусъ большаго круга R и радіусъ малаго круга R′, то площади этихъ круговъ суть πR^2 и $\pi R'^2$ и площадь круговаго кольца равна $\pi R^2 - \pi R'^2 = \pi(R^2 - R'^2) = \pi(R + R')(R - R')$.

332) Апоѳема вписаннаго правильнаго шестиугольника равна $\frac{R}{2}\sqrt{3}$, а его периметръ равенъ 6R; слѣдов. площадь этого шестиугольника равна $\frac{6R.\frac{1}{2}R\sqrt{3}}{2} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$.

333) По формулѣ (4, 102) мы имѣемъ $m^2 = R(2R - \sqrt{4R^2 - a^2})$, гдѣ a бокъ квадрата и $a^2 = 2R^2$; слѣдовательно $m^2 = 2R^2 - R\sqrt{4R^2 - 2R^2} = R^2(2 - \sqrt{2})$, откуда $m^2(2 + \sqrt{2}) = R^2(2 - \sqrt{2})(2 + \sqrt{2}) = 2R^2$, $R^2 = m^2(1 + \frac{1}{2}\sqrt{2})$ и $R = m\sqrt{1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}}$. Апоѳема x опредѣлится по формулѣ $x^2 = R^2 - \frac{m^2}{4}$, въ которую подставимъ величину, равную величинѣ R^2; получимъ $x^2 = m^2 + \frac{m^2\sqrt{2}}{2} - \frac{m^2}{4} = \frac{m^2}{2} + \frac{m^2}{2} + \frac{m^2\sqrt{2}}{2} - \frac{m^2}{4} = \frac{2m^2}{4} - \frac{m^2}{4} + \frac{m^2}{2} + \frac{m^2\sqrt{2}}{2} = \frac{m^2}{4} + \frac{m^2\sqrt{2}}{2} + \frac{m^2}{2} = \left(\frac{m}{2} + \frac{m\sqrt{2}}{2}\right)^2$; откуда $x = \frac{m}{2}(1 + \sqrt{2})$. Наконецъ площадь $P = \frac{8m^2}{4}(1 + \sqrt{2}) = 2m^2(1 + \sqrt{2})$.

334) Бокъ $m = R\left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)$, откуда $2m(\sqrt{5} + 1) = R(\sqrt{5} - 1)(\sqrt{5} + 1) = 4R$ и $R = \frac{m}{2}(\sqrt{5} + 1)$. Для опредѣленія апоѳемы x мы имѣемъ $x^2 = \frac{m^2}{4}(5 + 2\sqrt{5} + 1) - \frac{m^2}{4} = \frac{m^2}{4}(5 + 2\sqrt{5})$ и $x = \frac{m}{2}\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$. Площадь равна $\frac{10m^2}{4}\sqrt{5 + 2\sqrt{5}} = \frac{5}{2}m^2\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$.

335) Площадь вписаннаго квадрата, имѣющаго бокъ a, равна $2R^2$, и площадь описаннаго квадрата, коего бокъ равенъ b, равна $b^2 = 4R^2$; слѣдовательно и проч.

336) Бокъ m вписаннаго правильнаго восьмиугольника (по форм. 4, 103) равенъ $R.\sqrt{2 - \sqrt{2}}$; апоѳема x равна $\frac{R}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ и площадь P этого многоугольника равна $(8R\sqrt{2 - \sqrt{2}})(\frac{R}{4}\sqrt{2 + \sqrt{2}}) = R^2\sqrt{2}$. Бокъ a вписаннаго квадрата $= R\sqrt{2}$ и бокъ b описаннаго

квадрата $= 2R$; отсюда $ab = 2R^2\sqrt{2} = P$.

337) Сторона a вписаннаго правильнаго треугольника равна $R\sqrt{3}$, его высота x равна $\frac{3R}{2}$ и его площадь $P = \frac{3R.R\sqrt{3}}{4} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$. Сторона a' описаннаго правильнаго треугольника равна $\frac{2a.R}{\sqrt{4R^2-a^2}} = \frac{2R^2\sqrt{3}}{\sqrt{4R^2-3R^2}} = 2R\sqrt{3}$, его высота $y = 3R$ и его площадь $P' = \frac{3R.2R\sqrt{3}}{2} = 3R^2\sqrt{3}$. Площадь P'' вписаннаго правильнаго шестиугольника равна $\frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$; но изъ пропорціи $\frac{{}^3/_4R^2\sqrt{3}}{P''} = \frac{P''}{3R^2\sqrt{3}}$ получится $P'' = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$, слѣдов. и проч.

338) $BMCHG = BMCK + CHGK$, $BMCO = BMCK + BOK$, $CHGK = COH - KOG$, $BOK = BOG - KOG$, но треугольники BOG и COH равны, потому-что $\angle BGO = \angle CDO$, $BO = CO$ и $\angle OBG = \angle AOB = \angle COD$, слѣдоват. и проч.

339) Секторъ $OBC = BC.\frac{OB}{2}$ и сегментъ $ACB = \frac{OB}{2}$(дуг. $ACB - AD) = \frac{OB}{2}.BC$.

340) Сторона вписаннаго правильнаго двѣнадцатиугольника равна $m = R\sqrt{2-\sqrt{3}}$ (по фор. 4, 103), его апоѳема $x = \frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$ и его площадь равна $(\frac{12R}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}})(\frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}) = 3R^2$.

341) 230,937 квад. дюйм.

342) Въ 25 разъ.

343) 203,725 квад. саж.

344) 12,6 саж., 16,8 саж., 21 саж.

345) 74,8 саж., 56,1 саж. и 93,5 саж.

346) $13^{38}/_{99}$ фут., $4^{8}/_{9}$ фут.

347) $4^{5}/_{36}$ саж.

348) $AD = 10,8$ саж., $AE = 8,1$ саж.

349) 296,68 квад. саж.

350) $AB = 4^{4}/_{7}$ саж., $ab = 1^{4}/_{7}$ саж.

351) 10,257 квад. дюйм.

352) Почти 15,92 фут.

353) $AD = 333,07$ саж., $AF = 444,09$ саж.

354) 2,4 дюйма.

355) $AD = 169,7$ саж., $AF = 190,9$ саж.

356) 74,97 саж.

357) 2,64 дюйм., 2,25 дюйм.

358) 39,34 саж.

359) 15 футъ; 30 футъ.

360) $AD = 407,93$ саж., $AG =$

576,6 саж., AF=543,9 саж., AH=768,8 саж.

361) Сторона искомаго треугольника должна быть втрое больше стороны даннаго треугольника.

362) Чтобы найти сторону x, соотвѣтствующую сторонѣ a даннаго многоугольника, построимъ среднюю пропорціональную между a и $\frac{a}{3}$.

363) Радіусы данныхъ круговъ суть R, R′, R″. Построимъ прямоугольный треугольникъ ABC, коего катеты суть AB = R и BC=R′. Къ AC изъ точки C возставимъ ⊥ CD=R″; получимъ радіусъ AD искомаго круга. Почему?

364) На сторонѣ AB опишемъ полуокружность и изъ средины F прямой AB возставимъ ⊥ FD до пересѣченія съ полуокружностью. Потомъ отложимъ хорду AD на AB отъ A до G и чрезъ G проведемъ GH ∥ къ BC; тогда получимъ

$$\frac{\text{треуг. ABC}}{\text{треуг. AGH}}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AG}^2}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AD}^2},$$

но $\overline{AD}^2 = AB.AF = {}^1/_2\overline{AB}^2$, слѣдов. $\frac{\text{треуг. ABC}}{\text{треуг. AGH}}=\frac{\overline{AB}^2}{{}^1/_2\overline{AB}^2}={}^2/_1$.

365) Радіусы данныхъ круговъ суть R и R′. На прямой BC = R построимъ прямоугольный треуг. ABC, коего катетъ BA= R′; получимъ радіусъ CA искомаго круга.

366) Проведемъ AD ∥ къ MN до пересѣченія D съ BC и раздѣлимъ бокъ BC на три равныя части въ точкахъ F и K. Потомъ построимъ среднюю пропорціональную между BD и BF, и отложимъ ее на BC отъ B до H. Наконецъ проведемъ чрезъ H прямую HG ∥ къ AD до пересѣченія G съ AB. Докажемъ теперь, что треуг. GBH = ${}^1/_3$треуг. ABC. Проведя AF, получимъ $\frac{ABD}{ABF}=\frac{BD}{BF}$. Также $\frac{ABD}{BGH}=\frac{\overline{BD}^2}{\overline{BH}^2}$; но такъ какъ $\overline{BH}^2 = BD.BF$, то $\frac{ABD}{BGH}=\frac{\overline{BD}^2}{BD.BF}=\frac{BD}{BF}$. Сравнивая послѣднюю пропорцію съ первою, мы замѣчаемъ, что BGH = ABF = ${}^1/_3$ABC.

367) На AB=радіусу R даннаго круга опишемъ полуокружность и изъ средины C прямой AB проведемъ радіусъ CD ⊥ къ AB; тогда хорда AD есть радіусъ искомой окружности. Въ самомъ дѣлѣ, $\overline{AD}^2 = AB.AC = AB.\frac{AB}{2}=\frac{\overline{AB}^2}{2}$. Помноживъ обѣ части этого равенства на π, получимъ $\pi\overline{AD}^2 = {}^1/_2\pi\overline{AB}^2$.

368) Назовемъ чрезъ x сторону

искомаго треугольника, соотвѣтствующую сторонѣ a даннаго треугольника; тогда должно быть $\frac{a^2}{x^2} = {}^1/_2$, откуда $\frac{2a}{x} = \frac{x}{a}$ и т. д.

369) На $AB = n$ построимъ прямоугольный треуг. ADB, коего катетъ AD = сторонѣ a даннаго многоугольника, которой соотвѣтствуетъ бокъ x искомаго многоуг. Изъ D опустивъ ⊥ DC на AB, получимъ $AC = \frac{a^2}{n}$. Потомъ построимъ среднюю геометрическую между AC и m; получится бокъ x. Въ самомъ дѣлѣ, $x^2 = AC.m = \frac{a^2 m}{n}$; откуда $\frac{a^2}{x^2} = \frac{n}{m}$.

370) На AB построимъ равносторонній треуг. ABF (внутри квадрата) и чрезъ C ∥ къ BF проведемъ GH до пересѣченія H съ продолженною AB и до пересѣченія G съ продолженною AF (прямая FG пересѣкаетъ DC въ точкѣ E). На GH построимъ прямоугольный треуг. GKH, коего катетъ GK = GC. Равносторонній треуг. KHM, построенный на KH, равномѣренъ квадрату ABCD. Въ самомъ дѣлѣ, построивъ на GK равносторонній треуг. GKL, получимъ (147) треуг. KHM = треуг. AGH — треуг. GKL, но такъ какъ GKL = CEG, то треуг. KHM = треуг. AGH — треуг. CEG = AHCE = ABCD.

371) I, 68, слѣд. 1 и 42.

372) I, 68, 42.

373) II, 124, 126.

374) I, 68 и слѣдствія.

375) I, 49 и 37.

376) I, 113 и 63.

377) I, 68.

378) I, 36.

379) Данъ треуг. ABC, въ которомъ AB = AC, и на BC построенъ треуг. DBC, въ которомъ DB > DC. На продолженіи стороны BA отложимъ AE = BA и проведемъ ED и EC. Изъ A опустимъ ⊥ AF на EC. Изъ треуг. BDE получимъ

BD + DE > BE или

BD + DE > BA + AE или

BD + DE > BA + AC; но такъ какъ по заданію периметры треугольниковъ ABC и DBC равны, то BA + AC = BD + DC и

BD + DE > BD + DC

или DE > DC. Наклонныя AE и AC равны, но DE > DC; слѣдовательно точка D лежитъ внѣ ⊥ AF, т. е. между параллельными BC и AF. Отсюда мы заключаемъ, что высота треуг. DBC меньше высоты треуг. ABC.

380) I, 87; II, 124 слѣд.

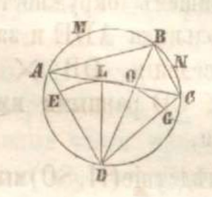
381) II, 72.

382) II, 83, 52, 15 форм. 15.

383) II, 135, 122.

384) I, 87, 151, 44.
385) II, 94, 97 и 111.
386) II, 124; I, 110.
387) II, 71 форм. 1, 2, 3.
388) I, 151, 28.
389) II, 52.
390) II, 37.
391) Чрезъ E проведемъ EH || къ BC, чрезъ H прямую HL || къ AC и чрезъ H прямую HK || къ DC до пересѣченія съ AC; тогда HE = HB, HE = EK, ∠ ACB > ∠ HBL, ∠ HLB = ∠ ACB; откуда ∠ HLB > ∠ HBL и BH > HL; слѣдовательно EK > HL или EK > EC. Легко доказать (I, 39), что BE > HK; но CD < HK, слѣдовательно CD < BE.
392) См. доказ. 391.
393) II, 52.
394) Средина G прямой CO есть центръ окружности, проходящей чрезъ C, D, O, E. Проведя GD, GE, FD, FE, получимъ ∠ DGE = 2 ∠ DCE = 2 ∠ BCA = 180^0 — (CBE + CAD) = 180^0 — (DFO + EFO) = 180^0 — ∠ DFE; слѣдов. DGE + DFE = 180^0 и точка G лежитъ на окружности, проходящей чрезъ F, E, D. Проведя GH, получимъ ∠ GHE = ∠ GFE; также ∠ OFE = ∠ OAE, слѣдов. ∠ OAE = ∠ GHC и GH || къ AO; но такъ какъ OG = GC, то и AH HC и т. д.
395) Дуга AMB > дуг. BNC.

Фиг. 224.



Раздѣлимъ дугу ADC въ точкѣ D по-поламъ и проведемъ DA, DB, DC и AC; тогда ∠ ABD = ∠ DBC и $\frac{AB}{BC} = \frac{AO}{OC}$. Изъ D радіусомъ DO опишемъ дугу ELOG; тогда

сект. DLO > треуг. DLO и
сект. DOG < треуг. DOC;
слѣдовательно

$$\frac{\text{сект. DLO}}{\text{сект. DOG}} > \frac{\text{треуг. DLO}}{\text{треуг. DOC}} \text{ или}$$

$$\frac{\text{сект. DLO}}{\text{сект. DEL}} > \frac{\text{треуг. DLO}}{\text{треуг. DAL}};$$

откуда

$$\frac{\text{сект. DEO}}{\text{сект. DOG}} > \frac{\text{треуг. DAO}}{\text{треуг. DOC}} \text{ и}$$

$$\frac{\text{уг. ADB}}{\text{уг. BDC}} > \frac{AO}{OC}\text{; слѣдоват. } \frac{\text{дуг. AB}}{\text{дуг. BC}} > \frac{AB}{AC}.$$

396) Дуги AB и DE описаны изъ центровъ C и O, и радіусъ DO < радіуса AC. Изъ C радіусомъ DO опишемъ дугу MN, пересѣкающуюся съ радіусами CA и CB въ точкахъ M и N; тогда

$$\frac{\text{дуг. DE}}{\text{дуг. MN}} > \frac{\text{хорд. DE}}{\text{хорд. MN}}$$

или $\frac{\text{дуг. DE}}{\text{дуг. MN}} > \frac{\text{хорд. AB}}{\text{хорд. MN}}$

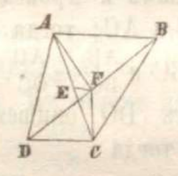
или $\frac{\text{дуг. DE}}{\text{дуг. MN}} > \frac{\text{дуг. AB}}{\text{дуг. MN}}$,

слѣдов. дуг. DE > дуг. AB.

397) Опишемъ окружность около треугольника ADE и замѣнимъ произведенія $DB \times BE$ и $EC \times CD$ равными имъ величинами.

398) Вслѣдствіе (II, 80) мы имѣемъ

Фиг. 225.



$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \frac{1}{2}\overline{AC}^2 + 2\overline{BE}^2$ и

$\overline{CD}^2 + \overline{AD}^2 = \frac{1}{2}\overline{AC}^2 + 2\overline{DE}^2$;

откуда

$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 + 2\overline{BE}^2 + 2\overline{DE}^2$, но

$\overline{BE}^2 + \overline{DE}^2 = \frac{1}{2}\overline{BD}^2 + 2\overline{EF}^2$

и $2(\overline{BE}^2 + \overline{DE}^2) = \overline{BD}^2 + 4\overline{EF}^2$,

слѣдовательно

$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 + 4\overline{EF}^2$.

399) I, 100 и теор. 398.

401) Проведемъ EF и діагональ. II, 124 слѣд.

402) Изъ центра опустимъ перпендикуляръ на сторону *a*. — II, 52.

403) II, 69; I, 112.

404) II, 37, 102.

405) II, 72.

406) II, 52.

409) Продолжимъ прямыя DE и FG до ихъ пересѣченія. II, 123.

411) Продолжимъ данныя прямыя до ихъ пересѣченія O, чрезъ средину F прямой CO проведемъ FG ∥ къ AB и т. д.

412) На діагонали CA квадрата ABCD отложивъ CE=AB, получимъ треуг. ADE, въ которомъ ∠ AED = 112°30′, ∠ DAE=45° и AE=AC−AB и т. д.

413) Продолживъ діагональ AC какого-нибудь квадрата ABCD и отложивъ CE=AB, получимъ треуг. ABE, въ которомъ AE= AC + AB, ∠ BAE = 45° и ∠ BEA=22°30′ и т. д.

414) II, 119, 67.

415) Продолживъ сторону BA какого-нибудь треуг. ABC и сдѣлавъ AG=AC, получимъ треуг. GBC, въ которомъ BG = BA + AC, ∠ BGC = ½ ∠ BAC и т. д.

416) Продолживъ основаніе AB какого-нибудь прямоугольника ABCD и сдѣлавъ BE=BC, получимъ треуг. ACE, въ которомъ AE=AB + BC, сторона AC есть діагональ прямоугольника и ∠ AEC=45° и т. д.

417) Продоживъ высоту BC какого-нибудь прямоугольника ABCD и отложивъ $CE = AC$, получимъ прямоугольный треуг. ABE, въ которомъ AB сторона прямоугольника и $BE = AC - BC$ и т. д.

418) Продоживъ гипотенузу BC равнобедреннаго прямоугольнаго треугольника ABC и отложимъ $BD = CE = AB$, получимъ треуг. ADE, въ которомъ $\angle D = \angle E = \frac{90^\circ}{4}$ и т. д.

419) Центръ искомой дуги находится въ точкѣ пересѣченія основанія и одного изъ равныхъ боковъ равнобедреннаго треугольника, коего вершина совпадаетъ съ центромъ C'.

420) II, 124, 126.

421) Центръ искомой окружности находится на параллельной къ AB, отстоящей отъ AB на m, и на параллельной къ CD, проходящей чрезъ вершину прямоугольнаго треуг., коего гипотенуза $= m$ и катетъ, совпадающій съ CD, равенъ $^1/_2 n$.

422) На BC отложимъ $BD = LM$ и проведемъ AD; тогда треуг. ABD больше треугольника ABC треугольникомъ ADC; а потому отъ треуг. ABD должно отнять треуг. ADE, равномѣрный треугольнику ADC. Рѣшеніе этой задачи при $LM < BC$.

423) Построимъ четыреугольникъ ABEF, равномѣрный половинѣ треугольника ABC.

424) Продолжимъ прямую AO и къ окружности O перпендикулярно къ AO проведемъ касательную ED между AB и AC. Потомъ раздѣлимъ $\angle$ EDC на двѣ равныя части прямою DO'. Точкою O' пересѣченія этой прямой съ продолженною AO опредѣлится центръ искомой окружности.

425) Должно построить равнобочную трапецію ABCD, въ которой хорда $EF = \frac{m}{2} = \frac{AD + BC}{2}$.

426) На прямыхъ AC и BC построимъ равносторонніе треугольники ACD и BCE и опишемъ около нихъ окружности, которыя пересѣкутся въ точкахъ C и X.

427) I, 107, 117, 143.

428) На прямыхъ AC и BC построимъ такіе сегменты, чтобы первый вмѣщалъ углы, равные углу m, и второй вмѣщалъ углы, равные углу n.

429) Діагональ искомаго прямоугольника равна діаметру GH даннаго круга. Означивъ чрезъ x высоту треугольника, коэго основаніе равно GH, мы имѣемъ $GH \times x = AB \times AC$ и т. д.

430) Предположимъ, что задача

рѣшена. Соединивъ центръ C съ точками A и Y, проведемъ чрезъ X прямую XZ до пересѣченія Z съ AC; тогда легко узнать, какъ найти Z и какъ опредѣлить прямую ZX и т. д.

431) Продоливъ сторону BA какого-нибудь треугольника ABC и отложивъ AD = AC, получимъ треуг. BCD, въ которомъ BD = BA + AD, $\angle$ B извѣстенъ и $\angle D = 90^0 - \frac{1}{2}(B + C)$ и т. д.

432) См. рѣшеніе зад. 421.

433) Проведя діагональ въ данномъ квадратѣ и діагональ въ искомомъ квадратѣ, докажемъ, что эти діагонали взаимно дѣлятся по-поламъ.

435) Продоливъ сторону BA какого-нибудь треугольника ABC и сдѣлавъ AD = AC, получимъ треуг. BCD, въ которомъ BD = BA + AC, $\angle ADC = \angle ACD = \frac{1}{2} \angle BAC$ и т. д.

436) Проведя DE ∥ къ BC, соединимъ среднія точки F и G этихъ прямыхъ и проведемъ AF. Отъ образовавшагося четыреугольника ABGF отнимемъ треуг. AGF и прибавимъ равномѣрный треуг. AGH.

437) Между параллельными AB и CD проведемъ прямую KF подъ $\angle m$ такъ, чтобы прямая KF раздѣлилась на двѣ равныя части перпендикуляромъ, опущеннымъ на нее изъ G.

438) На прямой a построимъ равнобедренный треугольникъ и въ немъ параллельно къ a проведемъ $x = \frac{1}{2}a$.

439) Продолжимъ катетъ BC прямоугольнаго треуг. ABC, въ которомъ $\angle ABC = \angle m$, и отложимъ BD = AB и CE = AC; получимъ DE = AB + BC + CE, $\angle ADB = \frac{1}{2}m$ и $\angle AED = 45^0$ и т. д.

440) Центръ искомой окружности долженъ находиться на продолженіи діаметра окружности C′, проходящаго чрезъ A, и на продолженіи радіуса окружности C, проходящаго чрезъ точку D касанія. Точка D опредѣляется прямою AB и радіусомъ CB, проведеннымъ ∥ къ радіусу C′A.

441) Построимъ равнобедренный треуг. GKL, коего вершина G находится на CD и основаніе KL проведено чрезъ E перпендикулярно къ AD и BC такимъ образомъ, что OK = OE и PL = PE и т. д.

442) Опредѣливъ центръ O и радіусы OD, OE, OF окружности, вписанной въ треуг. ABC, получимъ точки касанія D, E, F и требуемые радіусы AD = AE, BD = BF, CE = CF.

443) На AB = a построимъ треуг.

ABC, въ которомъ BC$=\frac{2}{3}m$ и BC$=\frac{2}{3}n$. На продолженіи прямой AC отложимъ CF$=\frac{1}{3}m$ и на продолженіи прямой BC часть CD$=\frac{1}{3}n$. Потомъ проведемъ AG чрезъ A и D, и BG чрезъ B и F.

445) Изъ точки A опустимъ $\perp$ AC на MN и на его продолженіи отложимъ CD=AC. Потомъ руководствуемся зад. 35, II.

446) Параллельно къ AB проведемъ прямую CD, коей разстояніе отъ AB равно радіусу данныхъ окружностей. Потомъ опишемъ окружность, проходящую чрезъ O и O′, и касающуюся къ CD. Центръ этой окружности есть центръ искомой окружности.

447) Руководствуясь рѣшеніемъ зад. 446, проведемъ CD по ту сторону прямой AB, гдѣ находятся данные круги.

448) Раздѣливъ $\angle$ ABC на двѣ равныя части прямою BK, проведемъ къ ней перпендикулярно прямую чрезъ H между AB и BC; эта прямая пересѣкаетъ BK въ E и AB въ D. Отложимъ EF = HE и построимъ среднюю геометрическую x между прямыми DH и DF. Найденную x отложимъ на AB отъ D до G, и изъ G къ AB возставимъ $\perp$ до пересѣченія O съ BK; получимъ центръ O искомой окружности.

449) Въ треуг. ABC высота AF $=m$, BG$=n$ и CD$=p$. На AB отложимъ AH=BG$=n$ и на AC отложимъ AK=CD$=p$. Такъ какъ $\frac{AB}{AC}=\frac{BG}{CD}$, то $\frac{AB}{AC}=\frac{n}{p}=\frac{AH}{AK}$; слѣдов. треугольники ABC и AHK подобны и $\frac{AH}{HK}=\frac{AB}{BC}$ или $\frac{n}{HK}=\frac{AB}{BC}$; также $\frac{AB}{BC}=\frac{AF}{CD}=\frac{m}{p}$, а потому $\frac{n}{HK}=\frac{m}{p}$ и т. д.

450) Какимъ-нибудь радіусомъ опишемъ окружность, проходящую чрезъ A и B, и пересѣкающуюся съ данною окружностью въ точкахъ C и D. Потомъ продолжимъ прямыя AB и CD до ихъ пересѣченія E, и изъ E проведемъ касательную къ данной окружности. Въ точкѣ F искомая окружность касается къ данной окружности. Въ самомъ дѣлѣ, прямыя EA и EC суть сѣкущія окружности, проходящей чрезъ A, B, C, D; слѣдоват. $\frac{AE}{CE}=\frac{DE}{BE}$ или CE $\times$ DE $=$ AE $\times$ BE. Относительно данной окружности проведены касательная EF и сѣкущая EC; слѣдов. $\frac{CE}{EF}=\frac{EF}{DE}$ или $EF^2=$ CE$\times$DE. Отсюда слѣдуетъ, что $EF^2=$AE$\times$BE или $\frac{AE}{EF}=\frac{EF}{BE}$. Эта пропорція показываетъ, что EF

есть касательная къ искомой окружности.

451) См. рѣшеніе зад. 450.

452) Опишемъ окружность, проходящую чрезъ A и B, и пересѣкающуюся съ данною окружностью въ точкахъ C и D. См. рѣшеніе зад. 450.

453) При какой-нибудь точкѣ F прямой ED построимъ $\angle$ EFA $= \angle$ AFC $= \angle$ DFC (точка A находится на HK и C на LM). На FC опишемъ окружность, которая пересѣчетъ ED въ F и B, HK въ A, LM въ C. Проведя хорды AB, AC, BC, получимъ требуемый треугольникъ ABC.

454) Положимъ, что вопросъ рѣшенъ. Параллельно къ AB проведемъ чрезъ Y прямую, которая пересѣчетъ окружность въ K. Продолжимъ хорду ZK до пересѣченія G съ AB; получимъ подобные треугольники BGZ и BXA и $\frac{BA}{BX} = \frac{BZ}{BG}$ и т. д.

455) Чрезъ N проведемъ $\parallel$ къ AX прямую NP до пересѣченія P съ продолженною AE. Точка F пересѣченія прямой AP съ окружностью и точки B, N, P лежатъ на одной окружности и т. д.

456) Докажемъ, что $\angle$ ABC $= \angle$ AXF $- \angle$ BXE. См. рѣшеніе зад. 445.

457) Предположимъ, что кругъ X удовлетворяетъ вопросу. Проведемъ чрезъ O прямую FG перпендикулярно къ BC и чрезъ A наклонную FC; тогда прямая, проведенная чрезъ точки касанія M и N, должна пройти чрезъ F и слѣдов. $\frac{FA}{FM} = \frac{FN}{FH}$ или FA.FH $=$ FM.FN (точка H получилась пересѣченіемъ прямой FC съ окружностью X).

458) На разстояніи, равномъ радіусу даннаго круга, проведемъ FG $\parallel$ къ AB и HK $\parallel$ къ AC внѣ даннаго угла; тогда окружность, проходящая чрезъ центръ O и касающаяся къ прямымъ FG и HK, имѣетъ общій центръ съ искомою окружностью. Двѣ окружности удовлетворяютъ вопросу. Проведя прямыя FG и HK внутри даннаго угла, мы узнаемъ, что еще двѣ окружности удовлетворяютъ вопросу.

459) Если изъ C описать окружность радіусомъ, равнымъ R — R′, то искомая окружность будетъ имѣть общій центръ съ окружностью, проведенною чрезъ C′ и касающеюся къ окружности R — R′, а также къ прямой, проведенной $\parallel$ къ CD въ разстояніи, равномъ R′, отъ CD. См. рѣшеніе зад. 457.

Этому случаю удовлетворяютъ четыре рѣшенія. Описавъ вспомогательную окружность радіусомъ, равнымъ R + R′, получимъ еще четыре рѣшенія.

460) Опишемъ окружность изъ центра C радіусомъ R — R″ и еще окружность изъ центра C′ радіусомъ R′ — R″; тогда центръ искомой окружности совпадетъ съ центромъ окружности, проходящей чрезъ центръ C″ и касающейся къ окружностямъ R — R″ и R′ — R″.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

ЧАСТЬ II.

ОТДѢЛЪ I.

Стран.

Подобіе фигуръ.

ОТДѢЛЪ II.

Площади.

ОШИБКИ И ОПЕЧТАКИ.

Стран.	Стр.	Напечатано.	Должно быть.
2	2 снизу.	съ остаткомъ	съ остаткомъ R″
58	15 снизу.	12. Теорема.	72. Теорема.
78	—	въ (фиг. 186) пропущены хорды bN и Nc.	
132	—	въ (фуг. 217) пропущена буква B на прямой AD.	
135	—	въ (фиг. 220) четыреугольникъ, начерченный на BC, названъ буквою Q′.	
146	6 сверху	прямыя AX и BY	AX и BX

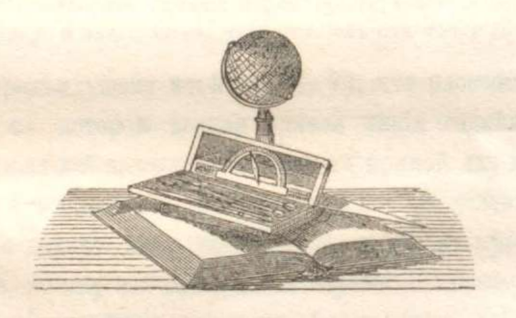
НАЧАЛЬНЫЯ ОСНОВАНІЯ
ГЕОМЕТРІИ

и

СОБРАНІЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХЪ ЗАДАЧЪ.

СОЧИНЕНІЕ

А. ЛЁВЕ.



ЧАСТЬ III.

ГЕОМЕТРІЯ ВЪ ПРОСТРАНСТВѢ.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.
Въ типографіи Ретгера и Шнейдера, Невскій просп. № 5.
1868.

Начальныя основанія Геометріи.

ЧАСТЬ III.

ГЕОМЕТРІЯ ВЪ ПРОСТРАНСТВѢ.

ОТДѢЛЪ I.

О ПЛОСКОСТИ.

ПЕРВАЯ ГЛАВА.

Плоскость и прямая линія. Опредѣленіе положенія плоскости. Условія, которымъ должна удовлетворять прямая, перпендикулярная къ плоскости. Свойства перпендикуляра и наклонныхъ, проведенныхъ отъ точки до плоскости.

1. По предъидущему извѣстно (I, 7), что плоскость есть такая поверхность, съ которою всякая прямая линія совмѣщается всѣми точками, если на ней находятся двѣ точки прямой линіи.

2. Если отъ плоскости требуется только одно условіе: чтобы она прошла чрезъ данную прямую, то ея положеніе въ пространствѣ неопредѣленное, потому-что она можетъ обращаться около этой прямой, какъ около оси, принимая при этомъ безчисленное множество положеній.

3. Прямая линія, имѣющая съ плоскостью только одну общую точку, *пересѣкаетъ* плоскость въ этой точкѣ. Точка пересѣченія прямой и плоскости называется *основаніемъ* этой прямой.

4. **Теорема**. *Чрезъ какую-нибудь прямую и точку, лежащую внѣ ея, можно провести только одну плоскость, т. е. прямая и точка, находящаяся внѣ ея, опредѣляютъ положеніе плоскости.*

Представивъ себѣ, что плоскость P (фиг. 226), проведенная чрезъ прямую AB, обращается около этой прямой, какъ около оси, до тѣхъ поръ, пока она достигнетъ точки C. При этомъ положенiи плоскость P вмѣщаетъ въ себѣ прямую AB и точку C. Продолжая же обращаться, плоскость P оставитъ точку C. Отсюда мы заключаемъ, что для плоскости P существуетъ только одно положенiе, при которомъ она содержитъ прямую AB и точку C; слѣдовательно плоскость имѣетъ опредѣленное положенiе, если она проходитъ чрезъ прямую и точку, находящуюся внѣ этой прямой.

Фиг. 226.

5. Слѣдствiе. *Три точки* A, B *и* C, *не лежащiя на одной прямой, опредѣляютъ положенiе плоскости*, потому-что плоскость, проходящая чрезъ прямую AB и точку C, содержитъ въ себѣ точки A, B и C. На оборотъ: плоскость, содержащая точки A, B и C, должна пройти чрезъ прямую AB и точку C.

6. Слѣдствiе. *Двѣ пересѣкающiяся прямыя* AB *и* AC *опредѣляютъ положенiе плоскости*, потому-что плоскость, проходящая чрезъ прямую AB и точку C, должна содержать прямыя AB и AC. На оборотъ: плоскость, заключающая прямыя AB и AC, должна пройти чрезъ прямую AB и точку C.

7. Слѣдствiе. *Двѣ параллельныя прямыя* AB *и* CD *опредѣляютъ положенiе плоскости*, потому-что двѣ параллельныя прямыя должны находиться въ одной плоскости. Существуетъ только одна плоскость, содержащая параллельныя прямыя AB и CD, потому-что возможно провести только одну плоскость чрезъ прямую AB и какую-нибудь точку прямой CD. Отсюда слѣдуетъ, что *чрезъ данную точку* C *можно провести въ пространствѣ только одну параллельную къ данной прямой* AB, потому-что прямая, проведенная чрезъ C параллельно къ AB, должна находиться въ плоскости, проходящей чрезъ AB и C, и извѣстно, что въ плоскости возможно провести чрезъ данную точку только одну параллельную къ данной прямой.

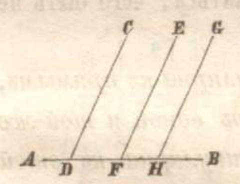
8. Слѣдствіе. *Двѣ прямыя* AB *и* CD, *произвольно взятыя въ пространствѣ, вообще не находятся въ одной плоскости.* Въ самомъ дѣлѣ, плоскость P, проведенная чрезъ AB и точку M, взятую на CD, вообще можетъ не содержать прямой CD, но будетъ ею пересѣчена. Въ этомъ случаѣ никакая плоскость не можетъ пройти чрезъ прямыя AB и CD, потому-что если бы существовала такая плоскость, то она содержала бы прямую AB и точку M, и слѣдовательно совмѣстилась бы съ плоскостью P; тогда прямая CD находилась бы также въ плоскости P; чего быть не можетъ.

Примѣчаніе. Плоскость, какъ поверхность неограниченная, не можетъ быть представлена на бумагѣ; а потому принято ее изображать параллелограмомъ или какимъ-нибудь многоугольникомъ, въ ней находящимся.

9. **Теорема.** *Параллельныя прямыя, пересѣкающія какую-нибудь прямую, находятся въ одной плоскости съ этой прямою.*

Параллельныя прямыя CD, EF, GH (фиг. 227) пересѣкаютъ прямую AB въ точкахъ D, F, H. Плоскость, проходящая чрезъ AB и CD, должна содержать точки F и H. По этой причинѣ и по параллельности прямыхъ CD, EF и GH плоскость, проходящая чрезъ AB и CD, должна содержать прямыя EF и GH.

Фиг. 227.



10. **Теорема.** *Пересѣченіе двухъ плоскостей есть прямая линія.*

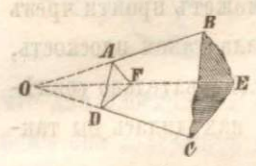
Если соединить прямою двѣ точки A и B, общія даннымъ плоскостямъ P и Q, то эта прямая всѣми точками должна находиться въ плоскости P и также въ плоскости Q. Такъ какъ эти плоскости не совмѣщаются, то вслѣдствіе теоремы (4) они не могутъ имѣть общей точки внѣ прямой AB. Отсюда слѣдуетъ, что плоскости P и Q пересѣкаются только по направленію прямой AB.

11. **Теорема.** *Прямыя пересѣченія трехъ плоскостей*

встрѣчаются въ одной точкѣ, или они параллельны между собою.

Плоскости ABCD и ABEF (фиг. 228) пересѣкаются по направленію AB, плоскости ABEF и DCEF пересѣкаются по направленію EF и плоскости ABCD и FECD пересѣкаются по направленію CD.

Фиг. 228.

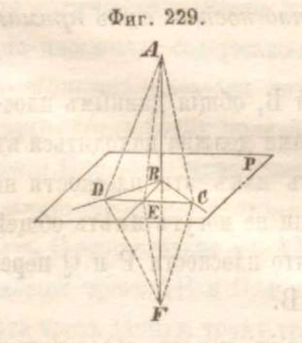


1) Точка O пересѣченія прямыхъ AB и DC должна находиться въ плоскостяхъ ABCD и ABEF, и она также должна лежать въ плоскостяхъ ABCD и FECD. Такъ какъ точка O принадлежитъ плоскостямъ ABEF и FECD, то она должна находиться на прямой EF ихъ пересѣченія. Отсюда слѣдуетъ, что прямыя AB, CD и EF пересѣкаются въ точкѣ O.

2) Если прямыя AB и CD (фиг. 228) параллельны, то и прямая EF должна быть къ нимъ параллельна. Въ самомъ дѣлѣ, допустивъ, что прямая EF пересѣкаетъ AB, мы узнаемъ по доказанному (11, 1), что прямая EF пересѣчетъ также прямую CD; а отсюда слѣдуетъ, что прямыя AB и CD должны пересѣкаться; чего быть не можетъ.

12. **Теорема.** *Если прямая перпендикулярна къ прямымъ, проведеннымъ чрезъ ея оконечную точку и въ одной и той-же плоскости, то она должна быть перпендикулярна къ этой плоскости.*

Фиг. 229.



Данная прямая AB (фиг. 229), пересѣкающая плоскость P въ точкѣ B, перпендикулярна къ прямымъ BC и BD, проведеннымъ въ плоскости P чрезъ точку B. Требуется доказать, что прямая AB перпендикулярна ко всякой прямой BE, проведенной въ плоскости P.

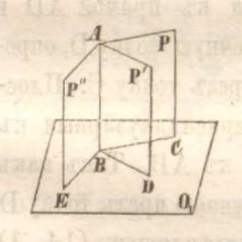
На продолженной прямой AB отложимъ BF = AB и, проведя прямую DC,

пересѣкающуюся съ прямыми BD, BE, BC, соединимъ точки D, E, C съ точками A и F. Треугольники ACD и FCD равны, потому-что сторона CD общая, CA = CF, какъ наклонныя относительно перпендикуляра CB, проходящаго чрезъ средину B прямой AF, и DA = DF по той-же причинѣ; слѣдовательно углы ACD и FCD, противолежащіе равнымъ сторонамъ, равны. Треугольники ACE и FCE равны, потому-что CA = CF, сторона CE общая и $\angle ACE = \angle FCE$; слѣдовательно AE = FE. Такъ какъ каждая изъ точекъ B и E равно отстоитъ отъ оконечныхъ точекъ прямой AF, то прямая BE должна быть перпендикулярна къ AF, и на оборотъ: прямая AF перпендикулярна къ BE; слѣдовательно прямая AF перпендикулярна къ плоскости P.

13. **Теорема.** *Перпендикуляры, возставленные изъ точки, данной на прямой, находятся въ плоскости, перпендикулярной къ этой прямой.*

Чрезъ AB (фиг. 230) проведя какія-нибудь плоскости P и P′, возставимъ въ нихъ перпендикуляры BC и BD изъ точки B къ прямой AB. Прямая AB, перпендикулярная къ прямымъ BC и BD, должна быть перпендикулярна къ плоскости Q, проходящей чрезъ эти прямыя (12). Проведемъ чрезъ AB еще плоскость P″, которая пересѣчетъ плоскость Q по направленію прямой BE. По перпендикулярности прямой AB къ плоскости Q, эта прямая должна быть перпендикулярна къ прямой BE; слѣдовательно если изъ точки B возставимъ перпендикуляръ къ AB въ плоскости P″, то онъ долженъ совмѣститься съ прямою BE и находиться въ плоскости Q.

Фиг. 230.

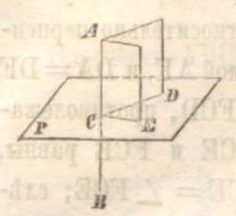


14. **Теорема.** *Чрезъ данную точку всегда можно провести плоскость перпендикулярно къ данной прямой, и притомъ только одну плоскость.*

1) Данная точка C (фиг. 231) находится на данной прямой AB.

Изъ точки C къ прямой AB возставимъ перпендикуляры CD и CE въ плоскостяхъ ACD и ACE. Плоскость P, проходящая чрезъ CD и CE, перпендикулярна къ AB, потому-что прямая AC перпендикулярна къ прямымъ CD и CE, проходящимъ въ плоскости P чрезъ основаніе C прямой AC (12). Всякая другая плоскость, проходящая чрезъ точку C, не перпендикулярна къ прямой AB, потому-что существуетъ только одна плоскость P, содержащая всѣ перпендикуляры, возставленные къ прямой AB изъ точки C (13).

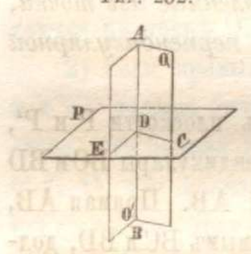
Фиг. 231.



2) Данная точка C (фиг. 232) находится внѣ данной прямой AB.

Изъ точки C опустимъ на AB перпендикуляръ CD въ плоскости Q, проходящей чрезъ AB и точку C. Въ какой-нибудь плоскости Q', проходящей чрезъ AB, возставимъ перпендикуляръ DE изъ точки D къ AB. Прямыя DC и DE, перпендикулярныя къ прямой AD и проходящія чрезъ ея оконечную точку D, опредѣляютъ плоскость P, которая должна пройти чрезъ точку C. Плоскость P, проведенная чрезъ прямыя DC и DE, перпендикулярныя къ AD въ точкѣ D, должна быть перпендикулярна къ AB. Такъ какъ плоскость P совмѣщается съ плоскостью, проведенною чрезъ точку D прямой AB перпендикулярно къ AB, то по предъидущему (14, 1) мы заключаемъ, что чрезъ точку C можно провести только одну плоскость перпендикулярно къ AB.

Фиг. 232.

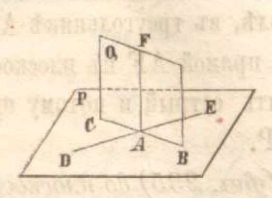


15. **Теорема**. *Чрезъ данную точку всегда можно провести перпендикуляръ къ данной плоскости, и притомъ не больше одного перпендикуляра.*

1) Данная точка A (фиг. 233) находится въ плоскости P.

Чрезъ точку A проведемъ въ плоскости P какую-нибудь прямую DE и чрезъ эту-же точку перпендикулярно къ DE проведемъ плос-

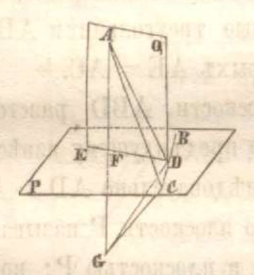
Фиг. 233.



кость Q (14), пересѣкающуюся съ плоскостью P по направленію прямой BC. Прямая AF, проведенная чрезъ A въ плоскости Q перпендикулярно къ BC, перпендикулярна также къ плоскости P. Въ самомъ дѣлѣ, прямая DE, перпендикулярная къ плоскости Q, также перпендикулярна къ AF; слѣдовательно прямая AF, перпендикулярная къ прямымъ BC и DE плоскости P, должна быть перпендикулярна къ этой плоскости (12). Всякая другая прямая, проведенная чрезъ A въ плоскости Q или внѣ ея, будетъ наклонная, по крайней мѣрѣ, къ одной изъ прямыхъ BC и DE; слѣдовательно она не перпендикулярна къ плоскости P.

Данная точка A (фиг. 234) находится внѣ данной плоскости P.

Фиг. 234.



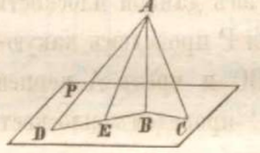
Въ плоскости P проведемъ какую-нибудь прямую BC и чрезъ A перпендикулярно къ BC проведемъ плоскость Q (14), пересѣкающуюся съ плоскостью P по направленію прямой DE. Прямая AF, проведенная чрезъ A перпендикулярно къ DE, также перпендикулярна ко всякой прямой FC, проведенной въ плоскости P. Для доказательства этой перпендикулярности отложимъ FG = AF на продолженной прямой AF и проведемъ прямыя AD, AC, GD и GC. По перпендикулярности прямой DC къ плоскости Q, углы ADC и GDC должны быть прямые. Потомъ треугольники ADC и GDC равны, потому-что сторона DC общая, ∠ ADC = ∠ GDC и AB = GB, какъ наклонныя, равно-отстоящія отъ основанія перпендикуляра DF; слѣдовательно AC = GC и ACG равнобедренный треугольникъ, въ которомъ прямая CF, соединяющая его вершину C съ срединою основанія AG, должна быть перпендикулярна къ AG. Отсюда слѣдуетъ, что прямая AG перпендикулярна къ плоскости P.

Всякая другая прямая AC, проведенная отъ A до плоскости P, есть наклонная къ этой плоскости. Въ самомъ дѣлѣ, въ треугольникѣ AFC уголъ AFC прямой по перпендикулярности прямой AF къ плоскости P; слѣдовательно уголъ ACF долженъ быть острый и потому прямая AC не перпендикулярна къ плоскости P.

16. **Теорема**. *Если отъ точки* A *(фиг. 235) до плоскости* P *проведены перпендикуляръ* AB *и наклонныя* AC, AD *и т. д., то 1) перпендикуляръ короче всякой наклонной, 2) двѣ наклонныя, равно-отстоящія отъ основанія перпендикуляра, равны, и 3) всякая наклонная тѣмъ длиннѣе, чѣмъ дальше онѣ отстоитъ отъ основанія перпендикуляра.*

1) Въ плоскости ABC проведены къ прямой BC перпендикуляръ AB и наклонная AC; слѣдовательно по предъидущему AB < AC.

Фиг. 235.



2) Отложивъ BE = BC и проведя AE, получимъ равные треугольники ABE и ABC, въ которыхъ AE = AC.

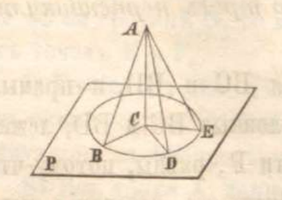
3) Въ плоскости ABD разстояніе BD > BE, а потому также AD > AE. По предъидущему извѣстно, что при BC = BE наклонная AC = AE; слѣдовательно AD > AC.

Примѣчаніе. Разстояніемъ точки A до плоскости P называется кратчайшая прямая, проведенная между A и плоскостью P; но эта кратчайшая прямая есть перпендикуляръ, опущенный изъ точки A на плоскость P; слѣдовательно этимъ перпендикуляромъ выражается разстояніе между точкою A и плоскостью P.

17. Слѣдствіе. Основанія C и E двухъ равныхъ наклонныхъ AC и AE (фиг. 235), проведенныхъ отъ точки A до плоскости P, равно-отстоятъ отъ основанія B перпендикуляра AB, опущеннаго изъ точки A на плоскость P; слѣдовательно геометрическое мѣсто основаній равныхъ наклонныхъ AB, AD, AE (фиг. 236) проведенныхъ отъ точки A до плоскости P, есть окружность круга, центръ которой совпадаетъ съ основаніемъ C перпендикуляра AC, опущеннаго изъ

А на плоскость Р. Отсюда выводится весьма простое рѣшеніе задачи: изъ данной точки А опустить перпендикуляръ на плоскость. Опредѣливъ на плоскости Р три точки B, D, E, равно-отстоящія отъ точки А, найдемъ центръ С окружности, проходящей чрезъ точки B, D, E, и наконецъ соединимъ точки А и С прямою АС.

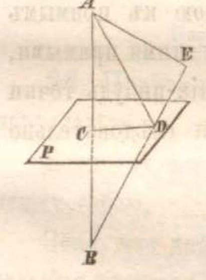
Фиг. 236.



18. **Теорема.** *Если чрезъ средину* С *прямой* АВ *(фиг. 237), проведена плоскость* Р *перпендикулярно къ этой прямой, то 1) всякая точка плоскости* Р *равно-отстоитъ отъ оконечныхъ точекъ прямой* АВ, *и 2) всякая точка, лежащая внѣ плоскости* Р, *не равно-отстоитъ отъ тѣхъ-же точекъ.*

1) Дана точка D въ плоскости Р. Проведя прямыя AD, BD, CD, мы замѣчаемъ, что прямая CD проведена въ плоскости ADB перпендикулярно къ АВ чрезъ средину С этой прямой; слѣдовательно точка D прямой CD равно-отстоитъ отъ оконечныхъ точекъ прямой АВ.

Фиг. 237.



2) Точку Е, данную внѣ плоскости Р, соединимъ съ точками А и В прямыми ЕА и ЕВ. Плоскость АЕВ пересѣкаетъ плоскость Р по направленію прямой CD, проведенной перпендикулярно къ АВ чрезъ средину этой прямой; слѣдовательно точка Е, находящаяся внѣ перпендикуляра CD, неравно-отстоитъ отъ оконечныхъ точекъ прямой АВ.

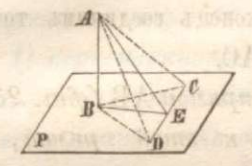
19. Слѣдствіе. Геометрическое мѣсто точекъ пространства, равно-отстоящихъ отъ двухъ данныхъ точекъ, есть плоскость, проведенная перпендикулярно къ прямой, соединяющей данныя точки, и проходящая чрезъ средину этой прямой.

20. **Теорема.** *Если чрезъ основаніе* В *перпендикуляра* АВ, *опущеннаго на плоскость* Р *(фиг. 238), проведена прямая* ВЕ *перпендикулярно къ прямой* CD, *лежащей въ плоскости* Р, *то*

прямая EA, *соединяющая основаніе* E *перпендикуляра* BE *съ какою-нибудь точкою* A *перпендикуляра* AB, *должна быть перпендикулярна къ прямой* DC. *(Теорема о трехъ перпендикулярахъ).*

Отложивъ EC = ED, проведемъ прямыя BC и BD, и прямыя AC и AD. Наклонныя BC и BD, лежащія въ плоскости P, равны, потому-что они равно отстоятъ отъ основанія перпендикуляра BE; слѣдовательно наклонныя AC и AD, равно-отстоящія отъ перпендикуляра AB, также равны. Отсюда мы заключаемъ, что ADC равнобедренный треугольникъ, въ которомъ прямая AE, соединяющая его вершину A съ срединою E основанія CD, должна быть перпендикулярна къ DC.

Фиг. 238.



Изъ этой теоремы слѣдуетъ, что плоскость ABE перпендикулярна къ прямой CD.

21. Слѣдствіе. Прямою BE, перпендикулярною къ прямымъ AB и CD, выражается кратчайшее разстояніе между этими прямыми, потому-что всякая прямая AD, соединяющая двѣ какія-нибудь точки A и D прямыхъ AB и CD, больше прямой AE и слѣдовательно больше прямой BE.

ТЕОРЕМЫ И ЗАДАЧИ.

1) Чрезъ точку C, данную внѣ прямой AB, провести плоскость перпендикулярно къ этой прямой.

2) Если прямой уголъ ABC обращается около прямой AB, то прямая BC опишетъ плоскость, перпендикулярную къ прямой AB.

3) Если прямая AC составляетъ равные углы съ прямыми CB, CD, CE (фиг. 236), лежащими въ одной плоскости, то эта прямая перпендикулярна къ плоскости.

4) Чрезъ данную точку A провести прямую такимъ образомъ, чтобы она пересѣкалась съ прямыми BC и DE, не лежащими въ одной плоскости.

5) Найти кратчайшее разстояніе между данными прямыми AB и CD, не лежащими въ одной плоскости.

6) Если плоскость треугольника ABC перпендикулярна къ прямой EF въ ея срединѣ G, то каждая изъ вершинъ A, B, C равно-отстоитъ отъ точекъ E и F.

7) Геометрическое мѣсто точекъ пространства, равно-отстоящихъ отъ оконечностей прямой AB, есть плоскость, проведенная перпендикулярно къ AB чрезъ средину этой прямой.

8) Изъ точки A, данной въ плоскости P, возставить перпендикуляръ къ этой плоскости.

9) Найти геометрическое мѣсто точекъ плоскости P, равно отстоящихъ отъ двухъ точекъ A и B. лежащихъ внѣ этой плоскости.

10) Провести плоскость перпендикулярно къ плоскости P такимъ образомъ, чтобы она содержала прямую AB, данную внѣ плоскости P.

ВТОРАЯ ГЛАВА.

Параллельность плоскостей и прямыхъ линій.

22. Прямая линія, никогда невстрѣчающаяся съ плоскостью, параллельна къ этой плоскости.

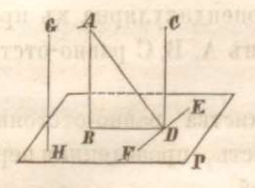
Если двѣ плоскости никогда не встрѣчаются, то они параллельны между собою.

Зная, что двѣ пересѣкающіяся прямыя (6) и также двѣ параллельныя прямыя (7) опредѣляютъ плоскость, мы заключаемъ, что двѣ прямыя, не лежащія въ одной плоскости, не могутъ встрѣтиться и не могутъ быть параллельны между собою. Отсюда слѣдуетъ: чтобы узнать, будутъ ли двѣ непересѣкающіяся прямыя параллельны, должно узнать, находятся-ли они въ одной плоскости.

23. **Теорема.** *Если двѣ прямыя параллельны между собою, то всякая плоскость, проведенная перпендикулярно къ одной изъ нихъ, должна быть перпендикулярна и къ другой параллельной.*

Даны параллельныя прямыя AB и CD (фиг. 239) и перпендикулярно къ AB проведена плоскость P.

Фиг. 239.



Плоскость Q, проведенная чрезъ прямыя AB и CD, пересѣкаетъ плоскость P по направленію прямой BD; тогда прямая AB, перпендикулярная къ плоскости P, должна быть перпендикулярна къ BD; слѣдовательно прямая CD, параллельная къ AB, также перпендикулярна къ прямой BD. Въ плоскости P проведемъ чрезъ D прямую EF перпендикулярно къ BD и соединимъ прямою DA точку D съ какою-нибудь точкою A прямой AB; тогда вслѣдствіе теоремы (20) прямая EF перпендикулярна къ AD и слѣдовательно (12) она перпендикулярна къ плоскости Q. Такъ какъ прямая CD проведена въ плоскости Q чрезъ точку D, то эта прямая должна быть перпендикулярна къ EF, а по перпендикулярности прямой CD къ прямымъ BD и EF, прямая CD перпендикулярна къ плоскости P, содержащей прямыя BD и EF.

24. **Теорема.** *Двѣ прямыя, перпендикулярныя къ одной и той-же плоскости, параллельны между собою.*

Прямыя AB и CD (фиг. 239) перпендикулярны къ плоскости P. Если чрезъ точку D пересѣченія плоскости P съ прямою CD провести прямую параллельно къ AB, то эта прямая должна быть перпендикулярна къ плоскости P (23); слѣдовательно проведенная прямая должна совмѣститься съ прямою CD.

25. Слѣдствіе. Двѣ прямыя AB и CD (фиг. 239), параллельныя къ третьей прямой GH, параллельны между собою. Въ самомъ дѣлѣ, плоскость P, проведенная перпендикулярно къ прямой GH, должна быть (23) перпендикулярна къ прямымъ AB и CD, а по перпендикулярности плоскости P къ прямымъ AB и CD (24), эти прямыя должны быть параллельны между собою.

26. **Теорема.** *Прямая CD (фиг. 240), параллельная къ*

прямой AB, *лежащей въ плоскости* P, *должна быть параллельна къ этой плоскости.*

Плоскость Q, проходящая чрезъ параллельныя прямыя AB и CD, пересѣкаетъ плоскость P по направленію прямой AB. Такъ какъ прямая CD, лежащая въ плоскости Q, параллельна къ прямой AB пересѣченія плоскостей P и Q, то прямая CD не встрѣтится съ плоскостью P.

Фиг. 240.

27. **Теорема.** *Если чрезъ прямую* CD *(фиг. 240), параллельную къ плоскости* P, *проведена плоскость* Q, *то прямая* AB *пересѣченія плоскостей* P *и* Q *должна быть параллельна къ прямой* CD.

Прямыя AB и CD не могутъ встрѣтиться, потому-что прямая CD параллельна къ плоскости P, содержащей прямую AB. Такъ какъ прямыя AB и CD не пересѣкаются и кромѣ того находятся въ одной и той-же плоскости, то они параллельны между собою.

28. Слѣдствіе. Если прямая CD (фиг. 240) параллельна къ плоскости P, то прямая, проведенная чрезъ точку A плоскости P параллельно къ CD, должна находиться въ плоскости P. Въ самомъ дѣлѣ, плоскость, проходящая чрезъ CD и точку A, пересѣкаетъ плоскость P по направленію прямой AB, параллельной къ CD, потому-что прямая CD параллельна къ плоскости P (27).

29. **Теорема**. *Параллельныя прямыя* AC *и* BD *(фиг. 240), заключающіяся между плоскостью* P *и прямою* CD, *параллельною къ этой плоскости, равны между собою.*

По предъидущему (27) плоскость ABDC, проходящая чрезъ прямыя AC и BD, пересѣкаетъ плоскость P по направленію прямой AB, параллельной къ CD; а вслѣдствіе теоремы (63, I) параллельныя прямыя AC и BD, заключающіяся между параллельными прямыми AB и CD, должны быть равны.

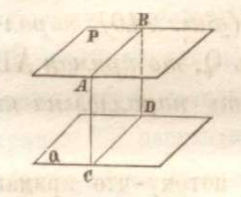
30. Слѣдствіе. Всѣ точки прямой CD (фиг. 240), параллельной къ плоскости P, равно-отстоятъ отъ этой плоскости. Въ самомъ

дѣлѣ, если изъ точекъ C и D данной прямой опустимъ перпендикуляры CA и DB на плоскость P, то вслѣдствіе теоремы (24) эти прямыя параллельны между собою и вслѣдствіе теоремы (28) они равны между собою.

31. **Теорема.** *Прямыя пересѣченія двухъ параллельныхъ плоскостей третьею плоскостію параллельны между собою.*

Прямая AB (фиг. 241) пересѣченія плоскостей P и ABDC, находящаяся въ плоскости P, не можетъ пересѣкаться съ прямою CD пересѣченія плоскостей Q и ABDC, находящеюся въ плоскости Q, потому-что плоскости P и Q параллельны. Такъ какъ прямыя AB и CD не пересѣкаются и находятся въ одной и той-же плоскости ABDC, то они параллельны между собою.

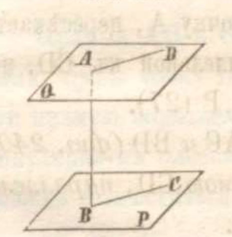
Фиг. 241.



32. **Теорема.** *Прямая, перпендикулярная къ одной изъ двухъ параллельныхъ плоскостей, должна быть перпендикулярна и къ другой плоскости.*

Плоскости P и Q параллельны между собою, и прямая AB (фиг. 242) перпендикулярна къ плоскости P. Чрезъ основаніе A прямой AB проведемъ въ плоскости Q какую-нибудь прямую AD. Плоскость, проходящая чрезъ AB и AD, пересѣкаетъ плоскость P по направленію прямой BC, параллельной къ AD (30). По перпендикулярности прямой AB къ плоскости P, эта прямая должна быть перпендикулярна къ прямой BC, а по параллельности прямыхъ AD и BC, прямая AB также перпендикулярна къ AD. Точно также доказывается, что прямая AB перпендикулярна еще къ какой-нибудь прямой, проведенной въ плоскости Q чрезъ A; слѣдовательно плоскость Q перпендикулярна къ AB.

Фиг. 242.



33. Слѣдствіе. Плоскости P и Q (фиг. 242), перпендикулярныя къ прямой AB, параллельны между собою. Въ самомъ дѣлѣ, если

плоскости P и Q имѣли бы хоть одну только общую точку M, то представилась бы возможность провести чрезъ одну и ту-же точку двѣ плоскости перпендикулярно къ прямой (14).

34. Слѣдствiе. Геометрическое мѣсто прямыхъ, проведенныхъ чрезъ одну и ту-же точку A (фиг. 242) параллельно къ плоскости P, есть плоскость, параллельная къ плоскости P. Чрезъ A проведемъ какую-нибудь прямую AD и изъ этой-же точки опустимъ перпендикуляръ AB на плоскость P. Плоскость, проходящая чрезъ прямыя AB и AD, пересѣкаетъ плоскость P по направленiю прямой BC, параллельной AD (27); слѣдовательно параллельныя прямыя AD и BC перпендикулярны къ прямой AB. Отсюда мы заключаемъ, что всѣ прямыя, проведенныя чрезъ точку A, параллельно къ плоскости P, перпендикулярны къ прямой AB. На оборотъ: всякая прямая AD, перпендикулярная къ AB, параллельна къ плоскости P. Въ самомъ дѣлѣ, плоскость, проходящая чрезъ прямыя AB и AD, пересѣкаетъ плоскость P по направленiю прямой BC, перпендикулярной къ AD; слѣдовательно прямая AD параллельна къ BC и потому она параллельна къ плоскости P. Отсюда мы заключаемъ, что всѣ прямыя, проведенныя чрезъ A параллельно къ плоскости P, находятся въ плоскости, перпендикулярной къ AB.

35. Слѣдствiе. Двѣ плоскости P и Q, параллельныя къ третьей плоскости M, параллельны между собою. Въ самомъ дѣлѣ, прямая AB, перпендикулярная къ плоскости M, должна быть перпендикулярна также къ плоскостямъ P и Q (32), а если прямая AB перпендикулярна къ плоскостямъ P и Q, то они параллельны между собою.

Фиг. 243.

36. **Теорема.** *Параллельныя прямыя* AC *и* BD *(фиг. 243), заключающiяся между параллельными плоскостями* P и Q, *равны.*

Плоскость, проходящая чрезъ прямыя AC и BD, пересѣкаетъ плоскости P и Q по направленiю прямыхъ AB и CD, которыя дол-

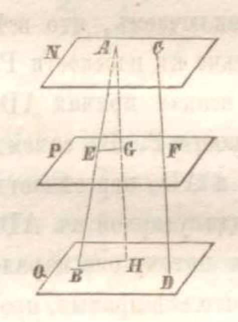
жны быть параллельны (31). Отсюда слѣдуетъ, что четыреугольникъ ABDC параллелограмъ и AC = BD.

37. Слѣдствіе. Разстоянія между параллельными плоскостями P и Q равны, потому-что перпендикуляры AC и BD (фиг. 243), опущенные на плоскость Q изъ какихъ-нибудь точекъ A и B плоскости P, параллельны (24) и слѣдовательно равны (36).

38. **Теорема.** *Двѣ прямыя разсѣкаются тремя параллельными плоскостями на части пропорціональныя.*

Параллельныя плоскости N, P, Q (фиг. 244) раздѣляютъ данныя прямыя AB и CD на части AE, EB и CF, FD. Чрезъ точку A проведемъ прямую AH параллельно къ CD, и чрезъ прямыя AB и AH плоскость ABH, пересѣкающуюся съ плоскостями P и Q по направленію прямыхъ EG и BH, параллельныхъ между собою (31).

Фиг. 244.

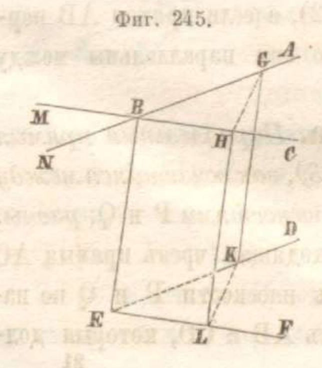


Вслѣдствіе теоремы (36, II) изъ треугольника ABH получимъ $\frac{AE}{EB} = \frac{AG}{GH}$; но по предъидущему (36) AG = CF и GH = FD, слѣдовательно $\frac{AE}{EB} = \frac{CF}{FD}$.

39. **Теорема.** *Если стороны двухъ угловъ соотвѣтственно параллельны, то 1) углы равны или они взаимно дополняются до двухъ прямыхъ угловъ, и 2) плоскости угловъ параллельны.*

1) Углы ABC и DEF (фиг. 245), стороны которыхъ соотвѣтственно параллельны и имѣютъ одинаковое направленіе, равны.

Фиг. 245.



Сдѣлавъ BG = EK и BH = EL, проведемъ прямыя BE, GK, HL, GH и KL. Четыреугольникъ BEKG, въ которомъ противолежащія стороны BG и EK равны и параллельны, есть параллелограмъ; слѣ-

довательно прямыя BE и GK также равны и параллельны. Подобнымъ образомъ доказывается, что четыреугольникъ BELH есть параллелограмъ; слѣдовательно прямыя BE и HL равны и параллельны. По равенству и параллельности прямыхъ BE и GK, и прямыхъ BE и HL, мы узнаемъ, что прямыя HL и GK равны и параллельны, и HGKL параллелограмъ; слѣдовательно прямыя HG и LK также равны и параллельны. Наконецъ треугольники BGH и EKL равны (I, 40) и слѣдовательно $\angle$ GBH $= \angle$ KEL.

Углы MBN и DEF, стороны которыхъ соотвѣтственно параллельны, но имѣютъ неодинаковое направленіе (I, 66), равны.

Углы ABM и DEF, у которыхъ параллельныя стороны BA и ED имѣютъ одинакое направленіе, а параллельныя стороны BM и EF имѣютъ неодинаковое направленіе, взаимно-дополняются до двухъ прямыхъ угловъ.

2) Прямыя AB и BC соотвѣтственно параллельны къ прямымъ DE и EF; слѣдовательно прямыя AB и BC параллельны къ плоскости DEF (26) и также плоскость ABC параллельна къ плоскости DEF (34).

Примѣчаніе. Угломъ двухъ прямыхъ, не лежащихъ въ одной плоскости, называется уголъ, составляемый прямыми, проведенными чрезъ одну и ту-же точку въ пространствѣ параллельно къ даннымъ прямымъ.

ТЕОРЕМЫ И ЗАДАЧИ.

11) Чрезъ прямую AB провести плоскость параллельно къ данной прямой CD.

12) Чрезъ точку A, данную внѣ плоскости P, провести прямую параллельно къ этой плоскости.

13) Чрезъ точку A, лежащую внѣ плоскости P, провести плоскость параллельно къ плоскости P.

14) Прямая AB и плоскость P, перпендикулярныя къ одной и той же прямой CD, параллельны между собою.

15) Чрезъ данную точку A провести плоскость параллельно къ даннымъ прямымъ BC и DE, не лежащимъ въ одной плоскости.

16) Прямая AB пересѣченія двухъ плоскостей P и Q, проведенныхъ чрезъ параллельныя прямыя CD и EF: плоскость P чрезъ CD и плоскость Q чрезъ EF, параллельна къ этимъ прямымъ.

17) Прямая AB пересѣченія двухъ плоскостей, проведенныхъ параллельно къ прямой CD, должна быть параллельна къ CD.

18) Къ данной прямой AB провести параллельную такимъ образомъ, чтобы она пересѣкала двѣ прямыя CD и EF, не лежащія въ одной плоскости.

19) Найти геометрическое мѣсто точекъ пространства, которыхъ разстоянія отъ двухъ параллельныхъ плоскостей P и Q были бы пропорціональны прямымъ m и n.

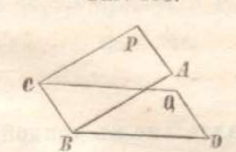
20) Найти геометрическое мѣсто точекъ пространства, для которыхъ разность квадратовъ разстояній отъ двухъ данныхъ точекъ равнялась бы одной и той же величинѣ.

ТРЕТЬЯ ГЛАВА.

О двугранномъ углѣ. Прямой двугранный уголъ. Плоскій уголъ, соотвѣтствующій двугранному углу. Отношеніе двугранныхъ угловъ равно отношенію соотвѣтствующихъ имъ плоскихъ угловъ. Перпендикулярныя плоскости. Проекція прямой линіи на плоскости.

40. Двѣ плоскости P и Q, проходящія чрезъ прямую BC (фиг. 246) и ограниченныя этою прямою, образуютъ *двугранный уголъ*. Плоскости P и Q называются *гранями* двуграннаго угла, а прямая BC называется его *ребромъ*. Двугранный уголъ означается четырьмя буквами такимъ образомъ, чтобы двѣ буквы стояли у ребра, а по одной буквѣ на каждой грани. Двугранный уголъ, изображенный въ фиг. 246, означенъ чрезъ ABCD или чрезъ DBCA. Буквы, которыми означенъ двугранный уголъ, произносятся въ такомъ порядкѣ, чтобы поставленныя у ребра, пришлись между буквами, стоящими на граняхъ.

Фиг. 246.



Представимъ себѣ плоскости P и Q совмѣщенными, и потомъ предположимъ, что плоскость P обращается около прямой BC, а плоскость Q остается неподвижною. Величиною обращенія плоскости P, или на сколько эта плоскость при ея обращеніи удалилась отъ плоскости Q, выражается величина двуграннаго угла, составляемаго плоскостями P и Q, т. е. величина двуграннаго угла тѣмъ больше, чѣмъ больше плоскость P удалилась отъ плоскости Q, и на оборотъ: тѣмъ меньше, чѣмъ меньше обращеніе плоскости P; наконецъ этотъ уголъ равенъ нулю при совмѣщеніи плоскостей P и Q. Отсюда слѣдуетъ, что величина двуграннаго угла не зависитъ отъ величины плоскостей P и Q.

41. Двугранные углы MABN и MABP (фиг. 247), имѣющіе общую грань MAB, общее ребро AB и грани NAB и PAB, составляющія одну плоскость NP, называются *смежными* двугранными углами.

Фиг. 247.

Двугранные углы MABN и PBAQ, у которыхъ общее ребро и грани одного изъ нихъ суть продолженія граней другаго, называются *противоположными* двугранными углами.

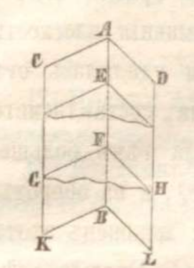
Если ребро и грани одного двуграннаго угла совмѣщаются съ ребромъ и гранями другаго двуграннаго угла, то эти двугранные углы *равны*.

Двѣ пересѣкающіяся плоскости *взаимно-перпендикулярны*, если смежные углы, составляемые этими плоскостями, равны. Двугранный уголъ, который равенъ своему смежному двугранному углу, называется *прямымъ* двуграннымъ угломъ.

42. **Теорема**. *Если чрезъ двѣ какія-нибудь точки* B *и* F *ребра* AB *(фиг. 248) двуграннаго угла* CABD *провести плоскости* FGH *и* BKL *перпендикулярно къ ребру* AB, *то углы* GFH *и* KBL, *образуемые прямыми пересѣченія этихъ плоскостей съ гранями* ABC *и* ABD, *должны быть равны*.

Плоскости FGH и BKL, перпендикулярныя къ одной и той-же прямой AB, параллельны между собою (33), и вслѣдствіе теоремы (31) прямыя FG и BK пересѣченія этихъ плоскостей съ гранью ABC должны быть параллельны; по той-же причинѣ прямыя FH и BL параллельны; слѣдовательно по предъидущему (39) углы GFH и KBL равны.

Фиг. 248.

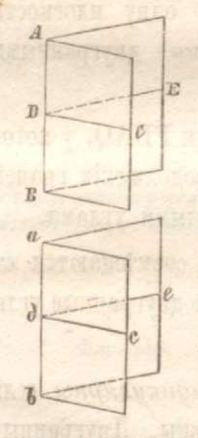


Уголъ GFH, стороны котораго перпендикулярны къ ребру AB, называется *плоскимъ угломъ двуграннаго угла* CABD.

43. **Теорема**. *Два двугранные угла, коихъ плоскіе углы равны, также должны быть равны.*

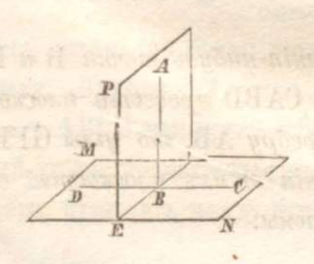
Наложимъ (фиг. 249) уголъ *cde* на уголъ CDE такимъ образомъ, чтобы стороны *cd* и CD, и также стороны *de* и DE совмѣстились; тогда ребро AB, перпендикулярное къ плоскости CDE (12), совпадетъ съ ребромъ *ab*, перпендикулярнымъ къ плоскости *cde*. По совмѣщенію прямыхъ *ab* и AB, и прямыхъ *cd* и CD, слоскость *abc* совмѣстится съ плоскостью ABC; точно такъ по совмѣщенію прямыхъ *ab* и AB, и прямыхъ *de* и DE, плоскость *abe* совпадетъ съ плоскостью ABE; слѣдовательно (41) двугранные углы *cabe* и CABE равны.

Фиг. 249.



44. Слѣдствіе. Даны двѣ взаимно-перпендикулярныя плоскости P и MN (фиг. 250), пересѣкающіяся по направленію прямой EB. Чрезъ какую-нибудь точку B прямой EB проведемъ въ плоскостяхъ P и MN прямыя AB и DC перпендикулярно къ EB. Тогда по перпендикулярности прямыхъ AB и DC, смежные плоскіе углы ABC и ABD, соотвѣтствующіе двуграннымъ угламъ

фиг. 250.

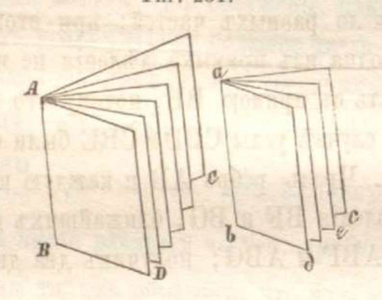


AEBN и AEBM, прямые; слѣдовательно эти двугранные углы также прямые.

45. **Теорема.** *Двугранные углы относятся между собою точно такъ, какъ относятся соотвѣтствующіе имъ плоскіе углы.*

1) Предположимъ, что плоскіе углы CBD и *cbd* (фиг. 251), соотвѣтствующіе даннымъ двуграннымъ угламъ CABD и *cabd*, соизмѣримы, и что ихъ общая мѣра *cbe* содержится 5 разъ въ углѣ CBD и 3 раза въ углѣ *cbd*; т. е. $\angle \text{CBD} = 5 \angle cbe$, $\angle cbd = 3 \angle cbe$ и

Фиг. 251.



$$\frac{\text{CBD}}{cbd} = \frac{5cbe}{3cbe} \text{ или } \frac{\text{CBD}}{cbd} = {}^5/_3.$$

Проведемъ плоскости чрезъ ребро *ab* и каждую изъ прямыхъ, раздѣляющихъ уголъ *cbd* на 3 равныя части; этими плоскостями раздѣлится двугранный уголъ *cabd* на три равные двугранные угла *cabe* (43); слѣдовательно $\angle cabd = 3 \angle cabe$. Потомъ проведемъ плоскости чрезъ ребро AB и каждую изъ прямыхъ, раздѣляющихъ уголъ CBD на 5 равныхъ частей; этими плоскостями раздѣлится двугранный уголъ CABD на 5 равныхъ двугранныхъ *cabe* (43); слѣдовательно $\angle \text{CABD} = 5 \angle cabe$. Для данныхъ двугранныхъ составится отношеніе

$$\frac{\text{CABD}}{cabd} = \frac{5cabe}{3cabe} \text{ или } \frac{\text{CABD}}{cabd} = {}^5/_3.$$

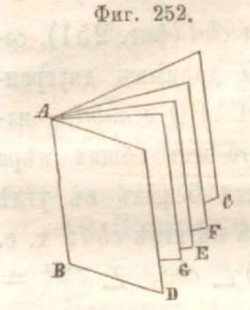
Такъ какъ отношеніе между данными двугранными углами равно отношенію между соотвѣтствующими имъ плоскими углами, то по предъидущему (II, 7) составится пропорція

$$\frac{\text{CABD}}{cabd} = \frac{\text{CBD}}{cbd} \ldots\ldots (1).$$

2) Предположимъ, что плоскіе углы CBD и *cbd*, соотвѣтствующіе даннымъ двуграннымъ угламъ, несоизмѣримы, и докажемъ, что

выше-выведенная пропорція также справедлива для этого случая. Для этого наложимъ двугранный уголъ *cabd* на двугранный уголъ CABD такимъ образомъ, чтобы ребро *ab* совпало съ ребромъ AB и плоскость *abc* совмѣстилась съ плоскостью ABC; тогда плоскость *abd* приметъ положеніе ABE (фиг. 252) и образовавшійся двугранный

Фиг. 252.



уголъ CABE равенъ данному двугранному углу *cabd*. Потомъ раздѣлимъ уголъ CBD на произвольное число равныхъ частей; при этомъ дѣленіи ни одна изъ прямыхъ дѣленія не можетъ совпасть съ прямою BE, потому-что въ противномъ случаѣ углы CBD и CBE были бы соизмѣримы. Чрезъ ребро AB и каждую изъ прямыхъ дѣленія BF и BG, ближайшихъ къ прямой BE, проведемъ плоскости ABF и ABG; получимъ два двугранныхъ угла

$$\text{CABF} < \text{CABE и CABG} > \text{CABE},$$

и отношенія

$$\frac{\text{CABD}}{\text{CABE}} < \frac{\text{CABD}}{\text{CABF}} \text{ и } \frac{\text{CABD}}{\text{CABE}} > \frac{\text{CABD}}{\text{CABG}} \ldots (1).$$

Такъ какъ углы CBD и CBF соизмѣримы и также углы CBD и CBG соизмѣримы, то по предъидущему получимъ пропорціи

$$\frac{\text{CABD}}{\text{CABF}} = \frac{\text{CBD}}{\text{CBF}} \text{ и } \frac{\text{CABD}}{\text{CABG}} = \frac{\text{CBD}}{\text{CBG}}.$$

Въ неравенствѣ (1) замѣнимъ отношенія $\frac{\text{CABD}}{\text{CABF}}$ и $\frac{\text{CABD}}{\text{CABG}}$ равными имъ отношеніями $\frac{\text{CBD}}{\text{CBF}}$ и $\frac{\text{CBD}}{\text{CBG}}$; получимъ

$$\frac{\text{CABD}}{\text{CABE}} < \frac{\text{CBD}}{\text{CBF}} \text{ и } \frac{\text{CABD}}{\text{CABE}} > \frac{\text{CBD}}{\text{CBG}} \text{ или}$$

$$\frac{\text{CBD}}{\text{CBF}} > \frac{\text{CABD}}{\text{CABE}} > \frac{\text{CBD}}{\text{CBG}} \ldots (2).$$

Такъ какъ $\angle$ CBF $<$ $\angle$ CBE и $\angle$ CBE $<$ $\angle$ CBG, то составятся отношенія

$$\frac{\text{CBD}}{\text{CBE}} < \frac{\text{CBD}}{\text{CBF}} \text{ и } \frac{\text{CBD}}{\text{CBE}} > \frac{\text{CBD}}{\text{CBG}} \text{ или}$$

$$\frac{\text{CBD}}{\text{CBF}} > \frac{\text{CBD}}{\text{CBE}} > \frac{\text{CBD}}{\text{CBG}} \ldots . (3).$$

Изъ неравенствъ (2 и 3) видно, что отношенія $\frac{\text{CABD}}{\text{CABE}}$ и $\frac{\text{CBD}}{\text{CBE}}$ находятся между тѣми-же самыми дробями $\frac{\text{CBD}}{\text{CBF}}$ и $\frac{\text{CBD}}{\text{CBG}}$, которыя могутъ быть сближены, какъ угодно. Въ самомъ дѣлѣ, раздѣливъ уголъ CBD на бо̀льшее число равныхъ частей, нежели онъ былъ раздѣленъ прежде, мы увеличимъ уголъ CBF и уменьшимъ уголъ CBG; вслѣдствіе чего отношеніе $\frac{\text{CBD}}{\text{CBF}}$ уменьшится и отношеніе $\frac{\text{CBD}}{\text{CBG}}$ увеличится. Раздѣленіемъ угла CBD на произвольно большое число равныхъ частей, дроби $\frac{\text{CBD}}{\text{CBF}}$ и $\frac{\text{CBD}}{\text{CBG}}$ могутъ быть сближены такимъ образомъ, что ихъ разность сдѣлается меньше всякой произвольно малой величины. Но какъ мала̀ ни была разность этихъ дробей, всегда должны находиться между ними отношенія $\frac{\text{CABD}}{\text{CABE}}$ и $\frac{\text{CBD}}{\text{CBE}}$; а извѣстно (II, 17): если между двумя величинами, которыхъ разность меньше всякой малой величины, заключаются двѣ другія величины, то послѣднія должны быть равны между собою; слѣдовательно

$$\frac{\text{CABD}}{\text{CABE}} = \frac{\text{CBD}}{\text{CBE}} \text{ или } \frac{\text{CABD}}{cabd} = \frac{\text{CBD}}{cbd}.$$

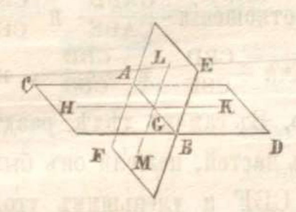
46. Слѣдствіе. Принявъ за единицу двугранныхъ угловъ такой двугранный уголъ, которому соотвѣтствуетъ плоскій уголъ, принятый за единицу плоскихъ угловъ, мы узнаемъ вслѣдствіе теоремы (45), что *всякій двугранный уголъ измѣряется соотвѣтствующимъ ему плоскимъ угломъ.* Такъ напримѣръ, если (фиг. 251) плоскій уголъ *cbd* равенъ 1° и плоскій уголъ CBD равенъ 27°, то двугранный уголъ CABD содержитъ также 27°.

47. **Теорема.** *Сумма двухъ смежныхъ двугранныхъ угловъ*

равна двумъ прямымъ двуграннымъ угламъ, и противоположные двугранные углы равны.

Чрезъ какую-нибудь точку G (фиг. 253) прямой AB пересѣченія плоскостей CD и EF проведемъ къ этой прямой перпендикуляръ HK въ плоскости CD и перпендикуляръ LM въ плоскости EF. Сумма смежныхъ плоскихъ угловъ LGH и LGK, соотвѣтствующихъ смежнымъ двуграннымъ угламъ CABE и DABE, равна двумъ прямымъ угламъ; слѣдовательно сумма этихъ двугранныхъ угловъ равна двумъ прямымъ двуграннымъ угламъ (46).

Фиг. 253.



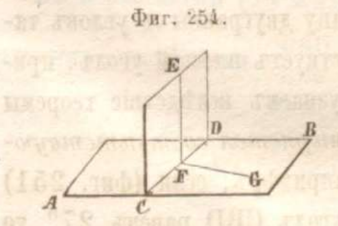
Плоскіе углы LGK и HGM, соотвѣтствующіе двуграннымъ угламъ DABE и CABF, равны; слѣдовательно эти двугранные углы также равны (43).

48. Слѣдствіе. 1) Если два двугранные угла равны, то и ихъ смежные двугранные углы равны. 2) Сумма двугранныхъ угловъ, расположенныхъ по одну сторону плоскости, равна двумъ прямымъ двуграннымъ угламъ. 3) Сумма двугранныхъ угловъ, расположенныхъ около общаго ребра, равна четыремъ прямымъ двуграннымъ угламъ.

49. **Теорема.** *Если прямая перпендикулярна къ плоскости, то всякая плоскость, проходящая чрезъ эту прямую, перпендикулярна къ данной плоскости.*

Прямая EF (фиг. 254) перпендикулярна къ данной плоскости AB. Чрезъ точку F пересѣченія прямой EF съ плоскостью AB проведемъ въ этой плоскости прямую FG перпендикулярно къ EF. По перпендикулярности этихъ прямыхъ плоскій уголъ EFG прямой; слѣдовательно (44) двугранный уголъ BCDE, которому соотвѣтствуетъ плоскій EFG, также прямой, и плоскость CDE перпендикулярна къ плоскости AB.

Фиг. 254.



50. Слѣдствіе. Прямая, проведенная чрезъ точку прямой пе-

ресѣченія двухъ перпендикулярныхъ плоскостей перпендикулярно къ одной изъ нихъ, должна находиться въ другой плоскости. Въ самомъ дѣлѣ, прямая, проведенная чрезъ точку F (фиг. 254) прямой CD перпендикулярно къ плоскости AB, должна совмѣститься съ прямою FE, проведенною въ плоскости CDE чрезъ ту-же точку F перпендикулярно къ CD, потому-что прямая FE также перпендикулярна къ плоскости AB.

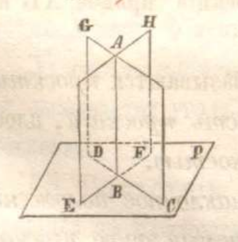
51. **Теорема**. *Если двѣ плоскости взаимно-перпендикулярны, то прямая, проведенная въ одной изъ нихъ перпендикулярно къ прямой ихъ пересѣченія, должна быть перпендикулярна къ другой плоскости.*

Въ плоскости CDE (фиг. 254) проведена прямая FE перпендикулярно къ прямой CD пересѣченія данныхъ перпендикулярныхъ плоскостей AB и CDE. Чрезъ точку F пересѣченія прямой EF съ плоскостью AB проведемъ въ этой плоскости прямую FG перпендикулярно къ CD. По перпендикулярности плоскостей CDE и AB, двугранный уголъ BCDE прямой, а потому соотвѣтствующій ему плоскій уголъ EFG также прямой, и прямая EF перпендикулярна къ FG. Такъ какъ прямая EF перпендикулярна къ двумъ прямымъ CD и FG, лежащимъ въ плоскости AB, то она перпендикулярна къ этой плоскости.

52. **Теорема.** *Прямая пересѣченія двухъ плоскостей, перпендикулярныхъ къ третьей плоскости, должна быть перпендикулярна къ этой плоскости.*

Перпендикуляръ, возставленный къ плоскости P (фиг. 255) изъ точки B пересѣченія данныхъ плоскостей EH CG, P, долженъ находиться въ плоскости CG (50); этотъ перпендикуляръ долженъ находиться также въ плоскости EH; слѣдовательно онъ находится на прямой пересѣченія плоскостей CG и EH, т. е. онъ совмѣщается съ прямою AB.

Фиг. 255.



53. **Теорема.** *Если три прямыя взаимно-перпендикулярны, то плоскости, проведенныя чрезъ двѣ изъ этихъ прямыхъ, взаимно-перпендикулярны.*

Прямая AB (фиг. 255) перпендикулярна къ CD и EF, и прямыя CD и EF взаимно-перпендикулярны. Прямая AB, перпендикулярная къ прямымъ CD и EF, перпендикулярна къ плоскости P, проходящей чрезъ эти прямыя; слѣдовательно (49) плоскости CG и EH, содержащія прямую AB, перпендикулярны къ плоскости P. По перпендикулярности прямой CD къ прямымъ EF и AB, прямая CD перпендикулярна къ плоскости EH; слѣдовательно плоскости P и CG перпендикулярны къ плоскости EH.

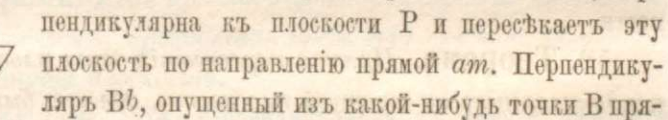
54. *Проекціею точки на плоскости* называется основаніе перпендикуляра, опущеннаго изъ точки на плоскость.

Проекціею какой-нибудь линіи на плоскости называется геометрическое мѣсто проекцій точекъ этой линіи на плоскости.

55. **Теорема.** *Проекція прямой линіи на плоскости есть прямая линія.*

Изъ какой-нибудь точки A (фиг. 256) данной прямой AB опу-

Фиг. 256.



стимъ перпендикуляръ Aa на плоскость P. Плоскость, проходящая чрезъ прямыя AB и Aa, перпендикулярна къ плоскости P и пересѣкаетъ эту плоскость по направленію прямой am. Перпендикуляръ Bb, опущенный изъ какой-нибудь точки B прямой AB на плоскость P, долженъ находиться (50) въ плоскости ABa; слѣдовательно его основаніе b упадетъ на прямую am пересѣченія плоскостей ABa и P, и прямая ab есть проекція прямой AB на плоскости P.

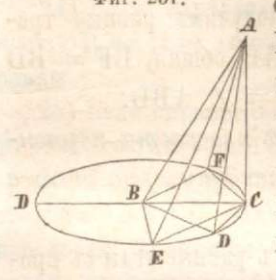
Примѣчаніе. Перпендикуляры Aa и Bb называются *проектирующими прямыми*, плоскость P есть *плоскость проекцій*, плоскость $ABba$ называется *проектирующею плоскостью*.

56. **Теорема.** *Если прямая имѣетъ наклонное положеніе относительно плоскости, то уголъ, составляемый этою прямою*

съ ея проекціею на плоскости, меньше всѣхъ угловъ, составляемыхъ ею-же съ прямыми, проведенными чрезъ ея основаніе въ той-же плоскости.

Изъ какой-нибудь точки A (фиг. 257) данной прямой AB опустимъ перпендикуляръ AC на плоскость P. Прямая BC, соединяющая основанія B и C прямыхъ AB и AC, есть проекція прямой AB на плоскости P. Требуется доказать, что уголъ ABC меньше угла ABD, составляемый данною прямою AB и прямою BD, проведенною въ плоскости P чрезъ основаніе B прямой AB.

Фиг. 257.



Сдѣлавъ BD = BC и проведя прямую AD, мы узнаемъ, что прямая AD, какъ наклонная къ плоскости P, больше перпендикуляра AC (16). Въ треугольникахъ ABC и ABD сторона AB общая, BC = BD, но AC < AD; слѣдовательно уголъ ABC, противолежащій меньшей сторонѣ AC, меньше угла ABD, противолежащаго бо́льшей сторонѣ AD (I, 39).

57. Слѣдствіе. Уголъ, составляемый наклонною AB съ прямою, проведенною въ плоскости P чрезъ основаніе B, тѣмъ больше, чѣмъ больше уголъ, составляемый этою проведенною прямою съ проекціею данной наклонной. Въ самомъ дѣлѣ, описавъ изъ B (фиг. 257) радіусомъ BC окружность и проведя радіусъ BE, получимъ ∠ CBE > ∠ CBD и хорда CE больше хорды CD; слѣдовательно (16, 3) наклонная AE больше наклонной AD. Въ треугольникахъ ABE и ABD сторона AB общая, BE = BD, но AE > AD; слѣдовательно уголъ ABE, противолежащій большей сторонѣ AE, больше угла ABD, противолежащаго меньшей сторонѣ AD.

Угломъ наклоненія прямой, проведенной наклонно къ плоскости, называется уголъ, составляемый прямою съ ея проекціею на этой плоскости.

58. Слѣдствіе. Если двѣ прямыя BD и BF (фиг. 257), проведенныя въ плоскости P, составляютъ равные углы CBD и CBF съ

проекціею BC наклонной AB, то эти прямыя образуютъ также равные углы ABD и ABF съ данною наклонною. Въ самомъ дѣлѣ, проведя прямую CF, получимъ равные треугольники BCF и BCD, потому-что сторона BC общая, BF = BD и ∠ CBF = ∠ CBD; слѣдовательно CF = CD. Проведя прямую AF, получимъ равные треугольники ABF и ABD, потому-что сторона AB общая, BF = BD и AF = AB (16, 2); слѣдовательно ∠ ABF = ∠ ABD.

59. **Теорема.** *Прямая, проведенная въ плоскости перпендикулярно къ проекціи данной прямой, перпендикулярна также къ самой прямой.*

Прямыя BD и BE (фиг. 258) составляютъ равные углы съ проекціею BC прямой AB, а потому (58) углы ABD и ABE, составляемые этими-же прямыми съ прямою AB, также равны. Такъ какъ эти равные углы суть смежные, то каждый изъ нихъ прямой и слѣдовательно прямая DE перпендикулярна къ AB.

Фиг. 258.

60. **Теорема.** *Если двѣ наклонныя составляютъ равные углы съ прямою, лежащею въ плоскости, то эти наклонныя составляютъ равные углы наклоненія съ тою-же плоскостью.*

Прямыя AB и AC (фиг. 259) составляютъ съ прямою BC равные углы ABC и ACB. Изъ A опустимъ перпендикуляръ AE на плоскость P и проведемъ прямыя BE и CE; эти прямыя суть проекціи прямыхъ AB и AC на плоскости P. Въ треугольникѣ ABC стороны AC и AB равны по равенству угловъ ABC и ACB. Треугольники ABE и ACE равны, потому-что сторона AE общая, AB = AC и BE = BC (16, 2); слѣдовательно ∠ ABE = ∠ ACE.

Фиг. 259.

ТЕОРЕМЫ И ЗАДАЧИ.

21) Чрезъ точку M, лежащую внѣ даннаго двуграннаго угла ABCD, провести плоскость перпендикулярно къ гранямъ ABC и DBC

22) Найти прямую, которой разстояніе отъ граней двуграннаго угла ABCD должно равняться данной прямой EF.

23) Внѣ плоскости P даны три точки A, B, C, не лежащія на одной прямой. Опредѣлить на этой плоскости точку, равно-отстоящую отъ данныхъ точекъ.

24) Если параллельныя прямыя AB, CD, EF разсѣчены плоскостью P, то углы, составляемые ими съ этою плоскостью, должны быть равны.

25) Если параллельныя плоскости M, P, Q разсѣчены прямою AB, то углы, составляемые ею съ данными плоскостями, равны.

26) Данъ четыреугольникъ ABCD, въ которомъ противолежащія стороны AB и DC, также стороны BC и AD, не находятся въ одной плоскости. Требуется доказать, что плоскость, проведенная параллельно къ прямымъ AD и BC, раздѣлитъ стороны AB и DC на пропорціональныя части.

27) На данной прямой MN найти такую точку, чтобы разность квадратовъ ея разстояній отъ точекъ A и B, лежащихъ внѣ прямой MN, равнялась данному квадрату.

28) Если двѣ плоскости M и P параллельны, и плоскость M перпендикулярна къ плоскости Q, то также плоскость P перпендикулярна къ плоскости Q.

29) Прямыя, выходящія изъ одной точки O, разсѣкаются параллельными плоскостями на пропорціональныя части.

30) Къ двумъ прямымъ AB и CD, не лежащимъ въ одной плоскости, провести перпендикулярную прямую.

31) Въ пространствѣ даны три прямыя AB, CD, EF. Требуется провести четвертую прямую такимъ образомъ, чтобы она пересѣкалась съ прямыми AB и CD, и была параллельна къ EF.

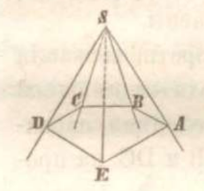
32) Чрезъ точку M требуется провести плоскость такимъ образомъ, чтобы она составляла равные углы съ данными прямыми AB, CD, EF.

ЧЕТВЕРТАЯ ГЛАВА.

Многогранные углы. Всякій плоскій уголъ многограннаго угла меньше суммы всѣхъ остальныхъ. Въ многогранномъ углѣ съ исходящими углами, сумма всѣхъ плоскихъ угловъ меньше четырехъ прямыхъ угловъ. Равенство трегранныхъ угловъ.

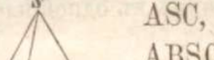
61. Плоскости SAB, SBC, SCD и т. д. (фиг. 260), пересѣкаясь по направленію прямыхъ SA, SB, SC и т. д., сходящихся въ одной точкѣ S, составляютъ *многогранный уголъ*. Плоскости SAB, SBC, SCD и т. д. суть *грани* многограннаго угла, прямыя SA, SB, SC и т. д. называются его *ребрами*, точка S ихъ пересѣченія называется его *вершиною* и углы ASB, BSC, CSD и т. д. суть *плоскіе углы* многограннаго угла. Для означенія многограннаго угла ставится буква у его вершины и по одной буквѣ на каждомъ ребрѣ; слѣдовательно въ (фиг. 260) начерченъ многогранный уголъ SABCDE.

Фиг. 260.



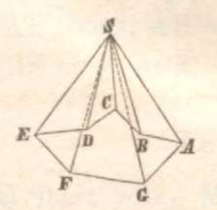
Тремя плоскостями, пересѣкающимися въ одной точкѣ, образуется трегранный уголъ. Всякій трегранный уголъ SABC (фиг. 261) содержитъ шесть элементовъ: три плоскіе угла ASB, ASC, BSC и три двугранные угла BASC, BCSA, ABSC.

Фиг. 261.



Если отъ разсѣченія граней многограннаго угла образуется многоугольникъ ABCDE (фиг. 260) съ исходящими углами, то этотъ многогранный уголъ называется *выпуклымъ*. Если-же образовавшійся многоугольникъ ABCDEFG (фиг. 262) содержитъ входящій уголъ, то многогранный уголъ называется *вогнутымъ*.

Фиг. 262.



Два многогранные угла съ одинакимъ числомъ граней равны, если ребра одного изъ нихъ возможно совмѣстить съ ребрами другаго.

62. **Теорема.** *Всякій плоскій уголъ многограннаго угла меньше суммы остальныхъ плоскихъ угловъ.*

1) Данъ трегранный уголъ SABC (фиг. 263), въ которомъ плоскій уголъ ASB больше угловъ ASC и BSC. Требуется доказать, что $\angle ASB > \angle ASC + \angle CSB$. Въ грани ASB построимъ $\angle ASD$, равный $\angle ASC$, и отложимъ $SD = SC$. Чрезъ точки C и D проведемъ плоскость, пересѣкающуюся съ ребрами SA и SB въ точкахъ A и B, и проведемъ прямыя AC, BC, AB. Треугольники ACS и ADS равны, потому-что сторона AS общая, $CS = DS$ по отложенію и $\angle ASC = \angle ASD$; слѣдовательно $AC = AD$. Такъ $AD + DB < AC + CB$ и $AD = AC$, то получится $DB < CB$. Въ треугольникахъ BDS и BCS сторона BS общая, $DS = CS$, но $DB < CB$; слѣдовательно $\angle BSD < \angle BSC$. Приложивъ эти неравные углы къ равнымъ угламъ ASD и ASC, получимъ $ASD + BSD < ASC + BSC$ или $ASB < ASC + BSC$.

Фиг. 263.

2) Чтобы доказать эту теорему для какого-нибудь многограннаго угла SABCDE (фиг. 264), разсѣчемъ этотъ уголъ на трегранные углы плоскостями SAC, SAD, проходящими чрезъ ребро SA и противоположныя ему ребра SC, SD. Тогда по предъидущему мы имѣемъ $ESD < ASE + ASD$, $ASD < CSD + ASC$, $ASC < BSC + ASB$. Сложивъ эти неравенства по-членно, получимъ

$$ESD + ASD + ASC < ASE + ASD + CSD + ASC + BSC + ASB$$

или $$ESD < ASE + CSD + BSC + ASB.$$

Фиг. 264.

63. **Теорема.** *Сумма плоскихъ угловъ какого-нибудь многограннаго угла меньше четырехъ прямыхъ угловъ.*

Разсѣчемъ многогранный уголъ SABCDE (фиг. 264) какою-нибудь плоскостью ABCDE; тогда по предъидущему (62, 1) получится $SAE + SAB > BAE$, $SBA + SBC > ABC$, $SCB + SCD > BCD$ и т. д. Сложивъ эти неравенства по-членно, получимъ

$$SAE + SAB + SBA + SBC + SCB + \ldots > BAE + ABC + BCD + \ldots;$$

но такъ какъ (I, 104) $BAE+ABC+BCD+... = 180^0(n-2)$, то
$SAE+SAB+SBA+SBC+SCB+... > 180^0.n-360^0$.... (I).

Извѣстно (I, 68, 4) также, что $SAE + SEA = 180^0 - ASE$, $SAB+SBA = 180^0 - ASB$, $SBC+SCB = 180^0 - BSC$ и т. д.; откуда

$$SAE+SAB+SBA+SBC+SCB+... =$$
$$180^0.n-(ASE+ASB+BSC+...).... \text{(II)}.$$

Въ неравенствѣ (I) замѣнивъ сумму $SAE + SAB + SBA + ...$ равною ей величиною выраженія (II) получимъ

$$180^0.n-(ASE+ASB+BSC+...) > 180^0.n-360^0 \text{ или}$$
$$ASE+ASB+BSC+.... < 360^0.$$

64. **Теорема.** *Въ трегранномъ углѣ равнымъ плоскимъ угламъ противолежатъ равные трегранные углы.*

Дано (фиг. 265): $\angle ABf = \angle ABC$. Требуется доказать, что двугранные углы $fCBA$ и $CfBA$ равны. Чрезъ какую-нибудь точку G ребра BA проведемъ плоскости GFD и GED соотвѣтственно перпендикулярно къ ребрамъ BC и Bf; эти плоскости, пересѣкающіяся по направленію прямой GD, пересѣкаютъ грани трегранного угла по направленію прямыхъ FG, FD, EG и DE. Треугольники FGB и EGB равны, потому-что сторона GB общая, $\angle GBF = \angle GBE$ по заданію и $\angle BFG = BEG = 90^0$; слѣдовательно $FG = EG$. Потомъ треугольники DFG и DEG равны, потому-что $\angle GDF = \angle GDE$ (51), сторона DG общая и $FG = EG$; слѣдовательно $\angle GFD = \angle GED$, а потому (43) и двугранные углы $fCBA$ и $CfBA$ равны.

Фиг. 265.

65. **Обратное предложеніе.** *Плоскіе углы трегранного угла, противолежащіе равныма двуграннымъ угламъ, должны быть равны.*

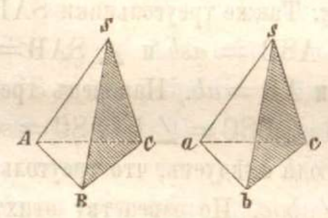
Двугранные $fCBA$ и $CfBA$ (фиг. 265) равны; требуется дока-

зать, что $\angle fBA = \angle CBA$. Чрезъ какую нибудь точку G ребра BA проведемъ двѣ плоскости GFD и GED соотвѣтственно перпендикулярно къ ребрамъ BC и Bf; тогда прямая GD перпендикулярна къ грани BfC и треугольники DFG и DEG равны, потому-что сторона DG общая, $\angle DFG = \angle DEG$ по заданію; слѣдовательно FG = EG. Потомъ треугольники BFG и BEG равны, потому-что FG = EG, сторона BG общая и $\angle BFG = \angle BEG = 90^0$; слѣдовательно $\angle ABC = \angle ABf$.

66. **Теорема.** *Два трегранные угла равны, если два плоскіе угла и содержащійся между ними двугранный уголъ одного трегранного угла соотвѣтственно равны двумъ плоскимъ угламъ и содержащемуся между ними двугранному углу другаго трегранного угла.*

Дано (фиг. 266): $\angle ASB = \angle asb$, $\angle BSC = \angle bsc$ и двугранные углы ABSC и $absc$ равны. Помѣстимъ трегранный уголъ $sabc$ въ трегранный уголъ SABC такимъ образомъ, чтобы вершина s совпала съ вершиною S, ребро sb совмѣстилось съ ребромъ SB и грань asb совпала съ гранью ASB; тогда по равенству двугранныхъ угловъ $absc$ и ABSC грань bsc должна совмѣститься съ гранью BSC, и по равенству угловъ asb, ASB и угловъ bsc, BSC ребра as и cs должны совмѣститься съ ребрами AS и CS. Такъ какъ трегранный уголъ $sabc$ совершенно совмѣстился съ треграннымъ угломъ SABC, то мы заключаемъ, что эти трегранные углы равны.

Фиг. 266.



67. **Теорема.** *Два трегранные угла равны, если плоскій уголъ и прилежащіе къ нему двугранные углы одного трегранного угла соотвѣтственно равны плоскому углу и прилежащимъ къ нему двуграннымъ угламъ другаго трегранного угла.*

Дано (фиг. 266): $\angle ASB = \angle asb$, BASC = $basc$, ABCS = $absc$. Помѣстимъ трегранный уголъ $sabc$ въ трегранный уголъ SABC

такимъ образомъ, чтобы вершины s и S совпали, ребро as совмѣстилось съ ребромъ AS и грань abs совпала съ гранью ABS; тогда по равенству угловъ asb и ASB ребро bs совмѣстится съ ребромъ BS, по равенству двугранныхъ угловъ $basc$ и BASC и двугранныхъ угловъ $absc$ и ABSC, грань acs совпадетъ съ гранью ACS и грань bsc совпадетъ съ гранью BSC. Такъ какъ двѣ плоскости могутъ пересѣкаться по направленію только одной прямой, то ребро cs совмѣстится съ ребромъ CS.

68. **Теорема.** *Если три плоскіе угла одного треграннаго угла соотвѣтственно равны тремъ плдскимъ угламъ другаго треграннаго угла, то эти трегранные углы равны.*

Отложимъ равныя части SA и sa (фиг. 266) и изъ точекъ A и a къ ребрамъ SA и sa возставимъ перпендикуляры AC и ac въ граняхъ SAC и sac. Треугольники SAC и sac равны, потому-что $SA = sa$ по отложенію, $\angle ASC = \angle asc$ по заданію и $\angle SAC = \angle sac = 90^0$; слѣдовательно $SC = sc$ и $AC = ac$. Также треугольники SAB и sab равны, потому-что $SA = sa$, $\angle ASB = asb$ и $\angle SAB = \angle sab = 90^0$; слѣдовательно $SB = sb$ и $AB = ab$. Наконецъ треугольники SBC и sbc равны, потому-что $\angle BSC = \angle bsc$, $SC = sc$ и $SB = sb$; слѣдовательно $BC = bc$. Отсюда слѣдуетъ, что треугольники ABC и abc равны и $\angle BAC = \angle bac$. По равенству этихъ угловъ мы заключаемъ, что двугранные углы BASC и $basc$ равны. Наконецъ основываясь на теоремѣ (66) мы узнаемъ, что трегранные углы SABC и $sabc$ равны.

69. Продолживъ ребра какого-нибудь многограннаго SABC (фиг. 267) за вершину S, мы образуемъ многогранный уголъ $sabc$, называемый *симетрическимъ* относительно многограннаго угла SABC. Въ двухъ симетрическихъ многогранныхъ углахъ SABC и Sabc всѣ элементы соотвѣтственно равны, т. е. плоскіе углы ASB и aSb, ASC и aSc и т. д. равны (I, 30) и двугранные углы (47) BASC и baSc, ACSB и acSb

Фиг. 267.
b c a s A C B

и т. д. равны; но соотвѣтственно равные элементы не одинаково расположены въ двухъ симетрическихъ многогранныхъ углахъ. Въ самомъ дѣлѣ, если наблюдатель помѣстится на ребрѣ SA внутри многограннаго угла SABC такъ, чтобы глазъ находился въ вершинѣ S, то ребра SB, SC представятся расположенными отъ правой руки къ лѣвой; напротивъ наблюдателю, находящемуся на ребрѣ S*a*, внутри многограннаго угла S*abc*, при томъ-же положенiи глаза, представятся ребра S*b*, S*c* расположенными отъ лѣвой руки къ правой.

70. **Теорема**. *Два симетрическiе двугранные угла только въ такомъ случаѣ равны, если они содержатъ по два равные плоскiе угла*.

Предположимъ (фиг. 267), что ∠ ASB = ∠ BSC и помѣстимъ двугранный уголъ ABSC въ двугранный уголъ *ab*S*c* такимъ образомъ, чтобы ребро BS совпало съ ребромъ *b*S, и грань BSC совмѣстилась съ гранью *a*S*b*; тогда по равенству двугранныхъ угловъ ABSC и *ab*S*c* грань ABS совпадетъ съ гранью *bc*S, и по равенству угловъ ASB и *b*S*c* ребро SA пойдетъ по ребру S*c*; точно также по равенству угловъ BSC и *a*S*b*, ребро SC пойдетъ по ребру S*a*. Отсюда мы заключаемъ, что грань ACS совмѣстится съ гранью *ac*S и слѣдовательно трегранные углы равны.

Предположимъ теперь, что плоскiе углы трегранного угла SABC не равны и помѣстимъ этотъ трегранный уголъ въ трегранный уголъ S*abc* такъ, чтобы двугранный уголъ ABSC пришелся въ двугранный уголъ *ab*S*c*; тогда ребро SC не пойдетъ по ребру S*a*, потому-что углы BSC и *b*S*a* не равны. Отсюда мы заключаемъ, что данные трегранные углы не совмѣщаются и слѣдовательно они не равны. Въ этомъ случаѣ трегранные углы SABC и S*abc* называются *симетрически-равными*.

ТЕОРЕМЫ И ЗАДАЧИ.

33) Чрезъ ребро SA трегранного угла SABC, въ которомъ плоскiе углы ASB и ASC равны, проведена плоскость ASD, раздѣляющая дву-

гранный уголъ BASC на двѣ равныя части. Требуется доказать, что плоскость ASD раздѣлитъ плоскій уголъ BSC на двѣ равныя части и перпендикулярна къ грани BSC.

34) Плоскости, которыми раздѣляются двугранные углы даннаго треграннаго угла соотвѣтственно на двѣ равныя части, пересѣкаются по направленію одной и той-же прямой.

35) Если провести плоскости M, P, Q чрезъ ребра SA, SB, SC трегранпаго угла SABC и прямыя, раздѣляющія противулежащіе плоскіе углы BSC, ASC, ASB соотвѣтственно на двѣ равныя части, то эти плоскости пересѣкутся по направленію одной и той-же прямой.

36) Въ трегранномъ углѣ SABC, содержащемъ неравные двугранные углы, большему изъ нихъ ABSC противолежитъ большій плоскій уголъ ASC.

37) Если плоскіе углы трегранпаго угла SABC не равны, то большему изъ нихъ ABC противолежитъ большій двугранный уголъ ABSC.

38) Если изъ точки S, данной внутри трегранпаго угла SABC, опущены перпендикуляры *sa*, *sb*, *sc* на его грани BSC, CSA, ASB, то образуется трегранный уголъ *sabc*, котораго плоскіе углы суть дополненія плоскимъ угламъ трегранпаго угла SABC до двухъ прямыхъ угловъ.

39) Сумма двугранныхъ угловъ A, B, C трегранпаго угла заключается между двумя и шестью прямыми двугранными углами.

40) Сумма двугранныхъ угловъ многограннаго угла, содержащаго n граней, меньше $2n$ и больше $2\ (n-2)$ прямыхъ двугранныхъ угловъ.

ОТДѢЛЪ II.

МНОГОГРАННИКИ.

ПЯТАЯ ГЛАВА.

Призма. Параллелопипедъ. Сѣченія призмы и параллелопипеда. Равенство двухъ призмъ. Поверхность призмы.

71. *Многогранникомъ* называется тѣло, ограниченное со всѣхъ сторонъ плоскостями. Плоскости которыми ограниченъ многогранникъ, называются его *гранями*. Прямыя пересѣченія граней суть *ребра* многогранника и точки пересѣченія ребръ суть его *вершины*. Двугранные и многогранные углы, составляемы гранями, суть двугранные и многогранные углы многогранника. Прямая, соединяющая двѣ вершины, не лежащія въ одной и той-же грани, называется *діагональю* многогранника. Если два многогранника совмѣщаются, то они *равны*. Два многогранника совмѣщаются, если вершины одного совпадаютъ съ соотвѣтствующими вершинами другаго многогранника.

72. Тѣло, ограниченное параллелограмами, которые заключены между двумя равными и параллельными гранями, называется *призмою* (фиг. 268). Прямая линія, двигаясь параллельно къ прямой, данной въ пространствѣ, по сомкнутой ломаной линіи, лежащей въ одной плоскости, образуетъ призматическую поверхность. Проведя двѣ параллельныя плоскости такимъ образомъ, чтобы они пересѣкли эту поверхность, мы образуемъ призму между проведенными плоскостями и частью призматической поверхности.

Фиг. 268.



Чтобы построить призму, проведемъ чрезъ вершину A какого-

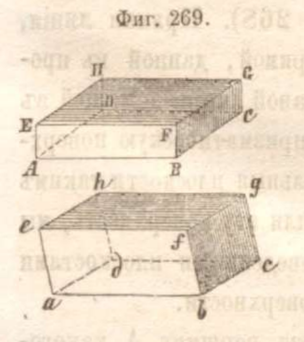
нибудь многоугольника ABCDE (фиг. 268) прямую AF и чрезъ точку F плоскость параллельно къ плоскости ABCDE. Потомъ чрезъ вершины B, C, D, E проведемъ прямыя BG, CH, DK, EL параллельно къ AF до пересѣченія съ проведенною плоскостью, и наконецъ соединимъ точки F и G, G и H, H и K, K и L, L и F. Прямыя BG, CH, DK, EL равны прямой AF (36), а потому грани ABGF, BCHG, CDKH и т. д. суть параллелограмы; также многоугольники ABCDE и FGHKL равны, потому-что ихъ стороны соотвѣтственно равны и параллельны. Отсюда мы заключаемъ, что построенный многогранникъ есть призма.

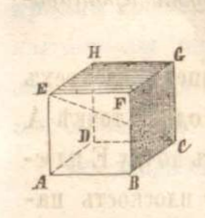
73. Призма называется *прямою*, если ребро AF перпендикулярно къ плоскости ABCDE (фиг. 268). При наклонномъ положеніи ребра AF относительно плоскости ABCDE призма называется *наклонною*. Прямыя AF, BG, CH и т. д. называются *боковыми ребрами* призмы. Сумма параллелограмовъ ABGF, BCHG, CDKH и т. д. составляетъ *боковую поверхность* призмы. Многоугольники ABCDE и FGHKL суть *основанія* призмы. Разстояніе между основаніями призмы называется ея *высотою*. Въ прямой призмѣ каждое боковое ребро равно ея высотѣ и боковыя грани суть прямоугольники. Въ наклонной призмѣ высота меньше боковаго ребра.

По числу сторонъ, содержащихся въ основаніи призмы, она называется *треугольною*, *четыреугольною*, *пятиугольною* и т. д.

74. Четыреугольная призма, коей основанія суть параллелограмы, называется обыкновенно *параллелопипедомъ*. Въ параллелопипедѣ (фиг. 269) всѣ грани суть параллелограмы. Параллелопипедъ ABCDEFGH (часто параллелопипедъ или призма означается двумя діагонально-расположенными буквами) называется *прямымъ*, а параллелопипедъ *abcdefgh* (или *ag*) *наклонный*. Прямой параллелопипедъ, котораго основанія пря-

Фиг. 269.





Фиг. 270.

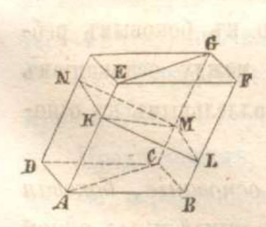
моугольники, называется *прямоугольнымъ*. Измѣренія (длина, ширина и высота) прямоугольнаго параллелопипеда AG опредѣляются его ребрами AB, BC, BF, встрѣчающимися въ одной вершинѣ. *Кубомъ* (фиг. 270) называется такой прямоугольный параллелопипедъ, котораго основанія и боковыя грани суть квадраты.

75. **Теорема.** *Противоположныя грани параллелопипеда равны и параллельны.*

Такъ какъ по опредѣленію призмы извѣстно, что основанія *abcd* и *efgh* параллелопипеда *ag* (фиг. 269) равны и параллельны, то предложенная теорема относится къ двумъ какимъ-нибудь противоположнымъ гранямъ *adhe* и *bcgf*. Прямыя *ad* и *bc* равны и параллельны, какъ противолежащія стороны параллелограма *abcd*; также прямыя *ae* и *bf* равны и параллельны, какъ противолежащія стороны параллелограма *abfe*; слѣдовательно (30) углы *dae* и *cbf* равны и ихъ плоскости *adhe* и *bcgf* параллельны. Параллелограмы *adhe* и *bcgf* равны, потому-что двѣ стороны одного *ad* и *ae* соотвѣтственно равны двумъ сторонамъ *bc* и *bf* другаго параллелограма, и углы *dae* и *cbf*, заключающіеся между этими сторонами, равны.

Примѣчаніе. Такъ какъ параллелопипедъ есть призма, ограниченная шестью параллелограмами, которые по два равны и параллельны, то за основанія параллелопипеда можно принять двѣ какія-нибудь противолежащія грани.

76. Слѣдствіе. Плоскость KLMN (фиг. 271) пересѣкаетъ двѣ противоположныя грани AEHD и BCGF параллелопипеда AG по направленію прямыхъ KN и LM, а противоположныя грани ABFE и CDHG по направленію прямыхъ KL и NM. Такъ какъ (31) KN || къ LM и KL || къ NM, то четыреугольникъ KLMN есть параллелограмъ. Отсюда слѣдуетъ, что *сѣченіе па-*



Фиг. 271.

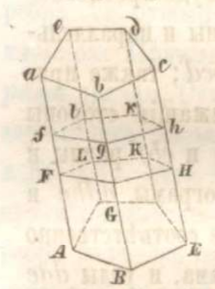
раллелопипеда плоскостью, встрѣчающеюся съ двумя противоположными гранями, есть параллелограмъ.

77. Слѣдствіе. Чтобы построить параллелопипедъ на трехъ данныхъ прямыхъ AB, AD, AE, встрѣчающихся въ одной точкѣ A и не находящихся въ одной плоскости, проведемъ чрезъ точку E плоскость параллельно къ плоскости BAD, чрезъ точку D плоскость параллельно къ плоскости BAE и наконецъ чрезъ точку B плоскость параллельно къ плоскости DAE.

78. **Теорема.** *Отъ разсѣченія призмы двумя параллельными плоскостями образуются два равные многоугольника.*

От разсѣченія данной призмы A*d* (фиг. 272) двумя параллельными плоскостями образовались многоугольники FGHKL и *fghkl*. Зная (31), что прямыя, происшедшія отъ пересѣченія двухъ параллельныхъ плоскостей третьею плоскостью, параллельны, мы имѣемъ *fg* || къ FG, *gh* || къ GH, *hk* || къ HK и т. д. Также извѣстно (I, 61), что параллельныя прямыя, заключающіяся между параллельными, равны; слѣдовательно *fg* = FG, *gh* = GH, *hk* = HK и т. д. Наконецъ вслѣдствіе теоремы (39) ∠ *fgh* = ∠ FGH, ∠ *ghk* = ∠ GHK, ∠ *hkl* = ∠ HKL и т. д. Отсюда слѣдуетъ, что многоугольники *fghkl* и FGHKL, въ которыхъ стороны и углы равны, должны быть равны.

Фиг. 272.



Слѣдствіе. Сѣченіе призмы плоскостью, параллельною къ основанію, равно этому основанію.

79. *Примѣчаніе. Прямымъ сѣченіемъ* призмы называется сѣченіе, сдѣланное плоскостью, перпендикулярною къ боковымъ ребрамъ призмы. Часть призмы A*d*, заключенная между основаніемъ *abcde* и какимъ-нибудь сѣченіемъ *fghkl*, непараллельнымъ къ основанію, называется *усѣченною призмою.*

80. **Теорема.** *Двѣ призмы равны, если основаніе, боковая грань и образуемый этими плоскостями двугранный уголъ одной*

призмы соотвѣтственно равны основанію, боковой грани и заключенному между ними двугранному углу другой призмы, и эти основанія и боковыя грани одинаково расположены въ обѣихъ призмахъ.

Въ данныхъ призмахъ A*d* и F*k* (фиг. 273) ABCDE=FGHKL, AB*ba* = FG*gf* и двугранные углы *a*ABD и *f*FGK равны. Для доказательства наложимъ многоугольникъ ABCDE на многоугольникъ FGHKL такимъ образомъ, чтобы эти многоугольники совмѣстились; тогда по равенству двугранныхъ угловъ *a*ABD и *f*FGK, плоскость AB*ba* приметъ положеніе плоскости FG*gf*, и по равенству граней AB*ba* и FG*gf*, уголъ AB*b* совмѣстится съ угломъ FG*g* и ребро B*b* совпадаетъ съ ребромъ G*g*. По равенству этихъ реберъ точка *b* упадетъ въ точку *g*. По совмѣщенію точекъ C и H, ребро C*c*, параллельное къ ребру B*b*, пойдетъ по прямой H*h*, параллельной къ ребру G*g*, и по равенству ребръ B*b* = C*c*, G*g* = H*h* и B*b* = G*g*, точка *c* упадетъ въ точку *h*. Точно также объясняется, что вершины *d*, *e*, *a* совпадутъ съ вершинами *k*, *l*, *f*. Отсюда мы заключаемъ, что призмы A*d* и F*k* совмѣщаются и слѣдовательно они равны.

Фиг. 273.

81. **Теорема**. *Двѣ прямыя призмы равны, если ихъ основанія и высоты соотвѣтственно равны.*

Въ самомъ дѣлѣ, прямые двугранные углы *a*ABD и *f*FGK (фиг. 273) равны; также прямоугольники AB*ba* и FG*gf* равны, потому-что по заданію AB = FG и B*b* = G*g*; слѣдовательно по предъидущей теоремѣ (80) призмы A*d* и F*k* равны.

82. **Теорема**. *Боковая поверхность призмы измѣряется произведеніемъ периметра ея прямаго сѣченія на боковое ребро.*

Предположимъ, что отъ разсѣченія призмы A*d* (фиг. 272) плоскостью, перпендикулярною къ боковымъ ребрамъ, образовался многоугольникъ FGHKL; тогда сторонами FG, GH, HK... этого много-

угольника выразятся высоты параллелограмовъ ABba, BEcb и т. д., которыхъ сумма площадей равна боковой поверхности призмы Ad. Сумма площадей этихъ параллелограмовъ равна

$$Aa.FG+Bb.GH+Ec.HK+\ldots = Aa.(FG+GH+HK+\ldots)$$

потому-что ребра Aa, Bb, Ec и т. д. равны; слѣдовательно боковая поверхность призмы Ad равна

$$P=Aa.(FG+GH+HK+\ldots).$$

83. Слѣдствіе. Приложивъ къ боковой поверхности призмы удвоенную площадь основанія, получимъ полную поверхность призмы. Такъ какъ прямое сѣченіе прямой призмы равно ея основанію (79) и боковое ребро равно ея высотѣ (73), то боковая поверхность прямой призмы равна *периметру ея основанія, помноженному на ея высоту*.

ЧИСЛЕННЫЕ ВОПРОСЫ.

41) Вычислить полную поверхность куба, котораго ребро равно 5,8 фута.

42) Стороны основанія прямой треугольной призмы содержатъ 2,4 фута, 3 фута, 1,8 фута и ея высота равна 18 футамъ. Сколько квадратныхъ футъ содержитъ боковая поверхность этой призмы?

43) Найти высоту прямой призмы, имѣющей основаніемъ правильный треугольникъ съ стороною въ 4 фута, если полная поверхность этой призмы содержитъ 313,856 квадратнаго фута.

44) Полная поверхность прямоугольнаго параллелопипеда, имѣющаго квадратное основаніе, равна 198 квадратнымъ футамъ. Сколько футъ содержитъ высота этого параллелопипеда, которая въ 5 разъ больше бока основанія?

45) Полная поверхность прямоугольнаго параллелопипеда, имѣющаго квадратное основаніе и высоту въ 26,8 фута, содержитъ 715,2 квадратнаго фута. Сколько футъ содержитъ бокъ его основанія?

46) Полная поверхность прямоугольнаго параллелопипеда, коего измѣренія относятся между собою, какъ числа 2,3 и 15, содержитъ 364½ квадратныхъ фута. Вычислить измѣренія этого параллелопипеда.

47) Діагональ квадратнаго основанія прямоугольнаго параллелопипеда 20 футами меньше высоты. Зная, что полная поверхность этого

параллелопипеда равна 278,5 квадратнымъ футамъ, вычислить его высоту.

48) Найти площадь квадратнаго основанія прямоугольнаго параллелопипеда, коего боковая поверхность содержитъ 287 квад. фут. и высота равна 20,5 фута.

49) Сумма поверхностей двухъ кубовъ равна P и сумма двухъ ребръ этихъ кубовъ равна p. Вывести выраженія для этихъ ребръ.

50) Полная поверхность прямоугольнаго параллелопипеда, котораго высота на a больше ребра квадратнаго основанія, равна P. Вывести выраженія для боковаго ребра и бока основанія.

51) Полная поверхность прямоугольнаго параллелопипеда равна 648 квад. фут., разность двухъ смежныхъ сторонъ его основанія равна 2 футамъ и его высота 10 футами больше периметра основанія. Сколько футовъ содержатъ ребра основанія, и сколько футовъ имѣетъ высота этого параллелопипеда.

ТЕОРЕМЫ.

52) Четыре діоганали параллелопипеда взаимно дѣлятся на двѣ равныя части.

53) Въ прямоугольномъ параллелопипедѣ всѣ четыре діагонали равны.

54) Квадратъ діагонали прямоугольнаго параллелопипеда равенъ суммѣ квадратовъ трехъ измѣреній этого параллелопипеда.

55) Діагональ куба равняется его ребру, помноженному на $\sqrt{3}$.

56) Во всякомъ параллелопипедѣ противоположные трегранные углы суть симетрическіе.

57) Двѣ усѣченныя призмы равны, если ихъ основанія равны, и ребра, перпендикулярныя къ основаніямъ, соотвѣтственно равны.

ВТОРАЯ ГЛАВА.

Объемъ параллелопипеда и призмы.

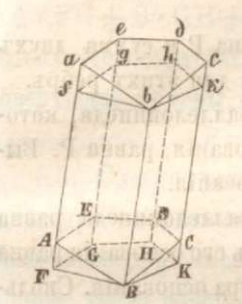
84. Величина части безпредѣльнаго пространства, занимаемой какимъ-нибудь тѣломъ, называется его *объемомъ*. Два многогранника, которыхъ объемы равны, называются *равномѣрными*.

Теорема. *Наклонная призма равномѣрна такой прямо-*

призмѣ, которой основаніе и высота соотвѣтственно равны прямому сѣченію и боковому ребру наклонной призмы.

Чрезъ оконечную точку b боковаго ребра Bb данной наклонной

Фиг. 274.



призмы $ABCDEabcde$ (фиг. 274) проведемъ прямое сѣченіе $bfghk$, и чрезъ оконечность B того же ребра проведемъ плоскость параллельно къ этому сѣченію. Пересѣченіемъ этой плоскости съ продолженными боковыми гранями опредѣлится многоугольникъ BFGHK, равный многоугольнику $bfghk$ (78), и образуется прямая призма $BFGHKbfghk$, имѣющая основаніемъ прямое сѣченіе $bfghk$ и высотою боковое ребро наклонной призмы. Наклонная призма $ABCDEabcde$ состоитъ изъ многогранниковъ $ABCDEbfghk$ и $bfghkaedc$, а прямая призма $BFGHKbfghk$ состоитъ изъ многогранниковъ $ABCDEbfghk$ и BFGHKAEDC. Отсюда слѣдуетъ: чтобы доказать равномѣрность призмъ $ABCDEabcde$ и $BFGHKbfghk$, имѣющихъ общую часть $ABCDEbfghk$, должно доказать равенство многогранниковъ $bfghaedc$ и BFGHKAEDC. Для этого представимъ себѣ, что многоугольникъ $fghk$ наложенъ на многоугольникъ BFGHK такимъ образомъ, чтобы они совмѣстились; тогда ребра kc и KC, перпендикулярныя къ плоскостямъ $bfghk$ и BFGHK, совпадутъ, и по равенству $kc = Bb - kC = KC$, точка c упадетъ въ точку C. Точно также мы узнаемъ, что точки a, e, d упадутъ въ точки A, E, D; слѣдовательно многогранники $bfghkaedc$ и BFGHAEDC, коихъ вершины совпадаютъ, совмѣщаются и равны (71).

85. **Теорема.** *Плоскость, проведенная чрезъ два противоположныя ребра параллелопипеда, раздѣляетъ его на двѣ равномѣрныя треугольныя призмы.*

Плоскость ACGE (271), проведенная чрезъ противоположныя ребра AE и CG, раздѣляетъ параллелопипедъ AG на двѣ треугольныя призмы ABCEFG и ADCEHG. Въ самомъ дѣлѣ треугольныя грани ABC и EFG (или ADC и EHG), которыхъ стороны соотвѣт-

ственно равны и параллельны, равны и ихъ плоскости параллельны, а боковыя грани суть параллелограмы. Чтобы доказать равномѣрность этихъ призмъ, проведемъ прямое сѣченіе KLMN параллелопипеда AG. Такъкакъ это сѣченіе есть параллелограмъ (76), то діагональ KM раздѣляетъ его на два равные треугольника KLM и KNM, которые сутъ прямыя сѣченія образовавшихся призмъ. Призма ABCEFG равномѣрна прямой призмѣ (84), имѣющей основаніемъ прямое сѣченіе KLM и высотою ребро AE; а призма ADCEHG равномѣрна прямой призмѣ, имѣющей основаніемъ прямое сѣченіе KNM и высотою ребро AE. Такъ какъ эти прямыя призмы равны (81), то равномѣрныя имъ наклонныя призмы ABCEFG и ADCEHG равномѣрны; слѣдовательно каждая изъ нихъ составляетъ половину параллелопипеда ABCDEFGH.

86. **Теорема**. *Два прямоугольные параллелопипеда, имѣющіе общее основаніе, относятся между собою, какъ ихъ высоты.*

1) Параллелопипеды ABCDEFGH и ABCD*abcd* (фиг. 275) имѣютъ общее основаніе ABCD и неравныя высоты AE и A*a*. Предположимъ, что прямыя AE и A*a* имѣютъ общую мѣру E*k*, содержащуюся *p* разъ въ прямой AE и *q* разъ въ прямой A*a*; тогда по предъидущему (II, 4) получимъ

Фиг. 275.

$$\frac{AE}{Aa}=\frac{p}{q}.$$

Раздѣливъ прямую AE на *p* равныхъ частей и прямую A*a* на *q* такихъ-же частей, проведемъ чрезъ точки дѣленія *k*, *e* и т. д. плоскости *ktno*, *efgh* и т. д. параллельно къ основанію ABCD. Этими плоскостями раздѣлится параллелопипедъ AG на *p* равныхъ прямоугольныхъ параллелопипедовъ (81), потому-что ихъ основанія равны основанію ABCD (78 слѣд.) и ихъ высоты равны; также параллелопипедъ A*c* раздѣлится на *q* такихъ же параллелопипедовъ; слѣдовательно

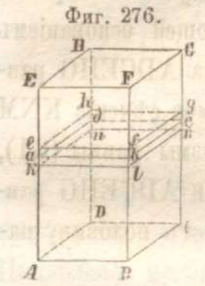
$$\frac{AG}{Ac}=\frac{p.EFGHktno}{q.EFGHktno} \text{ или } \frac{AG}{Ac}=\frac{p}{q}.$$

Такъ какъ отношенie между параллелопипедами AG и Ac равно отношенiю между ихъ высотами AE и Aa, то составится пропорцiя

$$\frac{AG}{AC}=\frac{AE}{Aa}.$$

2) Чтобы доказать справедливость выведенной пропорцiи для несоизмѣримыхъ высотъ AE и Aa, раздѣлимъ прямую AE (фиг. 276) на произвольное число равныхъ частей; тогда ни одна изъ точекъ дѣленiя не совпадетъ съ точкою a, потому-что въ противномъ случаѣ прямыя AE и Aa были бы соизмѣримы. Чрезъ точки дѣленiя e и k, ближайшiя къ точкѣ a, проведемъ плоскости $efgh$ и $klmn$ параллельно къ основанiю ABCD; тогда образуются два прямоугольныхъ параллелопипеда ABCD$efgh$ (или Ag) и ABCD$klmn$ (или Am), которые находятся въ слѣдующей зависимости отъ параллелопипеда ABCD$abcd$ (или Ac)

Фиг. 276.



$$Am < Ac \text{ и } Ag > Ac.$$

Основываясь на этихъ неравенствахъ, составимъ слѣдующiя отношенiя

$$\frac{AG}{Am}>\frac{AG}{Ac} \text{ и } \frac{AG}{Ag}<\frac{AG}{Ac} \text{ или } \frac{AG}{Am}>\frac{AG}{Ac}>\frac{AG}{Ag}\ldots (1).$$

По соизмѣримости прямыхъ AE и Ak и прямыхъ AE и Ae составятся пропорцiи

$$\frac{AG}{Am}=\frac{AE}{Ak} \text{ и } \frac{AG}{Ag}=\frac{AE}{Ae}\ldots\ldots (2).$$

Въ неравенствѣ (1) замѣнивъ отношенiя $\frac{AG}{Am}$ и $\frac{AG}{Ag}$ равными имъ отношенiями (2), получимъ

$$\frac{AE}{Ak}>\frac{AG}{Ac}>\frac{AE}{Ae}\ldots\ldots (3).$$

Такъ какъ Aa > Ak и Aa < Ae, то

$$\frac{AE}{Aa}<\frac{AE}{Ak} \text{ и } \frac{AE}{Aa}>\frac{AE}{Ae} \text{ или } \frac{AE}{Ak}>\frac{AE}{Aa}>\frac{AE}{Ae}\ldots\ldots (4).$$

Неравенства (3 и 4) показываютъ, что отношенiя $\frac{AG}{Ac}$ и $\frac{AE}{Aa}$ на-

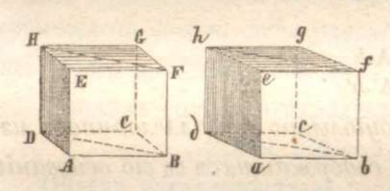
ходятся между величинами $\frac{AE}{Ak}$ и $\frac{AE}{Ae}$, которыя могутъ быть сближены такимъ образомъ, что ихъ разность сдѣлается меньше всякой произвольно малой величины, раздѣленіемъ прямой AE на произвольно большое число равныхъ частей; но извѣстно (II, 17): если между двумя величинами, которыхъ разность можетъ быть сдѣлана меньше всякой произвольно малой величины, заключаются двѣ другія величины, то послѣднія должны быть равны между собою; слѣдовательно

$$\frac{AG}{Ac}=\frac{AE}{Aa}.$$

87. **Теорема.** *Два прямоугольные параллелопипеда, имѣющіе общую высоту, относятся между собою, какъ ихъ основанія.*

Даны прямоугольные параллелопипеды AG и *ag* (фиг. 277), имѣющіе общую высоту AE (или *ae*) и неравныя основанія ABCD и *abcd*. Построимъ прямоугольный параллелопипедъ P на прямыхъ AE, AB и *ad*, и сравнимъ его съ параллелопипедомъ AG. Такъ какъ

Фиг. 277.



эти параллелопипеды имѣютъ двѣ равныя грани, содержащія каждая ребра AE и AB, то эти грани можно принять за основанія параллелопипедовъ; тогда по предъидущему (86) получимъ пропорцію

$$\frac{P}{AG}=\frac{ad}{AD}.$$

Параллелопипеды *ag* и P имѣютъ также равныя основанія, построенныя на прямыхъ AE и *ad*; слѣдовательно по предъидущему (86) составится пропорція

$$\frac{ag}{P}=\frac{ab}{AB}.$$

Перемноживъ выведенныя пропорціи по-членно и сдѣлавъ сокращеніе на P, получимъ

$$\frac{ag}{AG}=\frac{ad.ab}{AD.AB} \text{ или } \frac{ag}{AG}=\frac{abcd}{ABCD}.$$

88. **Теорема.** *Два какіе-нибудь прямоугольные параллело-*

пипеда пропорціональны произведеніямъ ихъ основаній на высоты.

Назовемъ чрезъ P и P' два прямоугольные параллелопипеда, имѣющіе основанія A и A' и высоты h и h'. Построимъ параллелопипедъ P'' на основаніи A параллелопипеда P и дадимъ ему высоту h' параллелопипеда P'. Параллелопипеды P и P'', имѣющіе общее основаніе A, пропорціональны ихъ высотамъ (86); т. е.

$$\frac{P}{P''} = \frac{h}{h'};$$

а параллелопипеды P'' и P', имѣющіе общую высоту h', пропорціональны ихъ основаніямъ (87); т. е.

$$\frac{P''}{P'} = \frac{A}{A'}.$$

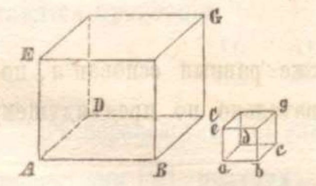
Перемноживъ выведенныя пропорціи по-членно и сдѣлавъ сокращеніе на P'', получимъ

$$\frac{P}{P'} = \frac{A.h}{A'.h'}.$$

89. **Теорема**. *Объемъ прямоугольнаго параллелопипеда измѣряется произведеніемъ чиселъ, содержащихся въ его основаніи и высотѣ, если за единицы: площади и объема приняты квадратъ и кубъ, построенные на единицѣ длины.*

Даны: прямоугольный параллелопипедъ AG и кубъ ag (фиг. 278), котораго ребро ab равно какой-нибудь единицѣ длины. По предъидущему (88) составится выраженіе

Фиг. 278.



$$\frac{AG}{ag} = \frac{ABCD \times AE}{abcd \times ae} = \frac{ABCD}{abcd} \times \frac{AE}{ae},$$

въ которомъ членъ $\frac{AG}{ag}$ означаетъ число, которымъ измѣряется объемъ AG, а отношенія $\frac{ABCD}{abcd}$ и $\frac{AE}{ae}$ выражаютъ числа, которыми измѣряются площадь ABCD и высота AE параллелопипеда AG; слѣдовательно число, которымъ измѣряется объемъ прямоугольнаго параллелопипеда, равно произведенію чиселъ, измѣряющихъ его основаніе и высоту. Назвавъ эти три числа чрезъ

Q, A, H, получимъ формулу $Q = A \times H$, которая обыкновенно выражается вотъ какъ: *объемъ прямоугольнаго параллелопипеда равенъ произведенію его основанія на высоту.*

Означивъ три ребра AB, AD и AE прямоугольнаго параллелопипеда, встрѣчающіяся въ одной вершинѣ, соотвѣтственно чрезъ a, b и h, получимъ формулу

$$AG = ABCD.AE = a.b.h,$$

потому-что площадь $ABCD = a.b$; слѣдовательно *объемъ прямоугольнаго параллелопипеда равенъ произведенію его трехъ измѣреній.*

Примѣръ. *Вычислить вѣсъ куска краснаго дерева, имѣющаго видъ прямоугольнаго параллелопипеда, длиною въ 2,3 фута, шириною въ 1,25 фута и высотою въ 2,6 фута, зная, что вѣсъ кубическаго дюйма воды равенъ почти 3,84 золотника и красное дерево тяжелѣе воды въ 1,06 раза.*

Площадь основанія параллелопипеда равна

$$2,3 \times 1,25 = 2,875 \text{ квад. фут.}$$

Объемъ параллелопипеда равенъ

$$2,875 \times 2,6 = 7,475 \text{ куб. фут.} = 12916,8 \text{ куб. дюйм.}$$

Вѣсъ кубическаго дюйма краснаго дерева равенъ

$$3,84 \times 1,06 = 4,0704 \text{ золот.}$$

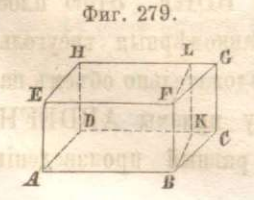
Вѣсъ параллелопипеда краснаго дерева равенъ

$$4,0704 \times 12916,8 = 52576,54272 \text{ золот.} = 13,691808 \text{ пуд.}$$

Слѣдствіе. Объемъ куба измѣряется произведеніемъ $AB.AD.AE = \overline{AB}^3$, потому-что въ кубѣ всѣ ребра равны.

90. **Теорема.** *Объемъ какого-нибудь параллелопипеда измѣряется произведеніемъ его основанія на высоту.*

Фиг. 279.

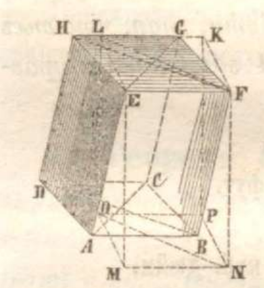


1) Данъ прямой параллелопипедъ AG (фиг. 279), имѣющій основаніемъ параллелограмъ ABCD и высоту AE. Чрезъ какую-нибудь точку B ребра AB основанія проведемъ плоскость перпендикулярно къ этому ребру. Сѣ-

ченіе параллелопипеда AG этою плоскостью будетъ прямоугольникъ BFLK, потому-что противоположныя грани ABFE и CDHG параллелопипеда перпендикулярны къ его основаніямъ. Вслѣдствіе теоремы (84) прямой параллелопипедъ AG равномѣренъ прямоугольному параллелопипеду, имѣющему основаніемъ прямое сѣченіе BFLK и вытою ребро AB. Объемъ этого прямоугольнаго параллелопипеда равенъ произведенію его трехъ измѣреній AB.BK.BF; слѣдовательно объемъ данной призмы равенъ тому-же самому произведенію AB.BK.BF; но такъ какъ произведеніемъ AB.BK измѣряется площадь основанія ABCD, то объемъ призмы AG равенъ произведенію ABCD.BF.

2) Данъ наклонный параллелопипедъ AG (фиг. 280), имѣющій основаніемъ параллелограмъ ABCD. Изъ точекъ E и F ребра основанія EFGH возставимъ перпендикуляры EL и FK къ ребру EF въ плоскости EFGH. Потомъ опустивъ перпендикуляры изъ точекъ E, F, K, L на плоскость основанія ABCD и проведя прямыя MN, NP, PO и MO, получимъ прямоугольный параллелопипедъ EFKLMNPO, равномѣрный данному параллелопипеду AG, потому-что прямоугольникъ EFKL равномѣренъ параллелограму EEGH и оба параллелопипеда имѣютъ общую высоту LO; слѣдовательно объемъ наклоннаго параллелопипеда AG равенъ произведенію EFGH.EM или равенъ произведенію EF.EL.EM.

Фиг. 280.



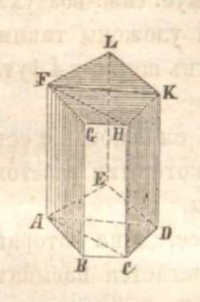
91. **Теорема.** *Объемъ призмы измѣряется произведеніемъ ся основанія на высоту.*

1) Чрезъ противоположныя боковыя ребра BF и DH параллелопипеда AG (фиг. 280) проведемъ плоскость BDHF. Этою плоскостью параллелопипедъ раздѣлится на двѣ равномѣрныя треугольныя призмы ABDEFH и BCDFGH (85); слѣдовательно объемъ параллелопипеда AG равенъ удвоенному объему призмы ABDEFH. Такъ какъ объемъ параллелопипеда AG, равный произведенію

EFGH.EM, можетъ быть выраженъ чрезъ 2EFH.EM, то объемъ призмы ABDEFH измѣряется произведеніемъ EFH.EM.

2) Чтобы опредѣлить объемъ многогранной призмы AK (фиг. 281), проведемъ плоскости чрезъ ребро AF и каждое изъ ребръ CH и DK, не лежащихъ въ одной грани съ ребромъ AF. Этими плоскостями данная призма AK раздѣлится на треугольныя призмы, имѣющія общую высоту съ данною призмою; основаніями этихъ призмъ суть треугольники ABC, ACD, ADE, образовавшіеся проведеніемъ діагоналей въ многоугольникѣ ABCDE чрезъ вершину A. Объемы этихъ треугольныхъ призмъ равны ABC.H, ACD.H, AED.H, гдѣ H ихъ общая высота; слѣдовательно объемъ данной призмы равенъ

Фиг. 281.



$$ABC.H + ACD.H + AED.H =$$
$$(ABC + ACD + AED).H = ABCDE.H.$$

92. Слѣдствіе. 1) Двѣ призмы равномѣрны, если ихъ высоты равны и основанія равномѣрны.

2) Если основанія двухъ призмъ P и P′ соотвѣтственно равны A и A′ и ихъ высоты суть H и H′, то $P = A.H$, $P' = A'.H'$ и $\frac{P}{P'} = \frac{A.H}{A'.H'}$; т. е. *двѣ призмы относятся между собою, какъ произведенія ихъ основаній на соотвѣтствующія высоты.*

3) Если основанія A и A′ двухъ призмъ P и P′ равномѣрны, то $\frac{P}{P'} = \frac{H}{H'}$, т. е. *двѣ призмы съ равномѣрными основаніями пропорціональны ихъ высотамъ.*

4) Если высоты H и H′ двухъ призмъ P и P′ равны, то $\frac{P}{P'} = \frac{A}{A'}$, т. е. *двѣ призмы съ равными высотами пропорціональны ихъ основаніямъ.*

ЧИСЛЕННЫЕ ВОПРОСЫ И ТЕОРЕМЫ.

58) Въ больницѣ устроена палата, длиною въ 7 саж., шириною въ 10 арш. и высотою въ $5\frac{1}{2}$ арш. Сколько больныхъ можно помѣстить въ этой палатѣ, если на каждаго полагается $1\frac{1}{2}$ куб. саж. воздуха?

59) 2304 куб. фута мелкаго булыжнаго камня уложены такимъ образомъ, что они въ вышину занимаютъ 8 футъ и въ ширину 4 фута. Сколько футовъ длины занимаютъ эти каменья?

60) Высота прямой призмы равна 16,4 фута, а ея основаніе есть трапеція съ основаніями въ 2,6 и 1,8 фут., между которыми разстояніе равно 1,6 фута. Вычислить объемъ этой призмы.

61) Сколько потребно каменнаго щебня на шоссе, длина котораго 2 версты и ширина $2\frac{1}{2}$ сажени, когда щебня полагается насыпать вышиною въ 8 дюймовъ?

62) Уменьшеніемъ ребра куба на $\frac{1}{2}$ фута уменьшится объемъ этого куба на $21\frac{1}{8}$ куб. фута. Сколько футовъ содержитъ первоначальная длина ребра?

63) Сколько кубовъ, имѣющихъ ребро въ 3 дюйма каждый, можно получить изъ куба, коего ребро равно 2 фут. 3 дюймамъ?

64) Нанято 15 землекоповъ для вырытія канавы, длиною въ 115 саж., шириною въ $4\frac{1}{2}$ арш. и глубиною въ $2\frac{1}{4}$ арш. Во сколько времени эта работа можетъ быть окончена, если рабочій въ часъ можетъ вырыть 36 куб. фут. земли?

65) Ребро куба P содержитъ 6 футъ. Сколькими футами это ребро меньше ребра куба P′, котораго объемъ вдвое больше объема куба P?

66) Вычислить объемъ куба, коего боковая поверхность содержитъ $182\frac{1}{4}$ квадр. вершка.

67) Вычислить діагональ куба, котораго объемъ равенъ 21,952 куб. фута.

68) Вычислить объемъ прямой призмы, коей высота равна 25 фут. и основаніе правильный треугольникъ съ стороною въ 1,8 фута.

69) Діагональ квадратнаго основанія прямоугольнаго параллелопипеда содержитъ 4,8 фута и высота параллелопипеда равна 18,6 фута. Вычислить его объемъ.

70) Помѣщикъ заказалъ деревянный ящикъ, вышиною въ 5 футъ, и вмѣщающій въ себѣ 12 четвертей. Зная, что четверикъ вмѣщаетъ

въ себѣ 1600 куб. дюйм., вычислить ребро квадратнаго основанія этого ящика.

71) Поверхность прямоугольнаго параллелопипеда, имѣющаго квадратное основаніе, равна 224 кв. фут., а ребро основанія 8 футами меньше высоты параллелопипеда. Вычислить объемъ.

72) Вычислить объемъ прямой призмы, коей высота равна 32 фут. и основаніе правильный шестиугольникъ съ периметромъ въ 5,4 фута.

73) Ребро куба, котораго объемъ вдвое больше объема куба, имѣющаго ребро a, не можетъ быть выражено точнымъ образомъ.

74) Граммъ равенъ вѣсу кубическаго сантиметра воды, а килограммъ содержитъ 1000 граммовъ. Представивъ себѣ кубъ, вмѣщающій въ себѣ килограммъ воды, опредѣлить длину ребра этого куба.

75) Основаніе прямой треугольной призмы, высотою въ 16,2 фута, равнобедренный прямоугольный треугольникъ, коего периметръ равенъ 15,8 фута. Вычислить объемъ призмы.

76) Вывести выраженіе объема куба, если сумма его ребра и діагонали равна p.

77) Желѣзная полоса, длиною въ 16 футъ, имѣетъ квадратное основаніе съ ребромъ въ 8 дюймовъ. Сколько вѣсу въ этой полосѣ, когда извѣстно, что вѣсъ 25 куб. дюймовъ воды равенъ фунту, и вѣсъ 50 куб. дюймовъ желѣза равенъ вѣсу 389 куб. дюйм. воды?

78) Объемъ прямоугольнаго параллелопипеда равенъ Q и его длина, ширина и высота относятся между собою какъ числа m, n и p. Вывести выраженія для измѣреній этого параллелопипеда.

79) Поверхность прямоугольнаго параллелопипеда равна 664 кв. фут., а его длина 2 футами больше ширины и высота 6 футами больше ширины. Вычислить объемъ этого параллелопипеда.

80) Объемъ прямоугольнаго параллелопипеда равенъ $131\frac{5}{8}$ куб. фут., его высота равна $4\frac{1}{2}$ фут. и длина 2 футами больше ширины Сколько футъ содержатъ длина и ширина?

81) При температурѣ 13 градусовъ выше нуля найдено, что длина желѣзной полосы равна $2\frac{1}{2}$ саж., ея толщина равна $2\frac{1}{2}$ дюйм. и ширина равна $3\frac{1}{4}$ дюйма. Вычислить объемъ этой полосы при 25 градусахъ тепла, зная, что при каждомъ градусѣ выше нуля желѣзо разширяется на $\frac{1}{273}$ своего объема.

82) Доказать геометрически формулу, которою выражается кубъ суммы двухъ количествъ.

83) Въ бассейнъ, коего длина 64 фута, ширина 45 футъ и глубина $8^1/_2$ футъ, проведены двѣ трубы. Посредствомъ верхней трубы бассейнъ наполняется водою въ $5^1/_2$ часовъ, а нижнею трубою онъ выпоражнивается въ $6^3/_4$ часа. Сколько кубическихъ футъ воды вливается въ бассейнъ въ одну минуту, если обѣ трубы открыты?

84) Прямоугольное мѣсто ABCD, длиною AB въ 72 саж. и шириною AD въ 46 саж., требуется обвести стѣною изъ крупнаго булыжнаго камня, высота которой должна равняться $3^1/_2$ арш. и толщина $^3/_4$ арш. Сколько потребно камня на кладку этой стѣны, если на 4 куб. сажени ея полагается $4^1/_2$ куб. саж. камня?

85) Требуется вырыть яму, глубиною въ $3^3/_4$ фута и шириною въ $8^1/_2$ футъ, для гашенія кубической сажени обозженнаго известковаго камня. Опредѣлить длину этой ямы, зная, что гашеніемъ увеличивается объемъ известковаго камня втрое.

86) Прямоугольное поле, длиною въ $^1/_2$ версты и шириною въ 130 саж., куплено для добыванія торфа на 6 футъ глубины. Сколько получится кусковъ торфа, если $^1/_{10}$ всего количества полагается на бракъ и 8 кусковъ составляютъ одинъ кубическій футъ?

87) Ребра основанія прямой треугольной призмы равны 2,25 фута, 1,8 фута и 1,35 фута и ея высота содержитъ 14 футъ. Вычислить ея объемъ.

88) Основаніе прямой треугольной призмы, высотою въ 12 футъ, равнобедренный треугольникъ, коего периметръ равенъ 2,4 фута и одна изъ равныхъ сторонъ равна 0,75 фута. Вычислить ея объемъ.

89) Кубъ березоваго дерева положенъ въ воду такимъ образомъ, что его боковыя ребра перпендикулярны къ поверхности воды. Ребро этого куба равно $2^1/_2$ футамъ, вѣсъ кубическаго дюйма воды равенъ 3,84 золотника и вѣсъ березы составляетъ 0,6 вѣса воды. На сколько футовъ этотъ кубъ погрузился въ воду, когда извѣстно, что всякое тѣло, погруженное въ воду, вытѣсняетъ такой объемъ воды, котораго вѣсъ равенъ вѣсу этого тѣла?

90) Объемъ всякой треугольной призмы равенъ половинѣ боковой грани, помноженной на разстояніе этой грани отъ противолежащаго ей ребра.

91) Брусъ сосноваго дерева, длиною въ 3 сажени, шириною въ $7^1/_8$ вершка и толщиною въ $5^1/_8$ вершка, широкою гранью положенъ

въ воду. Узнать, на сколько вершковъ брусъ опустился въ воду, зная, что вѣсъ куб. вершка воды равенъ 20,58 золотника и свѣжее сосновое дерево во столько разъ легче воды, во сколько 23 меньше 25. (См. задачу № 89).

~~~~~~~~~~

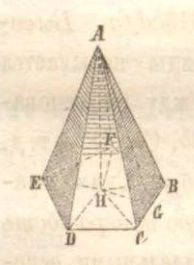
ТРЕТЬЯ ГЛАВА.

Пирамида. Сѣченіе пирамиды. Равенство пирамидъ. Поверхность пирамиды.

93. *Пирамидою* называется многогранникъ, ограниченный какимъ-нибудь многоугольникомъ и треугольниками, которыхъ общая вершина находится внѣ многоугольной грани и основанія суть стороны этого многоугольника.

Многогранникъ (фиг. 282), ограниченный многоугольникомъ BCDEF и треугольниками ABC, ACD, ADE, AEF, ABF, есть пирамида, имѣющая *основаніе* BCDEF и *вершину* A. Разстояніе AH вершины A отъ основанія, т. е. перпендикуляръ, опущенный изъ точки A на плоскость BCDEF, называется *высотою* пирамиды. Прямыя AB, AC, AD и т. д. называются *боковыми ребрами* пирамиды. Сумма треугольныхъ граней ABC, ACD, ADE и т. д. составляетъ *боковую поверхность* пирамиды.

Фиг. 282.



94. Если основаніе пирамиды правильный многоугольникъ, котораго центръ совмѣщается съ основаніемъ ея высоты, то эта пирамида *правильная*. Боковыя ребра AB, AC, AD и т. д. правильной пирамиды (фиг. 282) равны между собою, какъ наклонныя, равно-отстоящія отъ основанія H перпендикуляра AH (16, 2); слѣдовательно боковыя грани этой пирамиды суть равные равнобедренные треугольники. Высота одного изъ этихъ треугольниковъ называется *апоѳемою* правильной пирамиды.

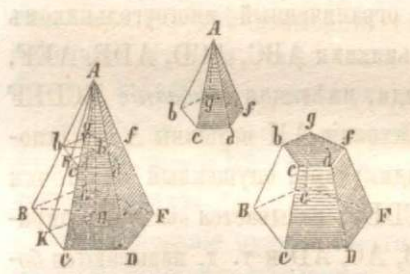
По числу сторонъ основанія, пирамиды бываютъ *треугольныя*,
~~~~~~~~~~

четыреугольныя и т. д. *многоугольныя*. Треугольная пирамида часто получаетъ названіе *тетраэдра*. Вслѣдствіе опредѣленія пирамиды возможно принять какую угодно грань тетраэдра за его основаніе. Вершина, противолежащая выбранному основанію, есть вершина тетраэдра.

95. Если пирамида разсѣчена плоскостью, встрѣчающеюся съ боковыми ребрами, то многогранникъ, заключающійся между образовавшимся сѣченіемъ и основаніемъ пирамиды, называется *усѣченною пирамидою*.

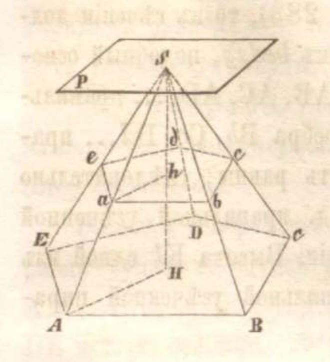
Если плоскость сѣченія параллельна къ основанію пирамиды, то образуется *усѣченная пирамида съ параллельными основаніями*. Пирамида ABCDFG (фиг. 283) разсѣчена плоскостью параллельно къ основанію BCDFG. Сѣченіе $bcdfg$ и основаніе BCDFG суть параллельныя основанія усѣченной пирамиды BCDFG$bcdfg$. *Высотою* этой пирамиды называется разстояніе Hh между ея основаніями, а прямыя Bb, Cc, Dd и т. д. суть ея *боковыя ребра*. Сумма трапецій BCcb, CDdc, DFfd и т. д. составляетъ *боковую поверхность* усѣченной пирамиды. Усѣченная пирамида съ параллельными основаніями, происшедшая отъ правильной пирамиды, называется правильною усѣченною пирамидою.

Фиг. 283.



96. **Теорема.** *Если пирамида разсѣчена плоскостію, параллельною къ основанію, то: 1) ея боковыя ребра и высота раздѣлятся на пропорціональныя части, и 2) въ сѣченіи получится многоугольникъ, подобный основанію пирамиды.*

1) Пирамида SABCDE (фиг. 284) разсѣчена плоскостью $abcde$, параллельною къ основанію ABCDE. Эта плоскость пересѣкаетъ боковыя ребра SA, SB, SC.... и высоту SH въ точкахъ a, b, c....h.



Фиг. 284.

Чрезъ вершину S проведя плоскость P параллельно къ основанію ABCDE, мы раздѣлимъ ребра SA, SB, SC.... и высоту SH на пропорціональныя части (38); слѣдовательно

$$\frac{Sa}{aA}=\frac{Sb}{bB}=\frac{Sc}{cC}=\ldots\ldots=\frac{Sh}{SH}.$$

2) По параллельности плоскостей ABCDE и *abcde*, ихъ пересѣченія съ боковыми гранями пирамиды должны быть соотвѣтственно параллельныя прямыя (31); слѣдовательно углы ABC и *abc*, которыхъ стороны соотвѣтственно параллельны и имѣютъ одинаковое направленіе, равны (39); также $\angle$ BCD $= bcd$, $\angle$ CDE $= \angle$ *cde* и т. д. По параллельности прямыхъ AB и *ab*, треугольники SAB и S*ab* подобны и слѣдовательно $\frac{AB}{ab}=\frac{SB}{Sb}$. Также треугольники SBC и S*bc* подобны и $\frac{SB}{Sb}=\frac{BC}{bc}$. Изъ этихъ двухъ пропорцій получимъ $\frac{AB}{ab}=\frac{BC}{bc}$. Подобнымъ образомъ мы найдемъ $\frac{BC}{bc}=\frac{CD}{cd}$, $\frac{CD}{cd}=\frac{DE}{de}$ и т. д. Отсюда слѣдуетъ, что многоугольники ABCDE и *abcde*, въ которыхъ соотвѣтствующіе углы равны и сходственныя стороны пропорціональны, подобны.

97. Слѣдствіе. Такъ какъ многоугольники ABCDE и *abcde* подобны, то ихъ площади пропорціональны квадратамъ сходственныхъ сторонъ; т. е.

$$\frac{abcde}{ABCDE}=\frac{\overline{ab}^2}{\overline{AB}^2},$$

но извѣстно, что $\frac{ab}{AB}=\frac{Sa}{SA}=\frac{Sh}{SH}$; слѣдовательно

$$\frac{abcde}{ABCDE}=\frac{\overline{Sh}^2}{\overline{SH}^2};$$

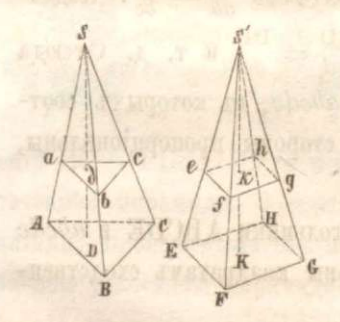
т. е. *параллельныя сѣченія пирамиды пропорціональны квадратамъ ихъ разстояній отъ вершины пирамиды.*

98. Слѣдствіе. Если правильная пирамида разсѣчена плоскостью, параллельною къ основанію (фиг. 283), то въ сѣченіи долженъ получиться правильный многоугольникъ *bcdfg*, подобный основанію BCDFG. Такъ какъ боковыя ребра AB, AC, AD.... правильной пирамиды равны, то также боковыя ребра B*b*, C*c*, D*d*... правильной усѣченной пирамиды должны быть равны; слѣдовательно боковыя грани BC*cb*, CD*dc*, DF*fd* и т. д. правильной усѣченной пирамиды суть равныя равнобочныя трапеціи. Высота K*k* одной изъ этихъ трапецій называется *апоѳемою* правильной усѣченной пирамиды.

99. **Теорема.** *Если двѣ пирамиды, имѣющія общую высоту, разсѣчены плоскостями, параллельными къ основаніямъ и равно-отстоящими отъ вершинъ пирамидъ, то образовавшіяся сѣченія пропорціональны основаніямъ.*

Высота SD (фиг. 285) пирамиды SABC равна высотѣ S'K пирамиды S'EFGH. Отложивъ на этихъ прямыхъ равныя части S*d* и S'*k*, проведемъ чрезъ точки *d* и *k* плоскости *abc* и *efgh* соотвѣтственно параллельно къ основаніямъ ABC и EFGH. По параллельности сѣченія *abc* къ основанію ABC мы имѣемъ по предъидущему (97) пропорцію

Фиг. 285.



$$\frac{abc}{ABC} = \frac{\overline{Sd}^2}{\overline{SD}^2}$$

и по параллельности плоскостей *efgh* и EFGH составится пропорція

$$\frac{efgh}{EFGH} = \frac{\overline{S'k}^2}{\overline{S'K}^2};$$

но такъ какъ по заданію $SD = S'K$ и по отложенію $Sd = S'k$, то отношенія $\frac{\overline{Sd}^2}{\overline{SD}^2}$ и $\frac{\overline{S'k}^2}{\overline{S'K}^2}$ равны; слѣдовательно также

$$\frac{abc}{ABC} = \frac{efgh}{EFGH}.$$

Изъ этой пропорціи слѣдуетъ: если основанія ABC и EFGH пирамидъ равномѣрны, то образовавшіяся сѣченія abc и $efgh$ должны быть также равномѣрны.

100. **Теорема.** *Боковая поверхность правильной пирамиды измѣряется полупериметромъ основанія, помноженнымъ на высоту пирамиды.*

Боковая поверхность правильной пирамиды ABCDEF (фиг. 282) равна суммѣ площадей равныхъ равнобедренныхъ треугольниковъ ABC, ACD, ADE и т. д., которыхъ основанія суть стороны BC, CD, DE и т. д. основанія BCDEF и высота есть апоѳема AG пирамиды. Сумма площадей этихъ треугольниковъ равна

$$\frac{1}{2}BC.AG + \frac{1}{2}CD.AG + \frac{1}{2}DE.AG + \ldots = \frac{1}{2}(BC + CD + DE + \ldots)AG;$$

слѣдовательно боковая поверхность пирамиды ABCDEF равна

$$\frac{1}{2}(BC + CD + DE + \ldots).AG.$$

101. Слѣдствіе. Боковая поверхность правильной усѣченной пирамиды BCDF$bcdfg$ (фиг. 283) состоитъ изъ равныхъ равнобочныхъ трапецій, которыхъ площади суть $BCcb = \frac{1}{2}(BC + bc).Kk$, $CDdc = \frac{1}{2}(CD + cd).Kk$, $DFfd = \frac{1}{2}(DF + df).Kk$ и т. д.; слѣдовательно боковая поверхность пирамиды BCDFG$bcdfg$ равна

$$\frac{1}{2}(BC + CD + DF + \ldots bc + cd + df + \ldots).Kk,$$

т. е. *равна полупериметрамъ основаній, помноженнымъ на апоѳему пирамиды.*

ЧИСЛЕННЫЕ ВОПРОСЫ.

92) Вычислить боковую поверхность правильной четыреугольной пирамиды, апоѳема которой въ 4 раза больше діагонали квадратнаго основанія, содержащей 1,4 фута.

93) Вычислить боковую поверхность правильной четыреугольной пирамиды, коей боковое ребро равно 8,5 фута, а ребро квадратнаго основанія содержитъ 10,2 фута.

94) Ребро квадратнаго основанія правильной пирамиды, имѣющей высоту h, равно a. Вывести выраженіе боковой поверхности этой пирамиды.

95) Боковая поверхность правильной четыреугольной пирамиды, имѣющей квадратное основаніе и высоту въ 1,5 фута, содержитъ 20 квадратныхъ футъ. Вычислить бокъ основанія.

96) Полная поверхность правильной четыреугольной пирамиды, имѣющей равныя ребра, содержитъ 68,3 квадр. фут. Сколько футъ содержитъ каждое ребро?

97) Вычислить боковую поверхность правильной шестиугольной усѣченной пирамиды, которой апоѳема равна 8,5 дюйма, ребро верхняго основанія равно 2,4 дюйма и ребро нижняго основанія равно 3,8 дюйма.

98) Боковая поверхность правильной треугольной пирамиды, которой апоѳема 10 футами больше бока основанія, равна 300 квадр. фут. Вычислить боковое ребро и бокъ основанія пирамиды.

99) Шестиугольная пирамида, коей основаніе содержитъ 5,29 кв. фут. и бокъ AB основанія равенъ 2,5 фут., разсѣчена плоскостью параллельно къ основанію такимъ образомъ, что бокъ *ab* сѣченія, сходственный боку AB, равенъ 1,5 фута. Вычислить площадь сѣченія.

100) Боковая поверхность правильной усѣченной пирамиды, имѣющей квадратныя основанія и высоту въ 10 футъ, содержитъ 262,89 кв. фут. Вычислить ребра основаній этой пирамиды, если нижнее ребро 3 футами больше верхняго ребра.

101) Вывести выраженіе для боковой поверхности правильной усѣченной пирамиды съ квадратными основаніями, имѣющей высоту h, нижнее ребро a и верхнее ребро b.

102) Бокъ квадратнаго основанія правильной пирамиды, содержащей 346,1328 кв. фут., относится къ ея боковому ребру точно такъ, какъ 4 относится къ 11. Сколько футъ содержитъ бокъ основанія?

103) Боковая поверхность правильной пирамиды съ квадратнымъ основаніемъ содержитъ 192 квадр. фута и боковое ребро относится къ ребру основанія точно такъ, какъ 5 относится къ 6. Вычислить боковое ребро и бокъ основанія.

104) Вычислить боковую поверхность правильной усѣченной пирамиды съ квадратными основаніями, имѣющей высоту въ 5,2 фута и стороны основаній въ 6,4 фута и 4,8 фута. (См. задачу 101).

105) Ребро BC пирамиды ABCDFG (фиг. 283), имѣющей высоту h,

равно a и прямая bc сѣченія, параллельнаго къ основанію BCDFG, равна b. Вывести выраженія для высотъ: пирамиды $Abcdfg$ и усѣченной пирамиды $BCDFGbcdfg$.

ТЕОРЕМЫ.

106) Двѣ пирамиды равны, если основаніе, боковая грань и содержащійся между ними двугранный уголъ одной пирамиды соотвѣтственно равны основанію, боковой грани и заключающемуся между ними двугранному углу другой пирамиды, и кромѣ того эти грани одинаково расположены въ пирамидахъ.

107) Если раздѣлить противолежащія ребра SA и BC тетраэдра SABC на двѣ равныя части въ точкахъ E и F, и также раздѣлить противолежащія ребра SC и AB на двѣ равныя части въ точкахъ G и D, то точки E, D, F, G суть вершины параллелограма.

108) Сумма квадратовъ двухъ противолежащихъ ребръ SB и AC тетраэдра SABC равна удвоенной суммѣ квадратовъ прямыхъ EF и GD, соединяющихъ среднія точки E и F противолежащихъ ребръ SA и BC, и среднія точки G и D противолежащихъ ребръ SC и AB.

109) Въ тетраэдрѣ SABC сумма квадратовъ двухъ противолежащихъ ребръ SA и BC, увеличенная учетвереннымъ квадратомъ прямой DE, соединяющей среднія точки этихъ ребръ, равна суммѣ квадратовъ остальныхъ ребръ.

110) Прямыя DE, FG, HK, которыми соединяются среднія точки противолежащихъ ребръ SA и BC, SC и AB, SB и AC тетраэдра SABC, взаимно дѣлятся на двѣ равныя части.

111) Задача. По извѣстнымъ гранямъ тетраэдра опредѣлить, посредствомъ циркуля высоту и точку ея пересѣченія съ основаніемъ тетраэдра.

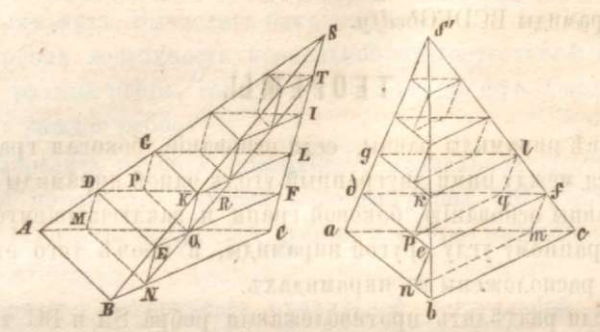
ЧЕТВЕРТАЯ ГЛАВА.

Объемы пирамиды, усѣченной пирамиды съ параллельными основаніями и усѣченной призмы.

102. **Теорема.** *Двѣ треугольныя пирамиды, имѣющія общую высоту и равномѣрныя основанія, равномѣрны.*

Данныя пирамиды SABC и $S'abc$ (фиг. 286) поставлены ихъ

Фиг. 286.



равномѣрными основаніями ABC и abc на одной и той-же плоскости; тогда, по равенству высотъ пирамидъ, ихъ вершины S и S' равно-отстоятъ отъ общей плоскости основаній. Раздѣлимъ ребро SC на какое-нибудь число n равныхъ частей въ точкахъ F, L, I, T и т. д. и чрезъ эти точки проведемъ плоскости параллельно къ общей плоскости основаній; тогда въ пирамидѣ SABC образуются сѣченія DEF, GKL и т. д. и въ пирамидѣ $S'abc$ сѣченія def, gkl и т. д. Такъ какъ основанія ABC и abc равномѣрны, то сѣченія DEF и def, равно-отстоящія отъ вершинъ S и S', также равномѣрны (99). По той-же причинѣ сѣченія GKL и gkl и вообще два сѣченія данныхъ пирамидъ, равно-отстоящія отъ вершинъ S и S', равномѣрны.

Проведя чрезъ точки D и E сѣченія DEF прямыя DM и EN параллельно къ ребру SC до пересѣченія M и N съ ребрами AC и BC, и соединивъ точки M и N, получимъ призму DEFMNC. Подобнымъ образомъ построимъ призму GKLPQF на сѣченіи GKL и еще призмы на каждомъ сѣченіи пирамиды SABC. Число призмъ, вписанныхъ въ пирамидѣ SABC, равно числу n частей CF, FL и т. д. Потомъ построимъ призмы $defanm$, $gkldpq$ и т. д. на сѣченіяхъ def, gkl и т. д. пирамиды $S'abc$; тогда въ этой пирамидѣ образуются также n вписанныхъ призмъ.

Призмы DEFMNC и $defanm$ равномѣрны (92, 1), потому-что ихъ высоты равны и основанія DEF и def равномѣрны. Также

призмы GKLPQF и *gkldpq*, и вообще двѣ призмы того-же самаго порядка, находящіяся въ данныхъ пирамидахъ, равномѣрны; слѣдовательно сумма V призмъ, вписанныхъ въ пирамидѣ SABC, равномѣрна суммѣ *v* призмъ, образовавшихся въ пирамидѣ S'*abc*.

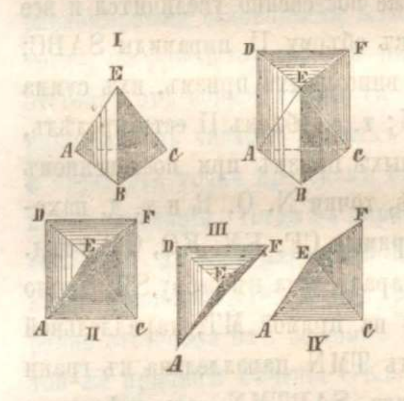
Раздѣливъ теперь ребро SC на $2n$ равныхъ частей и проведя плоскости чрезъ полученныя точки дѣленія параллельно къ основаніямъ ABC и *abc*, построимъ опять призмы на образовавшихся сѣченіяхъ данныхъ пирамидъ; тогда сумма V' призмъ, вписанныхъ въ пирамидѣ SABC, будетъ больше суммы V. Вообще если число равныхъ частей ребра SC будетъ постепенно увеличено, то сумма призмъ, вписанныхъ въ пирамидѣ SABC также постепенно увеличится и все болѣе и болѣе будетъ приближаться къ объему U пирамиды SABC; но какъ бы ни было увеличено число вписанныхъ призмъ, ихъ сумма всегда должна быть меньше объема U; т. е. объемъ U есть предѣлъ, къ которому стремится сумма вписанныхъ призмъ при постепенномъ увеличеніи числа n. Въ самомъ дѣлѣ, точки N, Q, R и т. д. находятся на одной прямой, потому-что прямыя CF, EN, KQ, GP и т. д. равны и параллельны, и прямая TN параллельна къ ребру SB. Точно также точки M, P и т. д. находятся на прямой MT, параллельной къ ребру SA; слѣдовательно плоскость TMN параллельна къ грани SAB, и образовавшійся многогранникъ SABTMN есть усѣченная пирамида съ параллельными основаніями, высота которой, т. е. разстояніе между плоскостями TMN и SAB, непремѣнно меньше части ST = CF. Если себѣ представить, что число частей ребра SC, постепенно увеличиваясь, сдѣлается больше всякой произвольно большой величины, то часть CF, все болѣе и болѣе уменьшаясь, будетъ приближаться къ нулю. При этомъ и высота усѣченной пирамиды SABTMN постепенно будетъ приближаться къ нулю, а потому также объемъ этой пирамиды все болѣе и болѣе долженъ приближаться къ нулю; но этотъ объемъ всегда долженъ быть больше разности, существующей между пирамидою SABC и суммою вписанныхъ въ ней призмъ; слѣдовательно при числѣ n, большемъ всякой произвольно

большой величины, разность между пирамидою SABC и суммою вписанныхъ въ ней призмъ, должна имѣть своимъ предѣломъ нуль. Точно такимъ-же образомъ доказывается, что разность между пирамидою S'abc и суммою вписанныхъ въ ней призмъ имѣетъ своимъ предѣломъ нуль. Такъ какъ суммы V и v вписанныхъ призмъ постоянно равномѣрны, то ихъ предѣлы, т. е. объемы пирамидъ SABC и S'abc должны быть равны (II, 17).

103. Теорема. *Объемъ пирамиды измѣряется одною третью произведенія ея основанія на высоту.*

1) Дана треугольная пирамида EABC (фиг. 287).

Фиг. 287.



Чрезъ вершины A и C проведемъ прямыя AD и CF параллельно къ ребру EB до пересѣченія D и F съ плоскостью, проведенною чрезъ вершину E параллельно къ основанію ABC; получимъ треугольную призму ABCDEF, имѣющую общее основаніе и общую высоту съ данною пирамидою. Образовавшаяся призма ABCDEF состоитъ изъ треугольной пирамиды EABC и четыреугольной пирамиды EADFC (или II). Проведя плоскость чрезъ ребра AE и EF, мы раздѣлимъ четыреугольную пирамиду (II) на двѣ треугольныя пирамиды EADF (или III) и EAFC (или IV). Эти пирамиды равномѣрны, потому-что у нихъ общая вершина E (слѣдовательно ихъ высоты равны) и ихъ основанія, равныя каждое половинѣ параллелограма ACFD (II), равномѣрны. Принявъ въ пирамидѣ (III) грань DEF за основаніе и точку A за вершину, мы замѣчаемъ, что эта пирамида ADEF имѣетъ общее основаніе и общую высоту съ призмою ABCDEF; слѣдовательно эта пирамида равномѣрна пирамидѣ EABC (или I). Такъ какъ три пирамиды (I, III и IV), составляющія призму ABCDEF, равномѣрны, то каждая изъ

нихъ есть треть этой призмы. Зная, что объемъ призмы ABCDEF измѣряется произведеніемъ ея основанія на высоту, мы заключаемъ, что объемъ пирамиды EABC измѣряется третьею частью этого произведенія.

2) Дана многоугольная пирамида ABCDEF (фиг. 288). Проведя плоскости чрезъ ея высоту AG и каждое изъ боковыхъ ребръ AB, AC, AD и т. д., мы разсѣчемъ ее на треугольныя пирамиды ABCG, ACDG, ADEG и т. д., имѣющія высоту AG и основаніями треугольники BCG, CDG, DEG и т. д., сумма которыхъ равна основанію данной пирамиды; слѣдовательно сумма этихъ пирамидъ, т. е. пирамида ABCDEF, измѣряется одною третью произведенія основанія BCDEF на высоту AG.

Фиг. 288.



Означивъ объемъ, основаніе и высоту пирамиды соотвѣтственно чрезъ V, A и h, получимъ для вычисленія ея объема слѣдующую общую формулу

$$V = {}^1/_3 A.h.$$

104. Слѣдствіе. 1) Двѣ пирамиды пропорціональны произведеніямъ ихъ основаній на высоты; т. е. если $V = {}^1/_3 A.h$ и $V' = {}^1/_3 A'.h'$, то

$$\frac{V}{V'} = \frac{Ah}{A'h'}.$$

2) Двѣ пирамиды съ равномѣрными основаніями относятся между собою, какъ ихъ высоты, т. е. если $A = A'$, то

$$\frac{V}{V'} = \frac{h}{h'}.$$

3) Двѣ пирамиды съ равными высотами относятся между собою, какъ ихъ основанія; т. е. если $h = h'$, то

$$\frac{V}{V'} = \frac{A}{A'}.$$

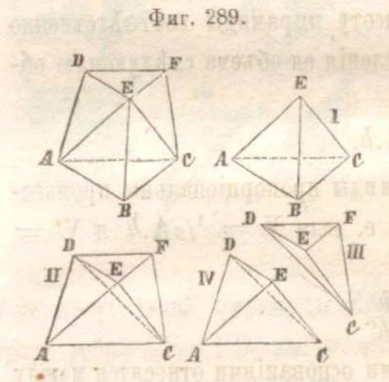
4) Двѣ пирамиды равномѣрны, если ихъ основанія равномѣрны и высоты равны.

5) Чтобы вычислить объемъ многогранника, должно раздѣлить этотъ многогранникъ на пирамиды, вычислить объемы этихъ пирамидъ и наконецъ взять ихъ сумму. Если внутри многогранника возможно найти точку, равно-отстоящую отъ его граней, то перпендикуляръ, опущенный изъ этой точки на одну изъ граней, будетъ общею высотою пирамидъ, составляющихъ многогранникъ. Въ такомъ случаѣ *объемъ равенъ одной трети поверхности многогранника, помноженной на перпендикуляръ.*

105. Теорема. *Усѣченная пирамида съ параллельными основаніями равномѣрна суммѣ трехъ пирамидъ, имѣющихъ общую высоту съ усѣченною пирамидою, и основаніями: нижнее основаніе, верхнее основаніе и среднюю геометрическую между этими основаніями усѣченной пирамиды.*

Дана усѣченная треугольная пирамида ABCDEF (фиг. 289) съ параллельными основаніями. Проведя плоскость EAC чрезъ ребро AC и діагонали AE и CE граней ABED и BCFE, мы узнаемъ, что данная усѣченная пирамида состоитъ изъ треугольной пирамиды EABC (или I) и четыреугольной пирамиды EACFD (или II). Потомъ проведя плоскость чрезъ ребра DE, CE и діагональ CD грани ACFD, мы узнаемъ, что пирамида II состоитъ изъ двухъ треугольныхъ пирамидъ ECDF (или III) и EACD (или IV); слѣдовательно данная усѣченная пирамида состоитъ изъ трехъ треугольныхъ пирамидъ I, III и IV.

Фиг. 289.



Такъ какъ пирамида I имѣетъ основаніемъ нижнее основаніе ABC данной усѣченной пирамиды и ея вершина E принадлежитъ верхнему основанію DEF, то высота пирамиды I равна высотѣ данной усѣченной пирамиды. Основаніе DEF пирамиды III есть осно-

ваніе данной усѣченной пирамиды и ея вершина C принадлежитъ нижнему основанію ABC; слѣдовательно высота пирамиды III равна высотѣ данной усѣченной пирамиды. Пирамиды IV и III, имѣющія общую высоту, относятся между собою, какъ ихъ основанія ADC и CDF (104, 3); т. е.

$$\frac{\text{EADC}}{\text{ECDF}}=\frac{\text{ADC}}{\text{CDF}}\ldots\ldots(1);$$

но такъ какъ треугольники ADC и CDF имѣютъ равныя высоты, то ихъ площади относятся между собою, какъ ихъ основанія AC и DF;

$$\text{т. е. } \frac{\text{ADC}}{\text{CDF}}=\frac{\text{AC}}{\text{DF}}\ldots(2).$$

Изъ полученныхъ пропорцій (1 и 2) составится пропорція

$$\frac{\text{EADC}}{\text{ECDF}}=\frac{\text{AC}}{\text{DF}}\ldots(3).$$

Зная (96, 2), что треугольники ABC и DEF подобны, и что площади подобныхъ треугольниковъ относятся между собою, какъ квадраты сходственныхъ сторонъ (II, 142), мы имѣемъ

$$\frac{\text{ABC}}{\text{DEF}}=\frac{\overline{\text{AC}}^2}{\text{DF}^2} \text{ или } \frac{\sqrt{\text{ABC}}}{\sqrt{\text{DEF}}}=\frac{\text{AC}}{\text{DF}}\ldots(4).$$

Наконецъ изъ пропорцій (3 и 4) мы получимъ

$$\frac{\text{EADC}}{\text{ECDF}}=\frac{\sqrt{\text{ABC}}}{\sqrt{\text{DEF}}}; \text{ откуда}$$

$$\text{EADC}=\text{ECDF}.\frac{\sqrt{\text{ABC}}}{\sqrt{\text{DEF}}}\ldots\ldots(5).$$

Зная, что объемъ пирамиды ECDF равенъ $^1/_3\, h$. DEF, гдѣ h есть высота усѣченной пирамиды ABCDEF, мы замѣнимъ въ выраженіи (5) объемъ ECDF равною ему величиною; получимъ

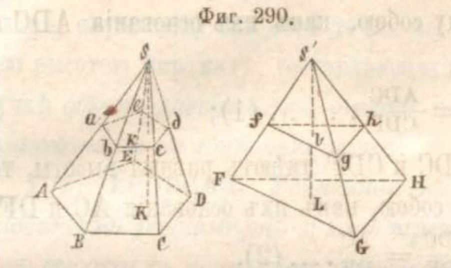
$$\text{EADC}={}^1/_3 h.\text{DEF}.\frac{\sqrt{\text{ABC}}}{\sqrt{\text{DEF}}}={}^1/_3 h\sqrt{\text{ABC}\,.\,\text{DEF}},$$

гдѣ множитель $\sqrt{\text{ABC.DEF}}$ выражаетъ среднюю геометрическую между площадями основаній ABC и DEF. Отсюда мы заключаемъ, что пирамида EADC равномѣрна такой пирамидѣ, коей высота равна

высотѣ данной усѣченной пирамиды и основанiе равно средней геометрической между основанiями ABC и DEF.

2) Разсѣченiемъ пирамиды SABCDE (фиг. 290) плоскостью, параллельною къ основанiю, образовалась усѣченная пирамида ABCDE$abcde$.

Фиг. 290.



На плоскости основанiя ABCDE построимъ треугольную пирамиду S'FGH такимъ образомъ, чтобы ея основанiе FGH было равномѣрно основанiю ABCDE и высота S'L равнялась высотѣ S'K; тогда (104, 4) построенная и данная пирамиды равномѣрны. На высотѣ S'L отложимъ часть S'l, равную отрѣзку Sk высоты SK и чрезъ точку l проведемъ плоскость параллельно къ основанiю FGH: тогда по предъидущему (99) сѣченiя fgh и $abcde$ равномѣрны и также (104, 4) пирамиды S$abcde$ и S'fgh равномѣрны. Такъ какъ ABCDE$abcde$=SABCDE−S$abcde$, FGHfgh= S'FGH−S'fgh, SABCDE=S'FGH и S$abcde$=S'fgh, то усѣченныя пирамиды ABCDE$abcde$ и FGHfgh должны быть равномѣрны. Отсюда мы заключаемъ, что объемъ усѣченной многогранной пирамиды равенъ также суммѣ объемовъ трехъ пирамидъ, имѣющихъ общую высоту, равную высотѣ данной пирамиды, и основанiями: верхнее основанiе, нижнее основанiе и среднюю геометрическую между этими основанiями усѣченной пирамиды.

Назвавъ объемъ усѣченной пирамиды съ параллельными основанiями чрезъ V, ея основанiя чрезъ A и a и ея высоту чрезъ h, получимъ общую формулу

$$V = {}^1/_3 Ah + {}^1/_3 ah + {}^1/_3 h\sqrt{Aa} = \frac{h}{3}(A + a + \sqrt{Aa}).$$

106. Слѣдствiе. Если извѣстна площадь основанiя ABCDE= A и дано отношенiе $\frac{m}{n}$ между сходственными сторонами ab и AB осно-

ваній, то между площадями a и A основаній должно существовать отношеніе

$$\frac{a}{A}=\frac{m^2}{n^2};$$

$$\text{откуда } a=\frac{m^2}{n^2}A.$$

Подставивъ эту величину a въ выведенное выраженіе V, получимъ

$$V=\frac{Ah}{3}\left(1+\frac{m}{n}+\frac{m^2}{n^2}\right).$$

Эта формула удобно примѣняется къ рѣшенію численныхъ вопросовъ.

Примѣръ. Вычислить объемъ усѣченной пирамиды, высота которой равна 3 футамъ и основанія суть правильные шестиугольники съ сторонами въ 1 футъ и 2 фута.

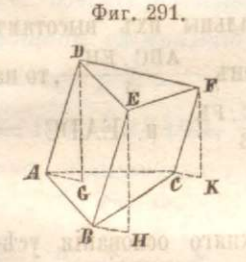
Площадь $A=6\sqrt{3}$. Отношеніе $\frac{m}{n}={}^1/_2$. Высота $h=3$. Объемъ

$$V=\frac{3.6\sqrt{3}}{3}(1+{}^1/_2+{}^1/_4)=18{,}186525 \text{ куб. фут.}$$

107. **Теорема.** *Объемъ усѣченной треугольной призмы равенъ суммѣ объемовъ трехъ треугольныхъ пирамидъ, коихъ общее основаніе есть нижнее основаніе призмы и соотвѣтствующія вершины суть вершины верхняго основанія.*

Дана усѣченная треугольная призма ABCDEF (фиг. 291) и изъ вершинъ D, E, F ея верхняго основанія опущены перпендикуляры DG, EH, FK на плоскость нижняго основанія. Чрезъ ребро AC и діагонали EA и EC граней BADE и BCFE проведя плоскость, мы узнаемъ, что данная призма состоитъ изъ треугольной пирамиды EABC и четыреугольной пирамиды EACFD.

Фиг. 291.



Чрезъ ребра EC и ED проведя плоскость, мы раздѣлимъ пирамиду EACFD на двѣ треугольныя пирамиды EADC и ECDF; слѣдовательно данная усѣченная призма состоитъ изъ трехъ треугольныхъ пирамидъ EABC, EADC, ECDF. Пирамида EABC имѣетъ основа-

ніемъ треугольникъ ABC и высоту EH. Принявъ точки D и A, лежащія на прямой, параллельной къ грани BCEF, за вершины пирамидъ ECDF и EABC, мы узнаемъ, что эти пирамиды относятся между собою, какъ ихъ основанія ECFи ECB (10 4, 3); т. е. $\frac{ECDF}{EABC}=\frac{ECF}{ECB}$. Треугольники ECF и ECB, находящіеся между параллельными прямыми FC и EB, имѣютъ равныя высоты и относятся между собою, какъ ихъ основанія; т. е. $\frac{ECF}{EBC}=\frac{FC}{EB}$. Изъ полученныхъ пропорцій составится $\frac{ECDF}{EABC}=\frac{FC}{EB}$; но такъ какъ треугольники FCK и EBH подобны и слѣдовательно $\frac{FC}{EB}=\frac{FK}{EH}$, то $\frac{ECDF}{EABC}=\frac{FK}{EH}$. Пирамиды EADC и ECDF, имѣющія общую вершину и слѣдовательно общую высоту, относятся между собою, какъ ихъ основанія; т. е. $\frac{EADC}{ECDF}=\frac{DCA}{DCF}$. Треугольники DCA и DCF, заключенные между параллельными прямыми AD и CF, имѣютъ равныя высоты и слѣдовательно относятся между собою, какъ ихъ основанія; т. е. $\frac{DCA}{DCF}=\frac{DA}{FC}$. Изъ двухъ послѣднихъ пропорцій составится $\frac{EADC}{ECDF}=\frac{DA}{FC}$; но изъ подобныхъ треугольниковъ ADG и CFK мы имѣемъ $\frac{DG}{FK}=\frac{DA}{FC}$; слѣдовательно $\frac{EADC}{ECDF}=\frac{DG}{FK}$. Такъ какъ пирамиды EABC, ECDF, EADC пропорціональны ихъ высотамъ EH, FK, DG и объемъ пирамиды EABC равенъ $\frac{ABC\,.\,EH}{3}$, то на основаніи (104, 2) мы имѣемъ $ECDF=\frac{ABC\,.\,FK}{3}$ и $EADC=\frac{ABC.DG}{3}$.

Назвавъ разстоянія вершинъ D, E, F верхняго основанія усѣченной призмы отъ нижняго основанія ABC чрезъ h, h', h'' и площадь основанія ABC чрезъ A, получимъ слѣдующее выраженіе объема V усѣченной призмы

$$V={}^1/_3A.h+{}^1/_3A.h'+{}^1/_3A.h''={}^1/_3A\ (h+h'+h'').$$

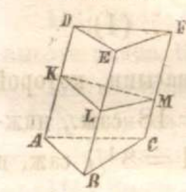
108. Слѣдствіе. Въ усѣченной прямой призмѣ перпендикуляры DG, EH, FK совпадаютъ съ боковыми ребрами DA, EB, FC и основаніе ABC сдѣлается прямымъ сѣченіемъ; тогда выведенная формула обратится въ

$$V = ABC.\left(\frac{AD+BE+CF}{3}\right);$$

слѣдовательно *усѣченная прямая призма измѣряется произведеніемъ ея прямаго сѣченія на среднюю ариѳметическую ея бобоковыхъ реберъ.*

Основываясь на формулѣ, по которой вычисляется объемъ усѣченной прямой призмы, можно вывести еще выраженіе для объема усѣченной наклонной призмы. Для этого раздѣлимъ усѣченную наклонную призму ABCDEF (фиг. 292) прямымъ сѣченіемъ KLM на двѣ усѣченныя прямыя призмы KLMABC и KLMDEF. По предъидущему объемы этихъ призмъ равняются

Фиг. 293.



$$KLMABC = KLM.\left(\frac{AK+BL+CM}{3}\right),$$

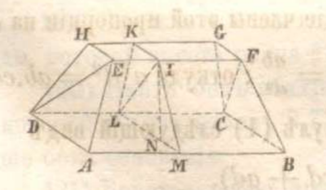
$$KLMDEF = KLM.\left(\frac{KD+LE+MF}{3}\right);$$

откуда $ABCDEF = KLM.\left(\frac{AD+BE+CF}{3}\right);$

т. е. *объемъ усѣченной наклонной призмы равенъ произведенію площади ея прямаго сѣченія на среднюю ариѳметическую ея боковыхъ ребръ.*

109. **Задача.** *Вывести выраженіе для объема многогранника, ограниченнаго параллельными прямоугольниками* ABCD *и* EFGH *(фиг. 293) и трапеціями* ABFE, CDHG, AEHD *и* BCGF, *зная, что* $AB = a$, $BC = b$, $EF = c$, $FG = d$ *и разстояніе* IN *между гранями* ABCD *и* EFGH *равно* h.

Фиг. 293.



Проведемъ прямое сѣченіе IKLM и

потомъ разсѣчемъ данный многогранникъ плоскостью, проходящею чрезъ ребра EF и DC на двѣ усѣченныя наклонныя призмы ADEBCF и DEHCFG. Объемъ призмы ADEBCF (см. 108), имѣющей прямое сѣченіе ILM, равенъ $v = \text{ILM}.\left(\frac{2a+c}{3}\right) = \frac{bh}{6}.(2a+c)$, потому-что площадь треугольника $\text{ILM} = \frac{\text{LM.IN}}{2} = \frac{bh}{2}$. Объемъ призмы DEHCFG, имѣющей прямое сѣченіе IKL, равенъ $v' = \text{IKL}.\left(\frac{2c+a}{3}\right) = \frac{dh}{6}.(2c+a)$, потому-что площадь треугольника $\text{IKL} = \frac{\text{IK.IN}}{2} = \frac{dh}{2}$. Наконецъ объемъ даннаго многогранника равенъ

$$\text{V} = v + v' = \frac{bh}{6}.(2a+c) + \frac{dh}{6}.(2c+a) \ldots\ldots. (1).$$

По этой формулѣ вычислимъ объемъ земляной насыпи, которой нижняя длина AB = 25 саж., верхняя длина EF = 18 саж., нижняя ширина AD = $15\,^1/_2$ саж., верхняя ширина EH = $8\,^1/_4$ саж. и высота IN = $3\,^1/_2$ саж.; тогда

$$\text{V} = \frac{15^1/_2.3^1/_2}{6}.(2.25+18) + \frac{8^1/_4 + 3^1/_2}{6}.(2.18+25) =$$

$$908\,^{19}/_{48} \text{ куб. саж.}$$

Въ выведенномъ выраженіи V предположивъ $d = 0$, получимъ формулу

$$\text{V}' = \frac{bh}{6}(2a+c) \ldots\ldots (2),$$

которою выражается объемъ усѣченной треугольной призмы, имѣющей основаніями равные равнобедренные треугольники, одною боковою гранью прямоугольникъ и остальными гранями трапеціи.

Предположимъ, что прямоугольники ABCD и EFGH подобны, т. е. $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$. Помноживъ предъидущіе члены этой пропорціи на a и послѣдующіе члены на d, получимъ $\frac{a^2}{cd} = \frac{ab}{d^2}$; откуда $a^2d^2 = ab.cd$ и $ad = \sqrt{ab.cd}$. Потомъ дадимъ формулѣ (1) слѣдующій видъ

$$\text{V} = \frac{h}{6}.(2ab + bc + 2cd + ad).$$

Такъ какъ по заданію $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ и $ad=bc$, то послѣднее выраженіе обратится въ

$$V''=\frac{h}{6}(2ab+2cd+2ad)=\frac{h}{3}(ab+cd+ad).$$

Наконецъ подставивъ $\sqrt{ab.cd}$ вмѣсто ad, получимъ формулу

$$V''=\frac{h}{3}(ab+cd+\sqrt{ab.cd}),$$

которою выражается объемъ усѣченной пирамиды съ параллельными основаніями (105, 2).

ЧИСЛЕННЫЕ ВОПРОСЫ.

112) Вычислить объемъ правильной шестиугольной пирамиды, коей высота равна 18 фут. и бокъ основанія равенъ 5 футамъ.

113) Бокъ квадратнаго основанія правильной пирамиды равенъ 3,2 фута и ея боковое ребро равно 15,8 фута, Вычислить объемъ этой пирамиды.

114) Вычислить объемъ правильной треугольной пирамиды, коей боковое ребро равно 3,2 фута и периметръ основанія равенъ 8,4 фута.

115) Вычислить объемъ треугольной пирамиды, у которой каждое боковое ребро равно 6 футамъ.

116) Высота пирамиды равна 8,4 фута и стороны основанія содержатъ 2,4 фута, 4 фута и 3,2 фута. Вычислить объемъ этой пирамиды.

117) Боковая поверхность правильной пирамиды равна 50 квадратнымъ футамъ и бокъ квадратнаго основанія равенъ 2,5 фута. Вычислить объемъ этой пирамиды.

118) Боковая поверхность правильной пирамиды, имѣющей квадратное основаніе и высоту въ 14 футъ, содержитъ 735 квадратныхъ футъ. Вычислить объемъ этой пирамиды.

119) Вычислить бокъ квадратнаго основанія правильной пирамиды, которой высота равна 12 фут. и объемъ равенъ 768 куб. фут.

120) Найти бокъ квадратнаго основанія правильной пирамиды, которой объемъ равенъ 7,775 куб. фут. и боковое ребро втрое больше бока основанія.

121) Боковое ребро правильной шестиугольной пирамиды, кото-

торой объемъ равенъ 96 куб. фут., вдвое больше стороны ея правильнаго основанія. Сколько футъ содержитъ бокъ основанія?

122) Всѣ ребра правильной пирамиды съ квадратнымъ основаніемъ, содержащей 1,8856 куб. фута, равны. Сколько футъ содержитъ каждое ребро?

123) Высота правильной пирамиды, содержащей 66,429 куб. фута, 15 футами больше бока ея квадратнаго основанія. Сколько футъ содержитъ эта высота?

124) Сколько вѣсу въ пирамидѣ изъ песчанника, коей боковое ребро содержитъ 4 ар., ребро AB прямоугольнаго основанія ABCD равно $1^3/_8$ ар. и ребро BC равно $1^1/_8$ ар., если вѣсъ куб. вершка воды равенъ 20,58 золот. и вѣсъ песчанника составляетъ 2,11 вѣса воды?

125) Нижнее основаніе усѣченной пирамиды содержитъ 16 квад. футъ, верхнее основаніе 9 квад. футъ и высота равна 8,7 фута. Вычислить объемъ этой пирамиды.

126) Вывести выраженіе для объема правильной усѣченной пирамиды съ крадратными основаніями, означивъ бокъ нижняго основанія чрезъ a, бокъ верхняго основанія чрезъ b и высоту пирамиды чрезъ h.

127) Вычислить площадь большаго основанія усѣченной пирамиды, которой объемъ содержитъ 916 куб. футъ, высота равна 12 футамъ и площадь меньшаго основанія равна 25 квад. фут.

128) Объемъ усѣченной правильной четыреугольной пирамиды содержитъ 21,546 куб. фут. и стороны ея основанія равны 2,7 фут. и 1,8 фут. Сколько футъ содержитъ ея высота?

129) Объемъ усѣченной правильной четыреугольной пирамиды, коей высота равна 15,6 фута, содержитъ 353,392 куб. фут. Сколько футъ содержитъ сторона ея большаго квадратнаго основанія, если бокъ меньшаго основанія равенъ 3,4 фута?

130) Усѣченная правильная треугольная пирамида, въ которой бокъ нижняго основанія 2 футами больше бока верхняго основанія, содержитъ 42,434 куб. фут. и 6 футъ высоты. Вычислить стороны этихъ основаній.

131) Требуется приготовить желѣзную гирю, вѣсомъ въ 5 пудъ, въ видѣ усѣченной правильной шестигранной пирамиды, коей верхнее ребро должно равняться 6 дюймамъ и нижнее ребро 4 дюймамъ. Зная,

что вѣсъ кубическаго дюйма воды равенъ 3,84 дюйма и желѣзо въ 7,2 раза тяжелѣе воды, опредѣлить высоту гири.

132) Вычислить объемъ усѣченной призмы, коей боковыя ребра равны 12,4 фут., 15,6 фут. и 11 фут., а ея прямое сѣченіе равносторонній треугольникъ съ периметромъ въ 7,2 фута.

133) Опредѣлить площадь прямаго сѣченія усѣченной треугольной призмы, содержащей $28^{13}/_{16}$ куб. фут., зная, что ея боковыя ребра равны $8^{3}/_{4}$ фут., $7^{4}/_{5}$ фут. и $6^{1}/_{2}$ фут.

134) Боковыя ребра усѣченной треугольной призмы относятся между собою, какъ числа 7.9 и 14, ея объемъ равенъ 100,8 куб. фут. и площадь ея прямаго сѣченія равна 8,4 квад. фут. Вычислить боковыя ребра.

135) Стороны квадратныхъ основаній усѣченной пирамиды равны 4 и $2^{1}/_{2}$ фут., а каждое боковое ребро равно 6 фут. Вычислить объемъ этой пирамиды.

136) Требуется вырыть ровъ такимъ образомъ, чтобы его верхняя длина равнялась 45 саж., глубина равнялась 6 фут., верхняя ширина равнялась $2^{1}/_{2}$ саж., нижняя длина равнялась 42 саж. и нижняя ширина равнялась $5^{1}/_{2}$ фут. Вычислить кубическое содержаніе этого рва.

137) Для проложенія желѣзной дороги требуется прорыть гору такимъ образомъ, чтобы выемка представляла усѣченную треугольную призму, которой прямоугольная грань ACFD находится на горизонтальной плоскости, проходящей чрезъ подошву горы, а горизонтальное ребро BE проходитъ чрезъ вершину горы. Зная, что высота GH горы равна $5^{1}/_{2}$ саж., длина BE = 11 саж., длина CF = 20 саж. и длина AC = 70 саж., опредѣлить объемъ этой выемки.

ТЕОРЕМЫ.

138) Если чрезъ ребро BC правильной треугольной пирамиды ABCD и средину E противолежащаго ребра AD провести плоскость, то пирамида раздѣлится на двѣ равномѣрныя треугольныя пирамиды BACE и BCDE.

139) Параллелопипедъ, построенный на трехъ ребрахъ SA, AC, AC треугольной пирамиды SABC, сходящихся въ вершинѣ A, въ шесть разъ больше этой пирамиды.

140) Плоскости, проведенныя чрезъ боковыя ребра SA, SB, SC треугольной пирамиды и соотвѣтственно раздѣляющія углы BAC

ABC и ACB на двѣ равныя части, пересѣкаются по направленію одной и той-же прямой.

141) Плоскости, проведенныя чрезъ боковыя ребра какой-нибудь пирамиды перпендикулярно къ ея основанію, пересѣкаются по направленію одной прямой.

142) Если чрезъ среднія точки ребръ треугольной пирамиды SABC провести прямыя параллельно къ противолежащимъ ребрамъ, то образуется пирамида, равная данной.

143) Плоскости, раздѣляющія двугранные углы BASC, ABSC, BCSA треугольной пирамиды соотвѣтственно на двѣ равныя части, пересѣкаются по направленію одной той-же прямой.

144) Если боковыя грани SAB, SBC и SAC треугольной пирамиды SABC равны, то сумма перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ какой-нибудь точки D основанія ABC на боковыя грани, есть величина постоянная.

145) Прямая EF, соединяющая среднія точки E и F двухъ противолежащихъ ребръ AB и CD тетраэдра ABCD, раздѣляетъ на двѣ равныя части всякую прямую GH, пересѣкающуюся съ прямою EF и проведенную между двумя противолежащими ребрами AC и BD.

ПЯТАЯ ГЛАВА.

Подобные многогранники. Отношеніе ихъ поверхностей и объемовъ. Правильные многогранники.

110. Два многогранника называются *подобными*, если ихъ грани соотвѣтственно подобны и многогранные углы, составляемые подобными гранями, равны. Вершины равныхъ многогранныхъ угловъ двухъ подобныхъ многогранниковъ называются *соотвѣтствующими вершинами*. Два ребра, коихъ оконечности суть соотвѣтствующія вершины двухъ подобныхъ многогранниковъ, называются *сходственными ребрами*.

Въ двухъ подобныхъ многогранникахъ, по равенству многогранныхъ угловъ, всѣ двугранные и плоскіе углы должны быть соотвѣтственно равны.

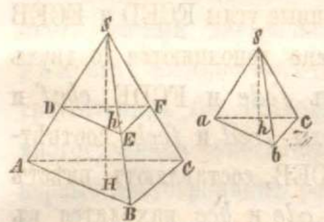
111. **Теорема.** *Плоскостью, проведенною параллельно къ основанію пирамиды, опредѣляется пирамида, подобная данной.*

Въ данной пирамидѣ SABCDE (фиг. 290) образуется сѣченіе *abcde* плоскостью, проведенною параллелюно къ основанію ABCDE; это сѣченіе служитъ основаніемъ пирамидѣ S*abcde*, которая должна быть подобна данной пирамидѣ SABCDE. Въ самомъ дѣлѣ, многоугольники ABCDE и *abcde* подобны (96, 2) и по параллельности прямыхъ AB и *ab*, BC и *bc*, CD и *cd* и т. д. боковыя грани SAB и S*ab*, SBC и S*bc*, SCD и S*cd* и т. д. также подобны. Потомъ пирамиды SABCDE и S*abcde* имѣютъ общій многогранный уголъ S; также трегранные углы A и *a* равны, потому-что они содержатъ общій двугранный уголъ BASE, $\angle SAB = \angle Sab$ и $\angle SAE = \angle Sae$. Точно также доказывается равенство прочихъ трегранныхъ угловъ.

112. **Теорема.** *Двѣ треугольныя пирамиды подобны, если двѣ грани одной подобны двумъ гранямъ другой пирамиды, одинаково съ ними расположеннымъ, и двугранные углы, заключенные между этими гранями, равны.*

Въ данныхъ пирамидахъ SABC и *sabc* (фиг. 294) грани SAB и SAC соотвѣтственно подобны гранямъ *sab* и *sac*, и двугранные углы BASC и *basc* равны. Помѣстимъ пирамиду *sabc* въ пирамиду SABC такимъ образомъ, чтобы вершина *s* совпала въ вершиною S, и грани, составляющія двугранный уголъ *basc*, улеглись на граняхъ, составляющихъ двугранный уголъ BASC. Такъ какъ треугольникъ *sab* подобенъ треугольнику SAB и вершина *a* совпала съ точкою D ребра SA, то ребро *sb* помѣстится на ребрѣ SB и точка *b* упадетъ въ такую точку E ребра SB, чтобы ребро *ab* приняло положеніе DE, параллельное къ AB. Также по подобію треугольниковъ *sac* и SAC, ребро *sc* помѣстится на ребрѣ SC и точка *c* упадетъ въ такую точку F ребра SC, чтобы прямая DF была параллельна къ ребру AC

Фиг. 294.

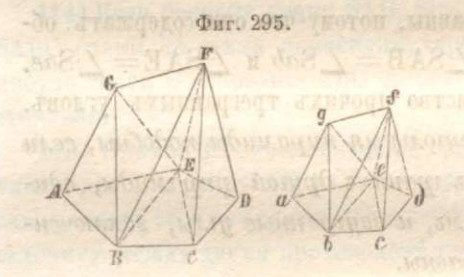


Отсюда слѣдуетъ, что основаніе *abc* приметъ положеніе треугольника DEF, коего плоскость по предъидущему (39) параллельна къ основанію ABC. Зная (111), что пирамида SDEF подобна пирамидѣ SABC, мы заключаемъ, что также пирамиды *sabc* и SABC подобны.

113. **Теорема.** *Два многогранника, состоящіе изъ одинакаго числа подобныхъ и одинаково расположенныхъ тетраэдровъ, подобны.*

Пирамиды FCDE и *fcde*, EBCF и *ebcf*, и BEFG и *befg* и т. д. подобны и одинаково расположены (фиг. 295). Требуется доказать, что данные многогранники подобны.

Фиг. 295.



a) Сходственныя грани данныхъ многогранниковъ, состоящихъ изъ одинакаго числа подобныхъ и одинаково расположенныхъ треугольниковъ, подобны; такъ напримѣръ грани BCDE и *bcde* подобны, потому-что треугольники CDE и *cde*, BCE и *bce*, ихъ составляющіе, подобны. Кромѣ того треугольники CDE и BCE находятся въ одной плоскости, а потому двугранные углы FCED и FCEB двухъ тетраэдровъ FCDE и EBCF взаимно дополняются до двухъ прямыхъ угловъ. По подобію тетраэдровъ *fcde* и FCDE, *ebcf* и EBCF мы заключаемъ, что двугранные углы *fced* и *fceb*, соотвѣтствующіе двуграннымъ угламъ FCED и FCEB, составляютъ вмѣстѣ два прямые угла; а потому треугольники *cde* и *bce* находятся въ одной плоскости и составляютъ грань *bcde*, подобную грани BCDE.

b) Многогранные углы данныхъ многогранниковъ равны, потому-что сходственныя грани подобны и одинаково расположены; слѣдовательно всѣ плоскіе углы должны быть равны и одинаково расположены. Кромѣ того соотвѣтствующіе двугранные углы этихъ многогранныхъ угловъ равны, потому-что два соотвѣтствующіе двугранные угла, какъ напримѣръ BAGE и *bage*, принадлежащіе двумъ подоб-

нымъ тетраэдрамъ GABE и *gabe*, равны; или-же два соотвѣтствующіе двугранные угла составлены изъ суммы соотвѣтственно равныхъ двугранныхъ угловъ; такъ напримѣръ двугранный уголъ CBEA, образуемый двумя гранями BCDE и ABE перваго многогранника и состоящій изъ трехъ двугранныхъ угловъ BCEF, FEBG, GEBA тетраэдровъ EBCF, BEFG, GABE, равенъ двугранному углу *cbea*, образуемому двумя гранями *bcde* и *abe* втораго многогранника и состоящему изъ трехъ двугранныхъ угловъ *bcef*, *febg*, *geba* тетраэдровъ *ebcf*, *befg*, *gabe*, потому-что эти тетраэдры по заданію подобны тетраэдрамъ EBCF, BEFG, GABE и одинаково съ ними расположены.

114. Обратное предложеніе. *Два подобные тетраэдра могутъ быть раздѣлены на одинакое число подобныхъ и одинаково расположенныхъ тетраэдровъ.*

Предположимъ что точка F (фиг. 295) лежитъ внутри даннаго многогранника. Соединивъ эту точку съ вершинами многогранника, мы раздѣляемъ его на тетраэдры. Такъ какъ вершинамъ C, D, E образовавшагося тетраэдра FCDE соотвѣтствуютъ вершины *c*, *d*, *e* втораго многогранника, то мы проведемъ плоскость *fce* такимъ образомъ, чтобы надъ плоскостью *cde* образовался двугранный уголъ *dcef*, равный двугранному углу DCEF, составляемому плоскостью FCE надъ плоскостью CDE. Потомъ построимъ въ плоскости *fce*, треугольникъ *fce*, подобный треугольнику FCE, и раздѣлимъ второй многогранникъ относительно точки *f* на тетраэдры точно такъ, какъ первый многогранникъ раздѣленъ на тетраэдры относительно точки F. Теперь докажемъ, что тетраэдры, образовавшіеся въ данныхъ многогранникахъ, соотвѣтственно подобны, и для примѣра сравнимъ тетраэдры FBCE и *fbce*. Грани FEC и *fec* этихъ тетраэдровъ, принадлежащія подобнымъ тетраэдрамъ FCED и *fced*, подобны. Также грани ECB и *ecb*, какъ соотвѣтствующія грани данныхъ многогранниковъ, подобны. Кромѣ того, если треугольники ECD и BCE лежатъ въ одной плоскости, то двугранные углы BCEF и *bcef*, которыми равные двугранные углы DCEF и *dcef* дополняются до двухъ

прямыхъ угловъ, должны быть равны; но также если треугольники ECD и BCE не лежатъ въ одной плоскости, то двугранные углы BCEF и *bcef* равны, потому-что BCEF = BCED — DCEF и *bcef* = *bced* — *dcef*, гдѣ двугранные углы BCED и *bced* данныхъ многогранниковъ по заданію равны и двугранные углы DCEF и *dcef* подобныхъ тетраэдровъ FCDE и *fcde* равны. Отсюда слѣдуетъ, что тетраэдры FBCE и *fbce* во всякомъ случаѣ подобны (112). Точно также доказывается подобіе остальныхъ тетраэдровъ.

115. Слѣдствіе. Двѣ точки F и *f* называются *соотвѣтствующими*, если они взяты относительно двухъ подобныхъ многогранниковъ такимъ образомъ, что прямыми, соединяющими точку F съ вершинами C, D, E перваго многогранника, и прямыми, соединяющими точку *f* съ соотвѣтствующими вершинами *c*, *d*, *e* втораго многогранника, образуются два подобные и одинаково расположенные тетраэдра FCDE и *fcde*.

Двѣ прямыя FG и *fg* называются *сходственными* относительно двухъ подобныхъ многогранниковъ, если оконечности F и G, и также *f* и *g*, суть соотвѣтствующія точки.

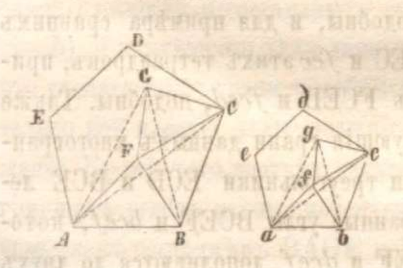
116. Слѣдствіе. Сходственныя ребра двухъ подобныхъ многогранниковъ пропорціональны. Въ самомъ дѣлѣ, изъ подобныхъ треугольниковъ CDF и *cdf*, DEF и *def*, EFG и *efg* и т. д. мы имѣемъ

$$\frac{CD}{cd} = \frac{DF}{df} = \frac{FE}{fe} \text{ и т. д.}$$

117. Теорема. *Двѣ какія-нибудь сходственныя прямыя пропорціональны сходственнымъ гранямъ двухъ подобныхъ многогранниковъ.*

Даны двѣ сходственныя грани ABCDE и *abcde* (фиг. 296) двухъ подобныхъ многогранниковъ и двѣ какія-нибудь сходственныя прямыя FG и *fg*. Построимъ тетраэдры FABC и *fabc*, и тетраэдры GABC и *gabc*. По подобію тетраэдровъ FABC и *fabc*, и тетраэдровъ GABC и *gabc*, также тетраэдры FACG и *facg* должны быть по-

Фиг. 296.



добны. Въ самомъ дѣлѣ, грани FAC и GAC соотвѣтственно подобны гранямъ fac и gac и двугранные углы FACG и $facg$ равны, потому-что FACG=FACB—GACB, $facg=facb-gacb$, FACB$=facb$ и GACB$=gacb$. Изъ подобныхъ тетраэдровъ FABC и $fabc$ получится $\frac{AB}{ab}=\frac{AC}{ac}$ и изъ подобныхъ тетраэдровъ FACG и $facg$ выводится $\frac{FG}{fg}=\frac{AC}{ac}$; слѣдовательно $\frac{FG}{fg}=\frac{AB}{ab}$.

118. **Теорема.** *Объемы двухъ подобныхъ пирамидъ относятся между собою, какъ кубы сходственныхъ ребръ.*

1) Даны два подобные тетраэдра SABC и $sabc$ (фиг. 294). Помѣстимъ меньшій тетраэдръ въ большемъ такимъ образомъ, чтобы основаніе abc приняло положеніе DEF, параллельное къ основанію ABC. Объемъ тетраэдра SABC, имѣющаго основаніе ABC и высоту SH, равенъ $V=\frac{ABC.SH}{3}$ и объемъ тетраэдра, имѣющаго основаніе DEF и высоту Sh, равенъ $v=\frac{DEF.Sh}{3}$; а потому отношеніе между этими объемами равно

$$\frac{V}{v}=\frac{ABC.SH}{DEF.Sh};$$

но по параллельности плоскостей DEF и ABC мы имѣемъ (96, 97)

$$\frac{ABC}{DEF}=\frac{\overline{SH}^2}{\overline{Sh}^2} \text{ и } \frac{SH}{Sh}=\frac{SA}{SD}=\frac{AB}{DE},$$

слѣдовательно

$$\frac{V}{v}=\frac{\overline{SH}^3}{\overline{Sh}^3}=\frac{\overline{AB}^3}{\overline{DE}^3}.$$

2) Даны два подобные многогранника V и V', которые раздѣлены на одинакое число подобныхъ и одинаково расположенныхъ тетраэдровъ P, P', P''....., p, p', p''.... Зная, что сходственныя ребра подобныхъ многогранниковъ пропорціональны (116) и объемы подобныхъ тетраэдровъ пропорціональны кубамъ ихъ сходственныхъ ребръ, мы имѣемъ

$$\frac{AB}{ab}=\frac{BC}{bc}=\frac{CD}{cd}=\text{и т. д. и}$$

$$\frac{P}{p}=\frac{\overline{AB}^3}{\overline{ab}^3},\ \frac{P'}{p'}=\frac{\overline{BC}^3}{\overline{bc}^3},\ \frac{P''}{p''}=\frac{\overline{CD}^3}{\overline{cd}^3}$$ и т. д.; откуда

$$\frac{P}{p}=\frac{\overline{AB}^3}{\overline{ab}^3},\ \frac{P'}{p'}=\frac{\overline{AB}^3}{\overline{ab}^3},\ \frac{P''}{p''}=\frac{\overline{AB}^3}{\overline{ab}^3}$$ и т. д.,

$$\frac{P}{p}=\frac{P'}{p'}=\frac{P''}{p''}=\ldots.=\frac{\overline{AB}^3}{\overline{ab}^3}$$ и наконецъ

$$\frac{P+P'+P''+\ldots.}{p+p'+p''+\ldots.}=\frac{\overline{AB}^3}{\overline{ab}^3}.$$

119. Слѣдствіе. Такъ какъ площади подобныхъ треугольниковъ пропорціональны квадратамъ сходственныхъ сторонъ, то (фиг. 295)

$$\frac{ABE}{abe}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{ab}^2},\ \frac{BEC}{bec}=\frac{\overline{BC}^2}{\overline{bc}^2},\ \frac{CDE}{cde}=\frac{\overline{CD}^2}{\overline{cd}^2}$$ и т. д.,

но $\frac{AB}{ab}=\frac{BC}{bc}=\frac{CD}{cd}=$ и т. д., слѣдовательно

$$\frac{ABE}{abe}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{ab}^2},\ \frac{BEC}{bec}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{ab}^2},\ \frac{CDE}{cde}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{ab}^2}$$ и т. д.;

откуда

$$\frac{ABE+BEC+CDE+\ldots.}{abe+bec+cde+\ldots.}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{ab}^2},$$

т. е. *поверхности двухъ подобныхъ многогранниковъ пропорціональны квадратамъ ихъ сходственныхъ ребръ.*

120. **Примѣръ I.** *Даны двѣ подобныя четыреугольныя пирамиды съ квадратными основаніями. Высота первой пирамиды равна 4,8 фут., ея бокъ основанія равенъ 2,5 фут. и объемъ второй пирамиды равенъ 8 куб. фут. Вычислить высоту и бокъ основанія второй пирамиды.*

Объемъ первой пирамиды равенъ $^1/_3.(2,5)^2.4,8=10$ куб. фут.

Означивъ высоту второй пирамиды чрезъ h и ея бокъ основанія чрезъ a, получимъ

$$\frac{10}{8}=\frac{4,8^3}{h^3}$$ и $$\frac{10}{8}=\frac{2,5^3}{a^3};$$ откуда

$h=4,8.\sqrt[3]{0,8}=4,33$ фут. и $a=2,5.\sqrt[3]{0,8}=2,25$ фута съ точностью до 0,01 фута.

Примѣръ II. *Вычислить объемъ прямоугольнаго параллелопипеда, котораго измѣренія пропорціональны числамъ 4, 6, 9 и поверхность равна 3 квадр. футамъ.*

Поверхность прямоугольнаго параллелопипеда, котораго измѣренія суть 4 фут., 6 фут. и 9 фут., равна

$$2.(4.9+4.6+6.9)=228 \text{ квад. фут.}$$

Объемъ этого параллелопипеда равенъ 216 куб. фут.

Означивъ объемъ искомаго параллелопипеда чрезъ и V и чрезъ a его измѣреніе, соотвѣтствующее ребру въ 4 фута, получимъ

$$\frac{V}{216}=\frac{a^3}{64} \text{ и } \frac{3}{228}=\frac{a^2}{16}.$$

Изъ второй пропорціи опредѣливъ $a=\frac{2}{\sqrt{19}}$, подставимъ эту величину въ первую пропорцію; получимъ

$$\frac{V}{216}=\frac{8}{64\sqrt{19^3}} \text{ и } V=\frac{27}{19\sqrt{19}}=0{,}326 \text{ куб. фут.}$$

съ точностью до 0,001 куб. фут.

121. **Правильные многогранники.** Если многогранникъ составленъ изъ правильныхъ фигуръ одного рода такимъ образомъ, что въ каждой вершинѣ его пересѣкается по равному числу граней, то онъ называется *правильнымъ;* слѣдовательно въ правильномъ многогранникѣ всѣ ребра, а также всѣ углы, составляемые ребрами, должны быть равны.

Чтобы узнать, какія правильныя фигуры могутъ образовать правильный многогранникъ, мы обратимъ вниманіе на слѣдующія обстоятельства: въ каждой вершинѣ многогранника должны пересѣкаться не меньше трехъ граней, и сумма плоскихъ угловъ всякаго многограннаго угла должна быть меньше четырехъ прямыхъ угловъ. На этомъ основаніи изъ угловъ правильнаго треугольника возможно образовать углы: трегранный, четырегранный, пятигранный, потому-что $3.\ 60^0<360^0$, $4.\ 60^0<360^0$ и $5.\ 60^0<360^0$; но шестигранный уголъ не можетъ быть составленъ изъ этихъ плоскихъ угловъ, потому-что $6.\ 60^0=360$; слѣдовательно изъ правильныхъ треуголь-

никовъ возможно составить правильные многогранники трехъ различныхъ видовъ. Изъ угловъ квадрата составится только трегранный уголъ, потому-что 3. $90^0 < 360^0$. Четыре угла квадрата, и слѣдовательно больше четырехъ угловъ, не могутъ образовать многограннаго угла, потому-что 4. $90^0 = 360^0$. Отсюда слѣдуетъ, что изъ квадратовъ возможно составить только одинъ правильный многогранникъ. Изъ угловъ правильнаго пятиугольника можно составить только трегранный уголъ, потому-что 3. $108^0 < 360^0$ и 4. $108^0 > 360^0$; слѣдовательно изъ правильныхъ пятиугольниковъ составится только одинъ правильный многогранникъ. Такъ какъ 3. $120^0 = 360^0$, 3. $128^4/_7{}^0 > 360^0$, 3. $135^0 > 360^0$ и т. д., то мы заключаемъ, что изъ правильныхъ многоугольниковъ, имѣющихъ больше пяти сторонъ, невозможно образовать правильныхъ многогранниковъ. Отсюда слѣдуетъ, что существуютъ правильные многогранники только пяти различныхъ видовъ.

1) Составивъ трегранный уголъ изъ плоскихъ угловъ ASB, ASC, BSC (фиг. 263), равныхъ каждый 60^0, отложимъ на ребрахъ равныя части SA, SB, SC и проведемъ плоскость чрезъ точки A, B, C; тогда образуется многогранникъ, ограниченный четырьмя равными правильными треугольниками и содержащій четыре равные трегранные угла. Этотъ многогранникъ называется *правильнымъ тетраэдромъ* (четырегранникомъ).

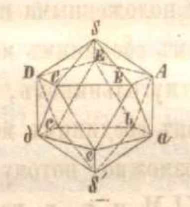
2) Построимъ четырегранный уголъ, котораго плоскіе углы содержатъ по 60^0 каждый, и отложимъ на ребрахъ (фиг. 297) равныя части SA, SB, SC, SD; тогда полученныя точки A, B, C, D находятся въ одной плоскости. Въ самомъ дѣлѣ, плоскость, проходящая чрезъ точки A, B, C, совпадаетъ съ плоскостью, проходящею чрезъ точки A, B, D, потому-что трегранные углы BACS и ABDS, содержащіе общій двугранный уголъ CABS (или DABS) и равные, прилежащіе къ нему плоскіе углы (66), равны. По равенству прямыхъ AB = BC = CD = DA

Фиг. 297.

мы заключаемъ, что плоскость, ими ограниченная, есть квадратъ. Построимъ съ другой стороны плоскости ABCD пирамиду S'ABCD, равную пирамидѣ SABCD; получится многогранникъ, ограниченный восьмью равными правильными треугольниками и содержащій шесть равныхъ четырегранныхъ угловъ. Этотъ многогранникъ называется *октаэдромъ* (восьмигранникомъ).

3) Построивъ пятигранный уголъ S (фиг. 298), котораго плоскіе углы содержатъ по 60^0 каждый, отложимъ на его ребрахъ равныя части SA, SB, SC, SD, SE; тогда плоскость, ограниченная прямыми AB, BC, CD, DE и EA, будетъ правильный пятиугольникъ. Въ самомъ дѣлѣ, точки A, B, C, D лежатъ въ одной плоскости, потому-что по равенству трегранныхъ угловъ BACS и CBDS, плоскость, проходящая чрезъ точки A, B, C, составляетъ съ плоскостью SBC тотъ-же двугранный уголъ, который составленъ гранью SBC и плоскостью, проходящею чрезъ точки B, C, D. Точно также точка E лежитъ въ плоскости, проходящей чрезъ точки B, C, D. Кромѣ того стороны AB, BC, CD и т. д. равны и углы ABC, BCD, CDE и т. д. равны, какъ плоскіе углы равныхъ трегранныхъ угловъ. Потомъ построивъ правильные пятиугольники ASC*ea*, BSD*de*, CSE*cd*, DSA*bc* и ESB*ab*, получимъ десять правильныхъ треугольниковъ BC*e*, C*ed*, DE*c* и т. д., связанныхъ между собою и съ пятиугольникомъ ABCDE. Наконецъ построимъ на пятиугольникѣ *abcde* пятиугольную пирамиду S'*abcde*, равную пирамидѣ SABCDE. Образовавшійся многогранникъ, состоящій изъ двадцати равныхъ равносторонниxъ треугольниковъ и содержащій двѣнадцать равныхъ пятигранныхъ угловъ, называется *икосаэдромъ* (двадцатигранникомъ).

Фиг. 298.

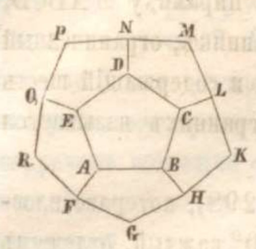


4) *Эксаэдръ* (шестигранникъ) или кубъ ограниченъ шестью равными квадратами и содержитъ восемь равныхъ трегранныхъ угловъ.

5) Соединимъ между собою три правильные пятиугольника

ABCDE, ABHGF, AEQRF (фиг. 299), стороны которыхъ равны,

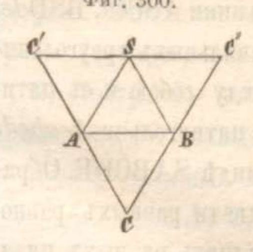
Фиг. 299.



такимъ образомъ, чтобы ихъ плоскостями образовался при точкѣ A трегранный уголъ; тогда образуются плоскіе углы CBH, RFG, DEQ, равные каждый 108^0; слѣдовательно къ соединеннымъ между собою пятиугольникамъ можно приложить равные имъ пятиугольники BCLKH и EDNPQ. По той-же причинѣ можно помѣстить такой-же пятиугольникъ CDNML между положенными пятиугольниками ABCDE, BCLKH и DEQPN. Потомъ соединимъ между собою точно такимъ-же образомъ еще шесть пятиугольниковъ, равныхъ каждый пятиугольнику ABCDE, и наконецъ соединимъ между собою двѣ образовавшіяся поверхности; что возможно, потому-что каждый изъ плоскихъ угловъ GFR, GHK, KLM и т. д. равенъ 108^0. Образовавшійся такимъ образомъ многогранникъ называется *додекаэдромъ* (двѣнадцатигранникомъ).

Примѣчаніе. Представимъ себѣ, что вращеніемъ около ребръ SA, SB, AB, грани SAC, SBC и ABC правильнаго тетраэдра SABC помѣстятся на продолженной плоскости грани SAB; тогда ребро SC грани SAC приметъ положеніе SC′ (фиг. 300) и ребро SC грани

Фиг. 300.



SBC приметъ положеніе SC″. Такъ какъ $\angle ASC = \angle ASB = \angle BSC = 60^0$, то прямыя SC′ и SC″ должны составлять одну прямую. Точно также по равенству угловъ $SAC = BAS = CAB = 60^0$ и $SBC = ABS = ABC = 60^0$, ребро AC помѣстится на продолженіи прямой C′A и ребро BC помѣстится на продолженіи прямой C″B. Образовавшійся равносторонній треугольникъ CC′C″ есть *развернутая поверхность* правильнаго тетраэдра на плоскости. Подобнымъ образомъ можно развернуть поверхности прочихъ правильныхъ многогранниковъ на плоскости.

ЧИСЛЕННЫЕ ВОПРОСЫ.

146) Два сходственныя ребра двухъ подобныхъ пирамидъ содержатъ $4^3/_4$ фут. и $1^1/_4$ фут., и поверхность первой пирамиды составляетъ 162 квадр. фут. Сколько квадратныхъ футъ содержитъ поверхность второй пирамиды?

147) Разность поверхностей двухъ подобныхъ пирамидъ, коихъ сходственныя ребра равны $4^1/_2$ фут. и $1^1/_2$ фут., составляетъ 135 квад. фут. Вычислить поверхность этихъ пирамидъ.

148) Разность между двумя сходственными ребрами двухъ подобныхъ пирамидъ равна 2 фут. и поверхности этихъ пирамидъ содержатъ 144 квадр. фут. и 121 квадр. фут. Вычислить эти ребра.

149) Требуется раздѣлить пирамиду, высота которой равна h, на двѣ части плоскостью, параллельною къ основанію. Опредѣлить разстояніе плоскости сѣченія отъ вершины пирамиды.

150) Требуется раздѣлить на двѣ равныя части правильную пирамиду плоскостью, параллельною къ квадратному основанію. На сколько футъ должна отстоять плоскость сѣченія отъ вершины пирамиды, если боковое ребро содержитъ 6 фут. и бокъ основанія равенъ 2 фут.?

151) Два сходственныя ребра двухъ подобныхъ пирамидъ равны 8,3 фут. и 2,7 фут., и объемъ первой пирамиды содержитъ 592,704 куб. фут. Вычислить объемъ второй пирамиды.

152) Объемы двухъ подобныхъ пирамидъ содержатъ 54,872 куб. фут. и 5,832 куб. фут. Вычислить ребро второй пирамиды, если сходственное ребро первой пирамиды равно 3,8 фута.

153) Боковое ребро правильной четыреугольной пирамиды равно b и бокъ ея квадратнаго основанія равенъ a. Вычислить объемъ пирамиды, которая, имѣющая высоту h, должна быть подобна данной пирамидѣ.

154) Разность между двумя сходственными ребрами двухъ подобныхъ пирамидъ, содержащихъ 19,683 куб. фут. и 4,096 куб. фут., равна 1,1 фут. Вычислить эти ребра.

155) Пирамида, имѣющая высоту h и основаніе A, разсѣчена плоскостью параллельно къ основанію такимъ образомъ, что объемъ образовавшейся усѣченной пирамиды равенъ V. Опредѣлить площадь сѣченія.

156) Бокъ нижняго основанія усѣченной четыреугольной пирамиды равенъ a, бокъ верхняго основанія равенъ b и высота пирамиды равна h. На сколько должна отстоять отъ нижняго основанія плоскость, проведенная параллельно къ основаніямъ и раздѣляющая пирамиду на двѣ равныя части?

157) Чрезъ средину высоты пирамиды проведена плоскость параллельно къ основанію; вслѣдствіе чего образовалась усѣченная пирамида, коей объемъ 1,645 куб. футами меньше объема данной пирамиды. Вычислить объемъ усѣченной пирамиды.

ТЕОРЕМЫ.

158) Число плоскихъ угловъ, образуемыхъ ребрами многогранника, вдвое больше числа ребръ.

159) Всякій многогранникъ можетъ быть раздѣленъ на тетраэдры.

160) Объемы двухъ тетраэдровъ SABC и Sabc, имѣющихъ общій трегранный уголъ S, относятся между собою, какъ произведенія SA. SB. SC и Sa. Sb. Sc ребръ, составляющихъ этотъ трегранный уголъ.

161) Объемъ правильнаго тетраэдра, коего ребро равно a, выражается чрезъ $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

162) Въ какомъ-нибудь тетраэдрѣ SABC плоскость SAD, раздѣляющая двугранный уголъ BASC на двѣ равныя части, раздѣлитъ противолежащее ребро BC на части, пропорціональныя къ прилежащимъ гранямъ SAB и SAC.

163) Два многогранника суть симетрическіе, если ихъ соотвѣтствующія вершины расположены симетрически относительно одной и той-же плоскости.

164) Два симетрическіе многогранника могутъ быть раздѣлены на одинакое число симетрическихъ тетраэдровъ.

164,а) Два симетрическіе многогранника равномѣрны.

165) Если на прямыхъ OA, OB, OC..., соединяющихъ какую-нибудь точку O съ вершинами A, B, C.... многогранника, или на продолженіи этихъ прямыхъ отложены пропорціональные имъ отрѣзки Oa, Ob, Oc...., то образуется многогранникъ съ вершинами a, b, c....., подобный данному многограннику.

ОТДѢЛЪ III.

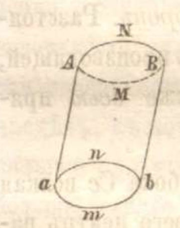
О КРУГЛЫХЪ ТѢЛАХЪ.

ПЕРВАЯ ГЛАВА.

Происхожденіе цилиндрической поверхности. Прямой цилиндръ съ круговыми основаніями. Боковая поверхность, полная поверхность и объемъ прямаго цилиндра. Развертываніе цилиндрической поверхности на плоскости.

122. Прямая Аa (фиг. 301), перемѣщающаяся по кривой линіи параллельно къ постоянной прямой, производитъ *цилиндрическую поверхность*. Подвижная прямая Аa называется *производящею*, а кривая линія, по которой совершается ея движеніе, получаетъ названіе *направляющей*.

Фиг. 301.



Если направляющею взята сомкнутая кривая линія AMBN, а производящею взята прямая Аa, то при движеніи точки А по кривой линіи AMBN, оконечность a опишетъ на плоскости, параллельной къ плоскости данной направляющей, кривую линію $ambn$, равную направляющей AMBN.

Тѣло, ограниченное цилиндрическою поверхностью и параллельными плоскостями AMBN и $ambn$, называется *цилиндромъ*.

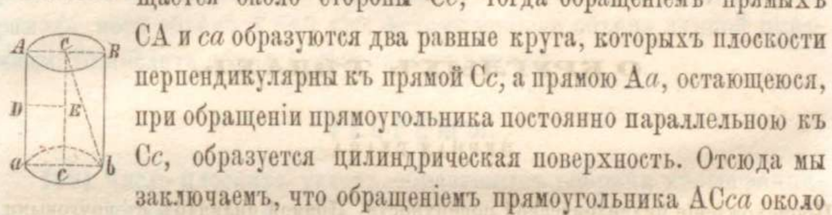
Поверхность, образовавшаяся движеніемъ прямой Аa, называется боковою поверхностью цилиндра. Плоскости, ограниченныя кривыми линіями AMBN и $ambn$, суть основанія цилиндра.

123. Цилиндръ называется *прямымъ*, если его производящая перпендикулярна къ плоскостямъ его основаній. Если-же производя-

щая имѣетъ наклонное положеніе относительно основаній, то цилиндръ называется *наклоннымъ*. Если направляющая цилиндра есть окружность круга, а производящая перпендикулярна къ этому кругу, то цилиндръ называется *прямымъ съ круговымъ основаніемъ*.

Представимъ себѣ, что прямоугольникъ AC*ca* (фиг. 302) обращается около стороны C*c*; тогда обращеніемъ прямыхъ CA и *ca* образуются два равные круга, которыхъ плоскости перпендикулярны къ прямой C*c*, а прямою A*a*, остающеюся, при обращеніи прямоугольника постоянно параллельною къ C*c*, образуется цилиндрическая поверхность. Отсюда мы заключаемъ, что обращеніемъ прямоугольника AC*ca* около стороны C*c* образуется тѣло, ограниченное цилиндрическою поверхностью и двумя равными кругами, коихъ плоскости перпендикулярны къ производящей; т. е. *образуется прямой цилиндръ съ круговымъ основаніемъ;* слѣдовательно *прямой цилиндръ происходитъ отъ обращенія прямоугольника около одной изъ его сторонъ*. Разстояніе C*c* между основаніями прямаго цилиндра, равное его производящей, называется его *высотою*. Прямая C*c* называется, также *осью* прямаго цилиндра.

Фиг. 302.



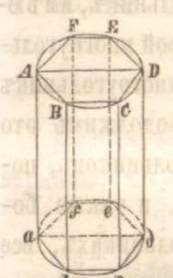
При обращеніи прямоугольника AC*ca* около его бока C*c* всякая точка D прямой A*a* описываетъ окружность круга, коего центръ находится на оси C*c* и коего плоскость перпендикулярна къ оси; потому-что при обращеніи прямоугольника, перпендикуляръ DE, опущенный изъ точки D на ось C*c*, не измѣняетъ своей длины и своего положенія относительно оси. Всякое сѣченіе прямаго цилиндра плоскостью, перпендикулярною къ его оси, называется *прямымъ сѣченіемъ*. Отсюда слѣдуетъ, что *прямыя сѣченія прямаго цилиндра суть равные круги*.

Геометрическое мѣсто точекъ, равно-отстоящихъ отъ данной прямой, есть цилиндрическая поверхность, коей направляющая есть окружность круга и ось есть данная прямая.

124. Если основанія какой-нибудь призмы суть многоугольники, вписанные въ основаніяхъ цилиндра, то говорятъ: *призма вписана въ цилиндръ.* Боковыя ребра призмы, вписанной въ цилиндрѣ, находятся на его боковой поверхности.

Въ прямомъ цилиндрѣ AD*ad* (фиг. 303) съ круговымъ основаніемъ вписана призма, коей основаніе есть правильный многоугольникъ, имѣющій n сторонъ. Потомъ впишемъ въ этотъ-же цилиндръ призмы, коихъ основанія суть правильные многоугольники съ $2n$, съ $4n$, съ $8n$ и т. д. сторонами.

Фиг. 303.

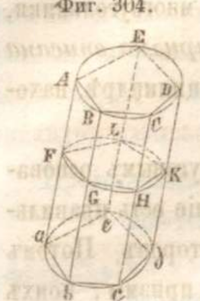


Периметры P, P′, P″ и т. д. этихъ многогранниковъ, постепенно увеличиваются и все болѣе и болѣе приближаются къ окружности C основанія цилиндра, никогда не достигая ея; а потому боковыя поверхности $S = Ph$, $S' = P'h$, $S'' = P''h$ и т. д. вписанныхъ призмъ также постепенно увеличиваются и все болѣе и болѣе приближаются къ боковой поверхности цилиндра, никогда не достигая ея; слѣдовательно боковая поверхность прямаго цилиндра съ круговымъ основаніемъ есть предѣлъ, къ которому стремится боковая поверхность вписанной правильной призмы, если число боковыхъ граней этой призмы сдѣлается больше всякаго произвольно большаго числа.

Такъ какъ площади Q, Q′, Q″ и т. д. правильныхъ многоугольниковъ, вписанныхъ въ кругѣ C, имѣютъ своимъ предѣломъ площадь этого круга, то объемы $V = Qh$, $V' = Q'h$, $V'' = Q''h$ и т. д. разсматриваемыхъ вписанныхъ призмъ, постепенно увеличиваясь, все болѣе и болѣе приближаются къ объему цилиндра, но всегда остаются меньше его; слѣдовательно объемъ цилиндра съ круговымъ основаніемъ есть предѣлъ, къ которому стремится объемъ вписанной правильной призмы, если число боковыхъ граней этой призмы сдѣлается больше всякой произвольно большой величины.

225. Въ какомъ-нибудь цилиндрѣ AD*ad* (фиг. 304) вписана призма ABCDE*abcde*, имѣющая основаніемъ выпуклый многоуголь-

Фиг. 304.



никъ ABCDE. Раздѣливъ каждую изъ дугъ AB, BC, CD и т. д. на двѣ равныя части и соединивъ полученныя точки съ вершинами A, B, C, D, E, получимъ многоугольникъ, имѣющій вдвое больше сторонъ, нежели многоугольникъ ABCDE. Точно такимъ-же образомъ составимъ многоугольникъ, имѣющій вдвое больше сторонъ, нежели второй многоугольникъ. Потомъ построимъ четвертый многоугольникъ имѣющій вдвое больше сторонъ, нежели третій, и продолжимъ это дѣйствіе до безконечности. При этомъ стороны многоугольниковъ, постепенно уменьшаясь, будутъ приближаться къ нулю, и также боковыя грани призмъ, построенныхъ на этихъ многоугольникахъ, все болѣе и болѣе приближаются къ нулю; слѣдовательно боковая поверхность и объемъ цилиндра AD*da* суть предѣлы, къ которымъ стремятся боковая поверхность и объемъ вписанныхъ призмъ.

126. **Теорема.** *Боковая поверхность прямаго цилиндра съ круговымъ основаніемъ измѣряется произведеніемъ окружности его основанія на высоту.*

Въ данномъ прямомъ цилиндрѣ съ круговымъ основаніемъ (фиг. 303) вписана прямая призма ABCDEF*abcdef*. Безконечнымъ удвоеніемъ числа сторонъ многоугольника ABCDEF (или числа боковыхъ граней призмы) получится призма, имѣющая основаніе, котораго периметръ P_n такъ близко подходитъ къ окружности C основанія цилиндра, что разность $C - P_n$ меньше всякой произвольно малой величины; тогда разность между боковыми поверхностями цилиндра и разсматриваемой призмы также должна быть меньше всякой произвольно малой величины; а потому мы въ правѣ принять, что периметръ P_n сливается съ окружностью C и боковая поверхность призмы совпадаетъ съ боковою поверхностью цилиндра. По этой причинѣ мы принимаемъ цилиндръ за призму, имѣющую основаніемъ многоугольникъ, стороны котораго, меньшія всякой произвольно малой величины, сливаются съ окружностью основанія ци-

линдра. Зная, что боковая поверхность правильной призмы, имѣющей основаніе съ какимъ угодно числомъ сторонъ, измѣряется произведеніемъ периметра ея основанія на высоту, мы заключаемъ, что боковая поверхность цилиндра измѣряется произведеніемъ окружности его основанія на высоту.

Назвавъ чрезъ R радіусъ основанія цилиндра, чрезъ h его высоту Aa и чрезъ S его боковую поверхность, получимъ формулу

$$S = 2\pi R . h.$$

Полная поверхность цилиндра, состоящая изъ его боковой поверхности и суммы площадей его основаній, равна

$$T = 2\pi R . h + 2\pi R^2 = 2\pi R (R + h).$$

127. Слѣдствіе. Два прямые цилиндра съ круговыми основаніями *подобны*, если прямоугольники ACca и A'C'$c'a'$, обращеніемъ которыхъ произошли эти цилиндры, подобны; слѣдовательно *два прямые цилиндра съ круговыми основаніями подобны, если ихъ высоты* Cc *и* C'c' *пропорціональны радіусамъ* AC и A'C' *основаній.*

Назвавъ чрезъ S и S' боковыя поверхности двухъ подобныхъ прямыхъ цилиндровъ съ круговыми основаніями, чрезъ T и T' ихъ полныя поверхности, чрезъ h и h' ихъ высоты и чрезъ R и R' радіусы ихъ основаній, получимъ

$$\frac{R}{R'} = \frac{h}{h'},\ S = 2\pi R.h,\ S' = 2\pi R'.h';\ \text{откуда}$$

$$\frac{S}{S'} = \frac{Rh}{R'h'} = \frac{R}{R'}.\frac{h}{h'}\ \text{или}$$

$$\frac{S}{S'} = \frac{R^2}{R'^2}\ \text{и}\ \frac{S}{S'} = \frac{h^2}{h'^2}.$$

Изъ данной пропорціи $\frac{R}{R'} = \frac{h}{h'}$ составятся сложныя пропорціи

$$\frac{R + h}{R' + h'} = \frac{R}{R'}\ \text{и}\ \frac{R + h}{R' + h'} = \frac{h}{h'}.$$

Зная, что $T = 2\pi R(R + h)$ и $T' = 2\pi R'(R' + h')$, получимъ

$$\frac{T}{T'} = \frac{R(R + h)}{R'(R' + h')} = \frac{R}{R'}.\frac{R + h}{R' + h'};\ \text{откуда}$$

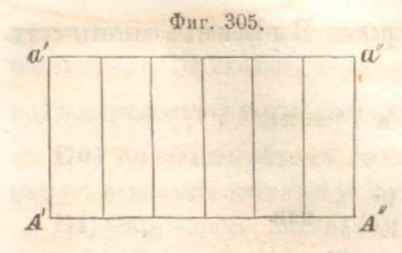
$$\frac{T}{T'} = \frac{R}{R'}.\frac{R}{R'} = \frac{R^2}{R'^2}\ \text{и}\ \frac{T}{T'} = \frac{h^2}{h'^2};$$

слѣдовательно *боковыя или полныя поверхности двухъ подобныхъ прямыхъ цилиндровъ относятся между собою, какъ квадраты радіусовъ ихъ основаній и какъ квадраты ихъ высотъ.*

128. Слѣдствіе. Въ наклонномъ цилиндрѣ AD*da* (фиг. 304) вписана призма ABCDE*abcde*. Боковая поверхность этой призмы, состоящая изъ параллелограмовъ AB*ba*, BC*cb*, CD*dc* и т. д., измѣряется периметромъ P ея прямаго сѣченія FGHKL, помноженнымъ на ребро A*a* (82). Удвоивъ число боковыхъ граней этой призмы до безконечности, мы можемъ сдѣлать разность между боковыми поверхностями цилиндра и призмы меньше всякой произвольно малой величины; тогда разность между прямымъ сѣченіемъ FGHKL цилиндра и прямымъ сѣченіемъ призмы также будетъ меньше всякой произвольно малой величины. Отсюда по предъидущему (127) мы заключаемъ, что *боковая поверхность наклоннаго цилиндра измѣряется длиною его прямаго сѣченія, помноженною на его производящую.*

129. *Примѣчаніе.* Боковая поверхность прямой призмы, будучи развернута на плоскости, представится въ видѣ прямоугольника, коего основаніе равно периметру основанія призмы и высота равна ея высотѣ. Въ самомъ дѣлѣ, представимъ себѣ, что призма ABCDEF*abcdef* (фиг. 303) прорѣзана по направленію ея ребра A*a*, и что грань AB*ba*, обращаясь около ребра B*b*, помѣстится на продолженіи плоскости BC*cb*; тогда ребра BA и *ba*, перпендикулярныя къ ребру B*b*, помѣстятся на продолженіи ребръ CB и *cb*, оставаясь перпендикулярными къ B*b*. Потомъ обратимъ двѣ соединенныя грани около ребра C*c* такимъ образомъ, чтобы ихъ плоскость составляла продолженіе грани CD*dc*. Продолживъ это дѣйствіе описаннымъ образомъ, мы приведемъ всю боковую поверхность призмы въ плоскость послѣдней грани FA*af*; тогда эта боковая поверхность изобразится прямоугольникомъ A'A''*a''a'* (фиг. 305), коего основаніе A'A'' равно периметру AB + BC + CD + DE + EF + FA и высота A'*a'* равна боковому ребру A*a*. Если число сторонъ правильной призмы, вписан-

Фиг. 305.



ной въ цилиндрѣ, увеличивается до безконечности, то образуется прямоугольникъ $A'A''a''a'$, коего высота $A'a'$ равна высотѣ призмы, а основаніе $A'A''$ такъ близко подходитъ къ окружности основанія цилиндра, что разность между этими линіями меньше всякой произвольно малой величины; тогда прямоугольникомъ $A'A''a''a'$, коего основаніе равно окружности основанія цилиндра и высота равна его высотѣ, изобразится развернутая поверхность цилиндра.

130. **Теорема.** *Объемъ прямаго цилиндра съ круговымъ основаніемъ измѣряется площадью его основанія, помноженною на его высоту.*

Въ прямомъ цилиндрѣ $ADda$ (фиг. 303) вписана прямая призма $ABCDEFabcdef$, коей основаніе правильный многоугольникъ. Извѣстно (124), что постепеннымъ удвоеніемъ числа сторонъ многоугольника ABCDEF, его площадь такъ близко подходитъ къ площади круга ACF, что разность между этими площадями сдѣлается меньше всякой произвольно малой величины; тогда разность между объемами цилиндра и призмы также будетъ меньше всякой произвольно малой величины; а потому мы можемъ замѣнить площадь основанія и объемъ призмы площадью основанія и объемомъ цилиндра, принимая цилиндръ за правильную призму, имѣющую основаніемъ многоугольникъ, котораго стороны сливаются съ окружностью круга. Извѣстно (91), что объемъ прямой призмы, имѣющей основаніе съ какимъ угодно числомъ сторонъ, измѣряется произведеніемъ площади ея основанія на высоту; слѣдовательно объемъ прямаго цилиндра равенъ площади его основанія, помноженной на высоту.

Назвавъ объемъ прямаго цилиндра чрезъ V, радіусъ его основанія чрезъ R и его высоту чрезъ h, получимъ формулу

$$V = \pi R^2 . h.$$

Слѣдствіе. Если объемы двухъ подобныхъ прямыхъ цилиндровъ

суть V и V', радіусы ихъ основаній равны R и R' и ихъ высоты суть h и h', то получимъ

$$\frac{R}{R'}=\frac{h}{h'},\ V=\pi R^2.h \text{ и } V'=\pi R'^2.h'^2;$$

откуда

$$\frac{V}{V'}=\frac{\pi R^2 h}{\pi R'^2 h'}=\frac{R^2}{R'^2}.\frac{h}{h'} \text{ или}$$

$$\frac{V}{V'}=\frac{R^2}{R'^2}.\frac{R}{R'}=\frac{R^3}{R'^3} \text{ и}$$

$$\frac{V}{V'}=\frac{h^2}{h'^2}.\frac{h}{h'}=\frac{h^3}{h'^3};$$

слѣдовательно *объемы подобныхъ цилиндровъ относятся между собою какъ кубы радіусовъ ихъ основаній или какъ кубы ихъ высотъ.*

Если $R = R'$, то получится

$$\frac{V}{V'}=\frac{h}{h'};$$

т. е. *объемы двухъ прямыхъ цилиндровъ, имѣющихъ равные радіусы основаній, относятся между собою, какъ ихъ высоты.*

Если $h = h'$, то составится пропорція

$$\frac{V}{V'}=\frac{R^2}{R'^2};$$

слѣдовательно *объемы двухъ прямыхъ цилиндровъ, имѣющихъ равныя высоты, относятся между собою, какъ квадраты радіусовъ ихъ основаній.*

ЧИСЛЕННЫЕ ВОПРОСЫ.

166) Вычислить *) боковую поверхность цилиндра, коего высота равна 18 фут. и діаметръ основанія равенъ 2,5 фут.

167) Боковая поверхность цилиндра, коего діаметръ основанія содержитъ 2,5 фута равна 196,35 квад. фут. Сколько футъ содержитъ высота цилиндра?

168) Боковая поверхность цилиндра, коего высота содержитъ 12,5 фута, равна 82,5 квадр. фут. Сколько футъ содержитъ діаметръ основанія? ($\pi=\frac{22}{7}$).

169) Въ цилиндрѣ, коего высота равна 24 фут., и діаметръ осно-

*) Для рѣшенія этихъ вопросовъ должно взять $\pi = 3,14$.

ванія равенъ 2,8 фут., вписанъ параллелопипедъ съ квадратнымъ основаніемъ. На сколько полная поверхность цилиндра больше полной поверхности параллелопипеда? ($\pi = \frac{22}{7}$)

170) Вычислить объемъ цилиндра, коего высота равна 12 фут. и радіусъ основанія равенъ $1\frac{1}{2}$ фут.

171) Окружность цилиндра, коего высота равна 48 фут., содержитъ 14,13 фут. Сколько кубическ. футъ содержитъ объемъ цилиндра?

172) Въ прямоугольномъ параллелопипедѣ, коего высота равна 35 фут., а бокъ квадратнаго основанія содержитъ 2,4 фута, вписанъ цилиндръ. На сколько объемъ цилиндра меньше объема параллелопипеда? ($\pi = \frac{22}{7}$).

173) Сколько футъ содержитъ діаметръ цилиндра, коего высота 14,8 фута и объемъ содержитъ 540,2 куб. фут?

174) Въ цилиндрическій сосудъ, коего діаметръ равенъ 9 дюйм., налита вода сосудомъ, коего діаметръ равенъ 3 дюйм. и высота равна 8 дюйм. Сколько футъ высоты заняла вода въ первомъ сосудѣ, если вторымъ сосудомъ вода наливалась 6 разъ?

175) Вывести выраженіе для объема цилиндра, коего высота равна h и боковая поверхность равна P.

176) Вывести выраженіе для объема цилиндра, коего полная поверхность равна T и діаметръ основанія равенъ D.

177) Высота цилиндра равна діаметру его основанія и радіусъ основанія равенъ R. Вывести выраженіе для объема и полной поверхности этого цилиндра.

178) Вывести выраженіе для объема цилиндра, коего полная поверхность равна T и высота равна діаметру основанія.

179) Вывести выраженіе для объема цилиндра, коего полная поверхность равна T и окружность основанія равна P.

180) Сколько футъ содержитъ высота и діаметръ основанія цилиндра, если его объемъ равенъ 25,12 куб. фут. и полная поверхность равна 56,52 квадр. фут?

181) Вывести выраженіе для полной поверхности цилиндра, коего объемъ равенъ V и высота равна h.

182) Вычислить высоту и діаметръ основанія цилиндра по извѣстному объему V и данной боковой поверхности S.

183) Сколько футъ содержитъ діаметръ основанія цилиндра, коего высота равна 14 ф. и полная поверхность содержитъ $119^{57}/_{80}$ квад. фут.?

184) Окружность цилиндра, коего полная поверхность содержитъ $117^{3}/_{4}$ квадр. фут., равна его высотѣ. Сколько футъ содержитъ діаметръ основанія?

185) Высота цилиндра 20,44 футами больше окружности его основанія и его полная поверхность содержитъ 439,6 квад. фута. Сколько футъ содержитъ его высота?

186) Высота цилиндра, коего полная поверхность содержитъ 127,6275 квадр. фута, въ шесть разъ больше діаметра основанія. Сколько футъ содержитъ высота?

187) Поверхности двухъ подобныхъ цилиндровъ равны 17,64 квад. фут. и 30,25 квад. фут., а окружность меньшаго цилиндра. содержитъ 8,4 фута. Сколько футъ содержитъ окружность большаго цилиндра.

188) Высота цилиндра, коего полная поверхность содержитъ 69,08 квад. фут., равна 10 фут. Сколько кубическ. футъ содержитъ объемъ этого цилиндра?

189) Сумма объемовъ двухъ цилиндровъ, имѣющихъ высоты въ 1,2 фут. и 1,5 фут., равна 4 куб. фут. Сколько куб. футъ содержитъ каждый цилиндръ?

190) Высота цилиндра, коего объемъ содержитъ $103^{1}/_{8}$ куб. фута, больше окружности основанія на $13^{1}/_{7}$ фута. Сколько футъ содержитъ діаметръ основанія? ($\pi = \frac{22}{7}$).

ТЕОРЕМЫ.

191) Сѣченіе цилиндра плоскостью, проведенною чрезъ его ось или параллельно къ оси есть параллелограмъ.

192) Сѣченія прямаго цилиндра съ круговымъ основаніемъ плоскостями, проведенными параллельно къ оси, суть прямоугольники, а сѣченія плоскостями, проведенными чрезъ ось, суть равные прямоугольники.

193) Плоскость, проходящая чрезъ производящую АВ цилиндра и прямую ВС, касающуюся къ основанію цилиндра въ точкѣ В, касается къ боковой поверхности этого цилиндра по поправленію прямой АВ.

194) Если прямая АВ, ограниченная поверхностью цилиндра

пересѣкаетъ его ось, то эта прямая дѣлится осью на двѣ равныя части.

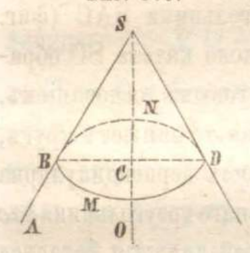
195) Полная поверхность прямаго цилиндра, коего радіусъ основанія равенъ R и высота равна h, равномѣрна кругу, коего радіусъ есть средняя пропорціональная между суммою $h+R$ и діаметромъ 2R

ВТОРАЯ ГЛАВА.

Происхожденіе конической поверхности. Прямой конусъ съ круговымъ основаніемъ. Усѣченный конусъ съ круговыми основаніями. Боковая поверхность, полная поверхность и объемъ прямаго и усѣченнаго конуса.

130. Прямая SA (фиг. 306), перемѣщающаяся по кривой линіи, и при этомъ постоянно проходящая чрезъ точку S неподвижной прямой SO, производитъ *коническую поверхность*. Постоянная прямая SO называется *осью* конической поверхности, точка S — ея *вершиною*, прямая SA — ея *производящею* или *ребромъ*, кривая линія BMDN — *направляющею*.

Фиг. 306.



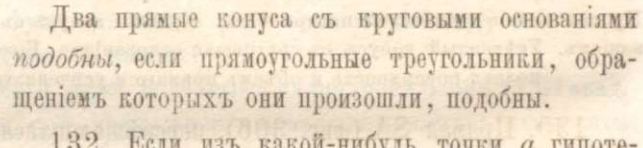
Если производящая SA, при ея обращеніи около неподвижной точки S, составляетъ постоянно одинъ и тотъ-же уголъ n съ прямою SO, то какая-нибудь точка B производящей SA опишетъ окружность круга, котораго плоскость перпендикулярна къ прямой SO и коего центръ находится на этой прямой. Дѣйствительно, при обращеніи прямой SA, перпендикуляръ BC, опущенный изъ точки B на прямую SO, не измѣняетъ своей длины и сохраняетъ перпендикулярность къ пря-SO. Отсюда мы заключаемъ, что геометрическое мѣсто прямыхъ, проходящихъ чрезъ данную точку S и составляющихъ постоянный уголъ n съ данною прямою SO, есть коническая поверхность, имѣющая вершину S и ось SO.

131. Тѣло, ограниченное коническою поверхностью и плоскостью BMDN, называется *конусомъ*. Плоскость BMDN, ограниченная кривою линіею, есть *основаніе* конуса, разстояніе SC вершины S отъ

плоскости основанія, называется *высотою*, и поверхность, происшедшая отъ обращенія прямой SB, называется *боковою поверхностію* конуса.

Конусъ, происшедшій отъ обращенія прямоугольнаго треугольника SAC (фиг. 307) около катета SC, называется *прямымъ конусомъ съ круговымъ основаніемъ*. Ось SC (или высота) этого конуса должна пройти чрезъ центръ C круговаго основанія.

Фиг. 307.

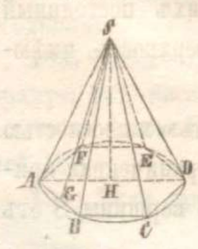


Два прямые конуса съ круговыми основаніями *подобны*, если прямоугольные треугольники, обращеніемъ которыхъ они произошли, подобны.

132. Если изъ какой-нибудь точки *a* гипотенузы SA прямоугольнаго треугольника SAC (фиг. 307), обращеніемъ котораго около катета SC образовался прямой конусъ съ круговымъ основаніемъ, опущенъ перпендикуляръ *ac* на ось SC, то прямая *ac* опишетъ кругъ, коего центръ находится на оси SC и коего плоскость перпендикулярна къ этой оси, потому-что при обращеніи прямоугольнаго треугольника *sac* около катета *sc*, прямая *ac* не измѣняетъ своей длины и остается перпендикулярною къ прямой SC. Отсюда слѣдуетъ, что всякое сѣченіе прямаго конуса съ круговымъ основаніемъ плоскостью, проведенною перпендикулярно къ оси, т. е. параллельно къ основанію, есть кругъ, котораго центръ находится на оси.

Часть AB*ba* конуса, заключенная между его основаніемъ и сѣченіемъ, параллельнымъ къ основанію, называется *усѣченнымъ конусомъ съ параллельными основаніями*.

Фиг. 308.



133. Если основаніе пирамиды многоугольникъ ABCDEF (фиг. 308), вписанный въ основаніи конуса, и ея вершина совпадаетъ съ вершиною этого конуса, то *пирамида вписана въ конусъ*. Боковыя ребра пирамиды, вписанной въ конусѣ, находятся на его боковой поверхности.

Въ прямой конусъ съ круговымъ основаніемъ впишемъ правильную пирамиду, коей основаніе правильный многоугольникъ съ n сторонами. Означивъ бокъ AB (фиг. 308) этого основанія чрезъ a, боковое ребро SA пирамиды чрезъ l и апоѳему SG чрезъ b, получимъ $b = \sqrt{l^2 - \frac{a^2}{4}}$. Потомъ впишемъ въ этотъ-же конусъ правильныя пирамиды, имѣющія $2n$, $4n$, $8n$ и т. д. боковыхъ граней. Периметры P, P′, P″ и т. д. основаній этихъ пирамидъ, постепенно увеличиваясь, все болѣе и болѣе приближаются къ окружности C основанія конуса, но всегда остаются меньше ея. При этомъ соотвѣтствующія апоѳемы постепенно приближаются къ боковому ребру l (потому-что съ уменьшеніемъ стороны a, разность $l^2 - \frac{a^2}{4}$ постепенно увеличивается и величина $b = \sqrt{l^2 - \frac{a^2}{4}}$ постепенно приближается къ величинѣ $\sqrt{l^2} = l$) и боковыя поверхности S, S′, S″ и т. д. вписанныхъ пирамидъ все болѣе и болѣе приближаются къ боковой поверхности конуса; слѣдовательно боковая поверхность прямаго конуса есть предѣлъ, къ которому отремится боковая поверхность вписанной правильной пирамиды, если число боковыхъ граней этой пирамиды сдѣлается больше всякой произвольно большой величины.

Объемъ правильной пирамиды, вписанной въ прямомъ конусѣ, всегда меньше объема этого конуса, потому-что основаніе пирамиды должно быть меньше основанія конуса. Объемъ этой пирамиды, по мѣрѣ увеличенія числа ея боковыхъ граней, все болѣе и болѣе приближается къ объему конуса; слѣдовательно объемъ прямаго конуса есть предѣлъ, къ которому стремится объемъ вписанной правильной пирамиды, если боковыя грани ея сдѣлаются меньше всякой произвольно малой величины.

134. Теорема. *Боковая поверхность прямаго конуса съ круговымъ основаніемъ измѣряется произведеніемъ окружности основанія на половину ребра конуса.*

Въ данномъ прямомъ конусѣ вписана правильная пирамида (фиг.

308). Удвоивъ число боковыхъ граней этой пирамиды до безконечности, мы можемъ дойти до пирамиды, имѣющей основаніе, котораго периметръ P_n такъ близко подходитъ къ окружности C основанія конуса, что разность $C - P_n$ будетъ меньше всякой произвольно малой величины; тогда разность между боковыми поверхностями конуса и этой пирамиды и разность между ребромъ конуса и апоѳемою пирамиды будутъ меньше всякой произвольно малой величины. По этой причинѣ мы въ правѣ принять прямой конусъ за правильную пирамиду, имѣющую основаніемъ многоугольникъ, котораго стороны меньше всякой произвольно малой величины, т. е. которыя сливаются съ окружностью основанія. Такъ какъ боковая поверхность правильной пирамиды, имѣющей какое угодно число боковыхъ граней, измѣряется произведеніемъ периметра основанія на половину апоѳемы, то замѣнивъ эту боковую поверхность, периметръ основанія и апоѳему соотвѣтственно: боковою поверхностью конуса, окружностью основанія и ребромъ, мы узнаемъ, что боковая поверхность прямаго конуса равна окружности основанія, помноженной на половину ребра.

Означивъ боковую поверхность прямаго конуса чрезъ S, его ребро чрезъ l и радіусъ круговаго основанія чрезъ R, получимъ формулу

$$S = 2\pi R.\frac{l}{2} = \pi R.l.$$

Полная поверхность прямаго конуса съ круговымъ основаніемъ равна

$$T = \pi R.l + \pi R^2 = \pi R(l + R).$$

135. Слѣдствіе. Если два прямые конуса, коихъ ребра суть l и l', радіусы основаній равны R и R$'$, и высоты суть h и h', подобны, то получится $\frac{l}{l'} = \frac{R}{R'} = \frac{h}{h'}$ и сложныя пропорціи $\frac{l+R}{l'+R}$ $= \frac{l}{l'} = \frac{R}{R'} = \frac{h}{h'}$. Назвавъ боковыя поверхности этихъ конусовъ чрезъ S и S$'$ и ихъ полныя поверхности чрезъ T и T$'$, получимъ пропорціи

$$\frac{S}{S'} = \frac{\pi R l}{\pi R' l'} = \frac{R}{R'}.\frac{l}{l'} \ (1) \text{ и } \frac{T}{T'} = \frac{R(l+R)}{R'(l'+R')} = \frac{R}{R'}.\frac{l+R}{l'+R'} \dots (2).$$

Въ пропорціи (1) замѣнивъ $\frac{R}{R'}$ дробью $\frac{l}{l'}$, и потомъ $\frac{l}{l'}$ дробью $\frac{R}{R'}$, получимъ

$$\frac{S}{S'}=\frac{R^2}{R'^2}=\frac{l^2}{l'^2} \text{ и также } \frac{S}{S'}=\frac{h^2}{h'^2}.$$

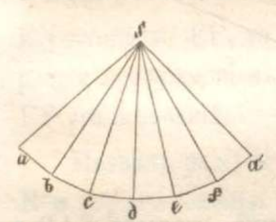
Въ пропорцію (2) подставимъ $\frac{R}{R'}$ вмѣсто $\frac{l+R}{l'+R'}$, получимъ

$$\frac{T}{T'}=\frac{R^2}{R'^2} \text{ и также } \frac{T}{T'}=\frac{l^2}{l'^2}=\frac{h^2}{h'^2}.$$

Отсюда слѣдуетъ, что *полныя поверхности двухъ подобныхъ прямыхъ конусовъ, также ихъ боковыя поверхности, относятся между собою, какъ квадраты радіусовъ основаній, какъ квадраты ребръ и какъ квадраты высотъ.*

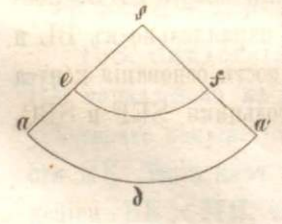
136. Слѣдствіе. Обращеніемъ грани SAB правильной пирамиды SABCDEF (фиг. 308) около ребра SB, помѣстимъ эту грань на продолженіи грани SBC. Потомъ обратимъ двѣ соединенныя грани около ребра SC такимъ образомъ, чтобы ихъ плоскость помѣстилась на продолженіи грани SCD. Продолжимъ это дѣйствіе до тѣхъ поръ, пока всѣ боковыя грани пирамиды помѣстятся въ одной плоскости съ послѣднею гранью SFA; тогда образовавшимся полигональнымъ секторомъ S*abcdefa'* (фиг. 309) представится на плоскости *развернутая боковая поверхность пирамиды*. Основаніе этого сектора правильная ломанная линія, равная периметру основанія пирамиды.

Фиг. 309.



Если число сторонъ правильной пирамиды, вписанной въ прямомъ конусѣ, увеличится до безконечности, то на плоскости образуется секторъ, коего радіусъ равенъ боковому ребру SA пирамиды, а дуга равна окружности основанія конуса. Образовавшимся секторомъ S*ada'* (фиг. 310) представляется на плоскости *развернутая* боковая поверхность конуса. Назвавъ чрез l ребро даннаго конуса, чрезъ R

Фиг. 310.



радiусъ его основанія, чрезъ n число градусовъ, содержащихся въ углѣ aSa' сектора, получимъ пропорцію

$$\frac{n}{360^0} = \frac{\text{дуг. } ada'}{2\pi l};$$

но дуга $ada' = 2\pi R$, слѣдовательно

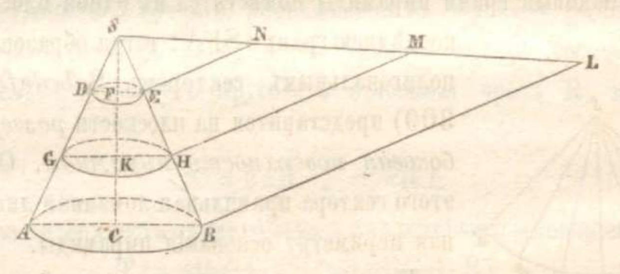
$$\frac{n}{360^0} = \frac{2\pi R}{2\pi l} \text{ и } n = 360^0 . \frac{R}{l}.$$

Если $l = 2R$, то $n = 180^0$, т. е. дуга развернутой боковой поверхности конуса равна полуокружности. Прямой конусъ, коего окружность основанія представляется на плоскости полуокружностью, называется *равнобочнымъ*. Въ сѣченіи этого конуса плоскостью, проходящею чрезъ его ось, получается равносторонній треугольникъ.

137. **Теорема.** *Боковая поверхность усѣченнаго конуса съ параллельными основаніями измѣряется полусуммою окружностей его основаній, помноженною на его ребро.*

Боковая поверхность усѣченнаго конуса ABED (фиг. 311) рав-

Фиг. 311.



няется разности боковыхъ поверхностей прямыхъ конусовъ SAB и SDE. Къ ребру SB изъ его оконечности B возставимъ перпендикуляръ BL, равный длинѣ окружности основанія конуса SAB. Соединивъ точки S и L, проведемъ прямую EN параллельно къ BL и докажемъ, что прямая EN равна длинѣ окружности основанія конуса SDE. Для этого разсмотримъ подобные треугольники SEF и SBC, изъ которыхъ получится

$$\frac{SE}{SB} = \frac{EF}{BC} = \frac{\text{окруж. } EF}{\text{окруж. } BC}$$

и изъ подобныхъ треугольниковъ SEN и SBL выводится

$$\frac{SE}{SB} = \frac{EN}{BL}.$$

Наконецъ изъ выведенныхъ пропорцій составится пропорція

$$\frac{\text{окруж. } EF}{\text{окруж. } BC} = \frac{EN}{BL},$$

въ которой послѣдующіе члены равны; слѣдовательно также предъидущіе члены равны, т. е.

$$\text{окруж. } EF = EN.$$

Зная, что боковая поверхность конуса SAB измѣряется произведеніемъ $^1/_2$окруж. $BC \times SA$ и площадь треугольника SBL равна произведенію $^1/_2 BL \times SB$, мы замѣчаемъ, что боковая поверхность конуса SAB равномѣрна площади прямоугольнаго треугольника SBL. Такъ какъ боковая поверхность конуса SDE измѣряется произведеніемъ $^1/_2$окруж. $EF \times SD$ и площадь треугольника SEN равна $^1/_2 EN \times SE$, то боковая поверхность конуса SDE равномѣрна площади прямоугольнаго треугольника SEN. Отсюда слѣдуетъ, что боковая поверхность усѣченнаго конуса равномѣрна площади трапеціи BENL. Такъ какъ площадь этой трапеціи равна $BE \times \left(\frac{BL + EN}{2}\right)$, $BL =$ окруж. BC и $EN =$ окруж. EF, то боковая поверхность усѣченнаго конуса измѣряется произведеніемъ его ребра BE на полусумму окружностей BC и EF его основаній.

Назвавъ радіусы BC и EF основаній усѣченнаго конуса чрезъ R и R′, его боковую поверхность чрезъ S, полную поверхность чрезъ T и ребро BE чрезъ l, получимъ формулы

$$S = \pi(R + R')l \text{ и}$$

$$T = \pi(R + R')l + \pi R^2 + \pi R'^2 = \pi[R^2 + R'^2 + (R + R')l].$$

138. Слѣдствіе. Чрезъ средину H ребра BE проведя прямую HM параллельно къ BL и плоскость параллельно къ основаніямъ усѣченнаго конуса, узнаемъ, что прямая HM равна длинѣ окружности HK. Такъ какъ площадь трапеціи BENL измѣряется произведеніемъ $BE \times HM$, то боковая поверхность усѣченнаго конуса ABED

должна измѣряться произведеніемъ его ребра BE на окружность HK сѣченія, проведеннаго параллельно къ основаніямъ и равно-отстоящаго отъ нихъ.

Назвавъ радіусъ HK чрезъ r, получимъ еще формулы

$$S = 2\pi r.l \text{ и } T = \pi(R^2 + R'^2 + 2rl).$$

Слѣдствіе. Боковая поверхность конуса SAB, будучи развернута на плоскости, изобразится секторомъ Saa' (фиг. 310) и боковая поверхность конуса SDE изобразится секторомъ Sef; слѣдовательно боковая поверхность усѣченнаго конуса ABED представляется на плоскости круговою трапеціею $aa'fe$.

139. **Теорема.** *Объемъ прямаго конуса съ круговымъ основаніемъ измѣряется третьею частью произведенія площади основанія на высоту.*

Въ прямой конусъ (фиг. 308) впишемъ правильную пирамиду SABCDEF. Извѣстно, что безконечнымъ удвоеніемъ числа сторонъ многоугольника ABCDEF (или числа боковыхъ граней пирамиды), разность между площадями круга AH и многоугольника ABCDEF можетъ быть сдѣлана меньше всякой произвольно малой величины; тогда разность между объемомъ конуса и объемомъ пирамиды сдѣлается также меньше всякой произвольно малой величины. По этой причинѣ мы въ правѣ замѣнить объемъ пирамиды SABCDEF объемомъ конуса SAD и площадь основанія ABCDEF площадью круга AH, принимая конусъ за пирамиду, имѣющую основаніемъ правильный многоугольникъ, котораго сторона меньше всякой произвольно малой величины. Такъ какъ объемъ правильной пирамиды, имѣющей какое угодно число боковыхъ граней, измѣряется площадью основанія, помноженною на треть высоты, то объемъ конуса измѣряется также площадью основанія, помноженною на треть высоты.

Назвавъ объемъ прямаго конуса чрезъ V, радіусъ его основанія чрезъ R и высоту чрезъ h, получимъ формулу

$$V = \pi R^2 . \frac{h}{3}.$$

140. Слѣдствіе. Если два прямые конуса, коихъ высоты суть h и h' и радіусы отнований равны R и R$'$ подобны, то должно быть $\frac{R}{R'} = \frac{h}{h'}$. Назвавъ объемы этихъ конусовъ чрезъ V и V$'$, получимъ $V = \pi R^2 \frac{h}{3}$, $V' = \pi R'^2 . \frac{h'}{3}$ и

$$\frac{V}{V'} = \frac{R^2}{R'^2} . \frac{h}{h'}.$$

Замѣнивъ въ этой пропорціи дробь $\frac{h}{h'}$ дробью $\frac{R}{R'}$, получимъ

$$\frac{V}{V'} = \frac{R^3}{R'^3},$$

слѣдовательно также получится

$$\frac{V}{V'} = \frac{h^3}{h'^3}.$$

Отсюда слѣдуетъ, что *объемы двухъ подобныхъ прямыхъ конусовъ относятся между собою, какъ кубы радіусовъ ихъ основаній и какъ кубы ихъ высотъ.*

Если радіусы R и R$'$ равны, то получится $\frac{V}{V'} = \frac{h}{h'}$; т. е. *объемы двухъ прямыхъ конусовъ, коихъ радіусы основаній равны, относятся между собою, какъ ихъ высоты.*

Если высоты h и h' равны, то получится $\frac{V}{V'} = \frac{R^2}{R'^2}$; т. е. *объемы двухъ прямыхъ конусовъ, имѣющихъ равныя высоты, относятся между собою, какъ квадраты радіусовъ основаній.*

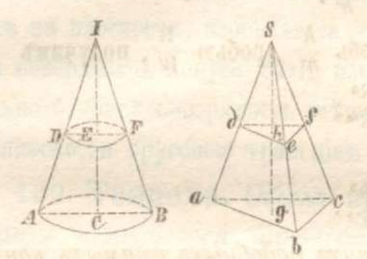
141. Слѣдствіе. Извѣстно, что обращеніемъ прямоугольника BCcb (фиг. 302) около стороны Cc образуется цилиндръ ABba. Въ то-же самое время прямоугольный треугольникъ Cbc образуетъ прямой конусъ. По предъидущему объемъ цилиндра $ABba = \pi R^2 . h$ и объемъ конуса $Cbc = \pi R^2 . \frac{h}{3}$; слѣдовательно объемъ конуса Cbc составляетъ третью часть объема цилиндра ABba, и объемъ, образуемый треугольникомъ BCb, составляетъ двѣ трети объема цилиндра ABba.

142. **Теорема.** *Усѣченный конусъ съ параллельными осно-*

ваніями равномѣренъ суммѣ трехъ прямыхъ конусовъ, имѣющихъ общею высотою высоту усѣченнаго конуса, а основаніями нижнее основаніе, верхнее основаніе и среднее геометрическое между этими основаніями.

Данный усѣченный конусъ ABFD (фиг. 312) равенъ разности прямыхъ конусовъ IAB и IDF. На плоскости нижняго основанія усѣченнаго конуса построимъ треугольную пирамиду Sabc, коей высота Sg равна высотѣ IC и основаніе abc равномѣрно основанію конуса IAB. Продолженною плоскостью верхняго основанія усѣченнаго конуса мы разсѣчемъ пирамиду Sabc; въ сѣченіи получится треугольникъ def, равномѣрный кругу DE. Въ самомъ дѣлѣ, по параллельности основаній усѣченнаго конуса, плоскость ICA пересѣчетъ верхнее основаніе по направленію прямой ED, параллельной къ CA; а потому составится пропорція $\frac{CA}{ED}=\frac{IC}{IE}$. Назвавъ площади круговъ CA и ED чрезъ Q и Q′, мы имѣемъ

Фиг. 312.



$$\frac{Q}{Q'}=\frac{\overline{CA}^2}{\overline{ED}^2} \text{ и также } \frac{Q}{Q'}=\frac{\overline{IC}^2}{\overline{IE}^2}.$$

По параллельности плоскостей def и abc получится (97) пропорція $\frac{abc}{def}=\frac{\overline{Sg}^2}{\overline{Sh}^2}$. Такъ какъ S$g$ = IC и Sh = IE, то изъ двухъ послѣднихъ пропорцій составится пропорція

$$\frac{Q}{Q'}=\frac{abc}{def},$$

въ которой площади Q и abc равны; слѣдовательно кругъ Q′ равномѣренъ треугольнику def. Назовемъ площади треугольниковъ abc и def чрезъ q и q'. Зная, что объемъ конуса IAB = $^1/_3$Q × IC и объемъ пирамиды Sabc = $^1/_3 q$ × Sg, мы заключаемъ, по равенству площадей Q и q, и равенству высотъ IC и Sg, что конусъ IAB равно-

мѣренъ пирамидѣ $Sabc$. Объемъ конуса IDF измѣряется произведеніемъ $\frac{1}{3}Q' \times IE$, объемъ пирамиды $Sdef$ равенъ $\frac{1}{3}q' \times Sh$, площади Q' и q' равны и высоты IE и Sh равны; слѣдовательно конусъ IDF равномѣренъ пирамидѣ $Sdef$. Отсюда мы заключаемъ, что усѣченный конусъ ABFD равномѣренъ усѣченной пирамидѣ $abcdef$; но объемъ этой пирамиды равенъ $\frac{1}{3}hg\,(q + q' + \sqrt{qq'}$ и $q = Q$, $q' = Q'$, $hg = EC$; слѣдовательно объемъ усѣченнаго конуса равенъ

$$\frac{1}{3}EC(Q + Q' + \sqrt{QQ'});$$

т. е. этотъ конусъ равномѣренъ суммѣ трехъ прямыхъ конусовъ, имѣющихъ высотою высоту EC усѣченнаго конуса и соотвѣтствующими основаніями: круги CA и ED и среднюю геометрическую между этими кругами.

Назвавъ радіусы CA и ED чрезъ R и R', и высоту EC чрезъ h, получимъ формулу

$$V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + R'^2 + Rr).$$

ЧИСЛЕННЫЕ ВОПРОСЫ *).

196) Вычислить поверхность прямаго конуса, коего ребро содержитъ 7,5 фута и окружность основанія равна 12,56 фута?

197) Вычислить поверхность прямаго конуса, коего ребро равно 18 фут. и діаметръ основанія равенъ $10\frac{1}{2}$ фут. $(\pi = \frac{22}{7})$.

198) Вычислить боковую поверхность прямаго конуса, коего высота 16 фут. и діаметръ основанія 6 фут.

199) Боковая поверхность прямаго конуса содержитъ 99 квад. фут. и окружность его основанія равна 13,2 фута. Сколько футъ содержитъ его ребро и высота? $(\pi = \frac{22}{7})$.

200) Боковая поверхность прямаго конуса, коего ребро равно 17 фут., содержитъ 427,04 квад. фут. Сколько футъ содержитъ діаметръ основанія и высота?

201) Боковая поверхность прямаго конуса, коего высота равна 7,5 фута, содержитъ 106,76 квад. фут. Сколько футъ содержитъ его ребро и діаметръ основанія?

*) Для рѣшенія этихъ вопросовъ должно взять $\pi = 3,14$.

202) Поверхность прямаго конуса содержитъ $39\frac{1}{4}$ квад. фут. и его ребро равно $4\frac{1}{4}$ фута. Сколько футъ содержатъ діаметръ его основанія и высота?

203) Поверхность прямаго конуса содержитъ 58,96 квад. фут. и его ребро 9,2 футами больше діаметра основанія. Сколько футъ содержатъ діаметръ основанія и высота конуса? ($\pi = {}^{22}/_{7}$).

204) Поверхность прямаго конуса содержитъ 138,16 квад. фут. и окружность его основанія 7,44 футами больше ребра. Сколько футъ содержитъ діаметръ основанія?

205) Поверхность прямаго конуса содержитъ 7,04 квад. фута, а его высота и діаметръ основанія содержатъ вмѣстѣ 3,8 фута. Сколько футъ содержатъ высота и діаметръ основанія? ($\pi = {}^{22}/_{7}$).

206) Если діаметръ основанія прямаго конуса, коего поверхность содержитъ 13,345 квад. фута, увеличить 1 футомъ и ребро увеличить также 1 футомъ, то поверхность образовавшагося конуса составитъ 31,4 квад. фута. Сколько футъ содержатъ діаметръ основанія и ребро даннаго конуса?

207) Вычислить объемъ прямаго конуса, коего высота равна 6 фут. и радіусъ основанія равенъ $1\frac{1}{2}$ фут.

208) Обращеніемъ прямоугольника BC*cb* около стороны C*c* (фиг. 302) произошелъ цилиндръ, коего высота содержитъ 7 футъ и діаметръ основанія равенъ 2,8 фута. Вычислить объемъ тѣла, происшедшаго отъ обращенія треугольника BC*b*. ($\pi = {}^{22}/_{7}$).

209) Вычислить объемъ прямаго конуса, коего ребро равно 5,4 фута и окружность основанія содержитъ 6,28 фута.

210) Вычислить объемъ конуса, происшедшаго обращеніемъ прямоугольнаго треугольника SAC (фиг. 307) около катета SC, зная, что катетъ SC = 1,8 фута и катетъ CA = 1,35 фута.

211) Вычислить объемъ прямаго конуса, коего боковая поверхность представляется на плоскости круговымъ секторомъ, имѣющимъ радіусъ въ 15 дюймовъ и центральный уголъ въ 120°.

212) Найти радіусъ основанія прямаго конуса, коего объемъ содержитъ 397,3632 куб. фута и высота равна 12 фут.

213) Прямоугольный параллелопипедъ, имѣющій измѣренія въ 24 фута, 27 футъ и 42,39 фута, равномѣренъ прямому конусу, коего основаніе имѣетъ въ окружности 169,56 фута. Найти высоту этого конуса.

214) Поверхность прямаго конуса содержитъ 439,6 квадрат. фута и его діаметръ равенъ 8 фут. Вычислить объемъ этого конуса.

215) Прямой конусъ, коего ребро равно $6^1/_2$ фут. и радіусъ основанія равенъ $2^1/_2$ фут., требуется раздѣлить на двѣ равныя части плоскостью, параллельною къ основанію. Опредѣлить разстояніе этого сѣченія отъ вершины конуса.

216) Сумма объемовъ двухъ прямыхъ конусовъ А и В составляетъ 22,765 куб. фут., высота конуса А равна 7 фут., высота конуса В равна 6 фут. и діаметръ основанія конуса А однимъ футомъ больше діаметра основанія конуса В. Опредѣлить объемъ каждаго конуса.

217) Діаметры основаній двухъ подобныхъ конусовъ равны 1,5 фута и 2 футамъ, и объемъ меньшаго конуса содержитъ 13,5 кубическаго фута. Найти объемъ большаго конуса.

218) Объемы двухъ подобныхъ конусовъ суть 34 куб. фут. и 272 куб. фут. и высота меньшаго конуса равна 8 фут. Найти высоту большаго конуса.

219) Вычислить боковую поверхность усѣченнаго конуса, коего ребро равно 8 фут. и радіусы основаній содержатъ 5 футъ и 4 фута.

220) Вычислить полную поверхность усѣченнаго конуса, коего ребро равно 12 фут. и окружности основаній содержатъ 25,12 и 15,7 фута.

221) Боковая поверхность усѣченнаго конуса содержитъ $1246^1/_2$ квад. фут. и окружности его основаній равны $40^1/_2$ и $28^3/_4$ фут. Сколько футъ содержитъ ребро этого конуса?

222) Боковая поверхность усѣченнаго конуса содержитъ 29,045 квад. фут. и радіусы его основаній равны 1,25 и 0,6 фута. Сколько футъ содержатъ ребро и высота этого конуса?

223) Полная поверхность усѣченнаго конуса содержитъ 96,712 квад. фут. и діаметры его основаній равны 6 и 2 фут. Сколько футъ содержатъ ребро и высота этого конуса?

224) Поверхность усѣченнаго конуса содержитъ 43,96 квад. фут., его боковая поверхность содержитъ 30,615 квад. фут. и ребро равно 3,9 фут. Найти радіусы его основаній.

225) Боковая поверхность усѣченнаго конуса содержитъ 44 квад. фут., ребро равно 4 фут. и радіусъ нижняго основанія 3 футами больше радіуса верхняго основанія. Найти эти радіусы. ($\pi = {}^{22}/_{7}$).

226) Полная поверхность усѣченнаго конуса содержитъ $39^1/_4$ квад. фут., его ребро равно 5 фут. и сумма діаметровъ его основаній равна 4 фут. Сколько футъ содержитъ каждый изъ этихъ діаметровъ?

227) Принявъ бочку за сумму двухъ равныхъ усѣченныхъ конусовъ, имѣющихъ одно общее основаніе, вычислить вмѣстимость бочки, коей высота h равна 6 фут., радіусъ r дна равенъ 1,3 фута и радіусъ R выпуклости равенъ 1,7 фута.

228) Радіусы основаній усѣченнаго конуса равны 3,4 фута и 1,4 фута, и его ребро равно 5,2 фута. Вычислить объемъ этого конуса.

229) Вычислить объемъ усѣченнаго конуса, коего ребро равно 5 фут. и окружности его основаній содержатъ 7,85 и 6,28 фута.

230) Усѣченный конусъ, коего высота равна h и радіусы основаній суть R и r, раздѣленъ на три части плоскостями, проведенными параллельно къ основаніямъ и раздѣляющими высоту h на три равныя части. Вычислить объемъ каждой части даннаго конуса.

231) Объемъ усѣченнаго конуса содержитъ 1186,92 кубическ. фут., его высота равна 18 фут. и радіусъ нижняго основанія равенъ 6 фут. Сколько футъ содержитъ радіусъ верхняго основанія?

232) Требуется раздѣлить усѣченный конусъ на двѣ равныя части плоскостью, параллельною къ его основаніямъ. Назвавъ высоту конуса чрезъ h и радіусы его основаній чрезъ R и r, опредѣлить разстояніе плоскости сѣченія отъ большаго основанія конуса и радіусъ этого сѣченія.

233) Объемъ усѣченнаго конуса содержитъ 615,44 куб. фута, его высота 2 футами больше діаметра нижняго основанія и этотъ діаметръ 7 футами больше радіуса верхняго основанія. Найти высоту и радіусы основаній.

ТЕОРЕМЫ.

234) Боковая поверхность прямаго конуса измѣряется произведеніемъ его ребра на окружность круга, проведеннаго чрезъ средину ребра.

235) Сѣченія прямаго конуса плоскостями, проходящими чрезъ его ось, суть равные равнобедренные треугольники.

236) Обращеніемъ прямоугольнаго треугольника ABC около катета AB и потомъ около катета BC происходятъ два прямые конуса, которыхъ объемы обратно пропорціональны высотамъ конусовъ.

237) Объемъ прямаго конуса, коего ребро l равно діаметру основанія измѣряется произведеніемъ $\frac{1}{24}\pi l^3\sqrt{3}$.

238) Объемъ прямаго конуса, коего ребро равно l и высота равна h, измѣряется произведеніемъ $\frac{1}{3}\pi h(l+h)(l-h)$.

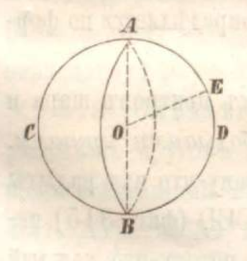
239) Если чрезъ какую-нибудь точку C основанія конуса SAB проведены производящая SC и касательная CD къ основанію ACB, то плоскость, проведенная чрезъ эти прямыя, касается къ конусу по направленію SC.

ТРЕТЬЯ ГЛАВА.

Шаровая поверхность. Шаръ. Сѣченіе шара. Большой кругъ шара. Малый кругъ. Полюсы круга. Касательная плоскость. Задачи.

143. *Сферическою* или *шаровою* поверхностью называется поверхность, происходящая отъ обращенія полуокружности ACB (фиг. 313) около діаметра AB. При этомъ обращеніи полуокружности ACB, всѣ точки ея постоянно равно-отстоятъ отъ ея центра O; слѣдовательно точки сферической поверхности равно-удалены отъ центра ея производящей, а потому сферическою поверхностью можно назвать геометрическое мѣсто точекъ пространства, равно-отстоящихъ отъ постоянной точки,

Фиг. 313.



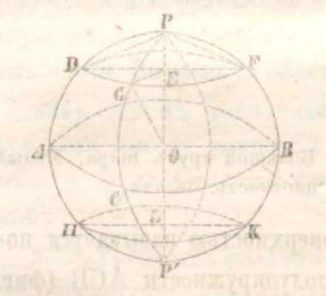
При обращеніи полуокружности АСВ, всѣ точки ея описываютъ круги, коихъ центры находятся на оси АВ вращенія и коихъ плоскости перпендикулярны къ этой оси.

Шаромъ называется тѣло, ограниченное сферическою поверхностью, или происходящее отъ обращенія полукруга около діаметра. Разстояніе ЕО какой-либо точки Е сферической поверхности отъ ея центра называется *радіусомъ* шара. Всѣ радіусы шара равны. Прямая АВ, соединяющая двѣ точки шаровой поверхности и проходящая чрезъ ея центръ, называется *діаметромъ* шара. Всѣ діаметры шара равны, потому-что каждый діаметръ есть удвоенный радіусъ.

144. **Теорема.** *Всякое сѣченіе шара плоскостью есть кругъ.* Такъ какъ точки образовавшагося сѣченія находятся на шаровой поверхности, то они равно-удалены отъ центра; но извѣстно (17), что геометрическое мѣсто точекъ какой-нибудь плоскости, равноотстоящихъ отъ постоянной точки, есть окружность круга.

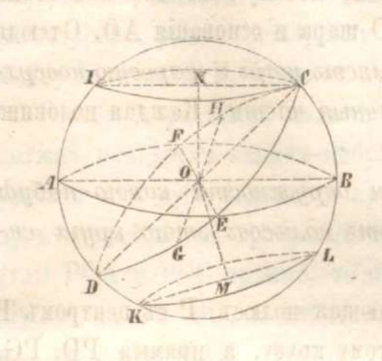
145. Слѣдствіе. Если центръ О шара (фиг. 314) находится на плоскости сѣченія, то эта точка есть центръ сѣченія АСВ, имѣющаго радіусомъ радіусъ шара. Если-же центръ О шара находится внѣ плоскости сѣченія, то центръ Е есть проекція центра О на плоскости этого сѣченія (17). Радіусъ EG = r сѣченія DGF есть катетъ прямоугольнаго треугольника OEG, коего гипотенуза OG есть радіусъ R шара и катетъ OE равенъ разстоянію d центра шара отъ плоскости сѣченія. Радіусъ r опредѣляется по формулѣ $r^2 = R^2 - d^2$.

Фиг. 314.



Круги сѣченія, коихъ центры совпадаютъ съ центромъ шара и коихъ радіусы суть радіусы шара, называются *большими кругами*. Всѣ большіе круги шара равны между собою, потому-что ихъ радіусы суть радіусы шара. Два большіе круга АЕВ и CED (фиг. 315) пересѣкаются по направленію діаметра EF шара, потому-что каждый

Фиг. 315.



изъ нихъ проходитъ чрезъ центръ шара. Такъ какъ эти круги имѣютъ общій центръ съ шаромъ, то этотъ центръ долженъ находиться на прямой EF ихъ пересѣченія; слѣдовательно прямая EF есть діаметръ большихъ круговъ AEB и CED. Отсюда мы заключаемъ, что *два пересѣкающіеся большіе круга взаимно дѣлятся на двѣ равныя части.*

Кругъ сѣченія, не проходящій чрезъ центръ шара, называется *малымъ кругомъ,* потому-что его радіусъ меньше радіуса шара.

146. Слѣдствіе. Всякая прямая, пересѣкающая сферическую поверхность, какъ напримѣръ GH (фиг. 315), имѣетъ съ нею только двѣ общія точки, потому-что окружность круга, проходящая чрезъ GH и центръ O шара, пересѣкается этою прямою въ двухъ точкахъ G и H.

147. Слѣдствіе. Оконечности P и P′ діаметра (фиг. 314), проведеннаго въ шарѣ перпендикулярно къ кругу DGF, называются *полюсами* этого круга. Два параллельные круга HK и DGF имѣютъ одни тѣ-же полюсы P и P′. Центръ O шара, центръ E какого-нибудь круга DGF сѣченія и его полюсы P и P′ находятся на одной прямой, перпендикулярной къ плоскости этого круга Большой кругъ PCP′, проходящій чрезъ полюсы P и P′ круга DGF, перпендикуляренъ къ этому кругу, потому-что кругъ PCP′ содержитъ прямую PP′, перпендикулярную къ плоскости DGF.

148. Слѣдствіе. Представимъ себѣ, что шаръ (фиг. 314) раздѣленъ кругомъ AO на двѣ части APB и AP′B, которыя помѣщены основаніями на одной и той-же плоскости. Потомъ положивъ часть APB на AP′B, мы узнаемъ, что основанія этихъ частей совмѣстятся, потому-что каждое изъ нихъ равно кругу AO; также по-

верхности APB и AP'B совмѣстятся, потому-что всѣ ихъ точки равно-отстоятъ отъ общаго центра O шара и основанія AO. Отсюда слѣдуетъ, что *большой кругъ раздѣляетъ шаръ и шаровую поверхность соотвѣтственно на двѣ равныя части.* Каждая половина шара называется *полушаріемъ.*

149. **Теорема.** *Всѣ точки окружности какого-нибудь сѣченія шара равно-отстоятъ отъ полюсовъ этого круга сѣченія.*

Прямая PE (фиг. 314), соединяющая полюсъ P съ центромъ E круга DGF, перпендикулярна къ этому кругу, а прямыя PD, PG, PF суть наклонныя, равно-отстоящія отъ основанія E перпендикуляра PE; слѣдовательно эти наклонныя равны. По равенству хордъ PD, PG, PF, соотвѣтствующія имъ дуги большихъ круговъ PAP', PCP', PBP' также равны.

Такимъ-же образомъ доказывается, что разстоянія PA, PC, PB точекъ большаго круга ACB отъ полюса P равны. Дугамъ PA, PC, PB соотвѣтствуютъ прямые углы POA, POC, POB, коихъ вершины находятся въ центрѣ большихъ круговъ PAP', PCP', PBP'; слѣдовательно каждая изъ дугъ PA, PC, PB равна четверти окружности большаго круга.

150. Слѣдствіе. Говоря о полюсѣ какого-нибудь малаго круга DGF шара (фиг. 314), мы подразумѣваемъ полюсъ P, ближайшій къ этому кругу. Прямая PD, соединяющая полюсъ P съ какою-нибудь точкою D малаго круга DGF, называется его *полярнымъ разстояніемъ.* Дуга PG большаго круга PCP', заключенная между полюсомъ P и какою-нибудь точкою G малаго круга DGF, называется *сферическимъ радіусомъ* этого круга. Сферическій радіусъ какого-нибудь большаго круга ACB равенъ четверти окружности этого круга, и полярное разстояніе равно боку квадрата, вписаннаго въ большомъ кругѣ.

151. Слѣдствіе. Для начертанія окружности на шаровой поверхности употребляется циркуль съ дугообразными ножками. Чтобы

описать окружность какого-нибудь круга DGF, дадимъ циркулю раствореніе, равное полярному разстоянію PD и, поставивъ одну ножку въ полюсѣ P, опишемъ другою ножкою окружность.

Чтобы опредѣлить полюсъ большаго круга ACB (фиг. 314), должно изъ двухъ какихъ-нибудь точекъ A и C окружности ACB описать двѣ дуги большихъ круговъ; точкою P пересѣченія этихъ дугъ опредѣляется требуемый полюсъ. Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ углы POA и POC прямые, то прямая PO перпендикулярна къ радіусамъ OA и OC, и слѣдовательно она также перпендикулярна къ плоскости OAC. Отсюда слѣдуетъ, что точка P есть полюсъ круга ACB.

Для начертанія окружности большаго круга должно напередъ опредѣлить его полярное разстояніе, а для этого необходимо опредѣлить радіусъ шара (см. зад. 160 на 123 стр.).

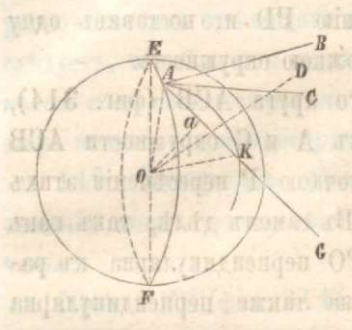
152. **Теорема.** *Два равные малые круга равно-отстоятъ отъ центра шара, и разстояніе малаго круга отъ центра шара тѣмъ больше, чѣмъ меньше этотъ кругъ.*

Плоскость, проведенная чрезъ центръ O шара (фиг. 315) и центры M и N данныхъ малыхъ круговъ, пересѣкаетъ шаровую поверхность по направленію окружности ACBK большаго круга, и малые круги IN и KM по направленію ихъ діаметровъ IC и KL; эти діаметры суть хорды круга ACBK. По предъидещему (I, 138) разстоянія ON и OM равны, если хорды IC и KL равны, т. е. если круги IN и KM равны. Разстояніе ON больше разстоянія OM (I, 140), если хорда IC больше хорды KL, т. е. если кругъ IN больше круга KM.

153. **Теорема.** *Плоскость, проведенная перпендикулярно къ радіусу шара чрезъ оконечность этой прямой, касается къ шару, и на оборотъ: всякая плоскость, касающаяся къ шару, должна быть перпендикулярна къ его радіусу, проходящему чрезъ точку касанія.*

Чрезъ оконечность A (фиг. 316) радіуса OA шара проведена

Фиг. 316.



плоскость BAC перпендикулярно къ этому радiусу. Требуется доказать, что эта плоскость касается къ шару. Соединивъ какую-нибудь D плоскости BAC съ центромъ O, получимъ наклонную OD, которая больше перпендикуляра OA; слѣдовательно точка D находится внѣ шара. Такимъ-же образомъ мы узнаемъ, что всѣ точки плескости BAC, кромѣ точки A, лежатъ внѣ шара; слѣдовательно эта плоскость и шаръ имѣютъ только одну общую точку A.

На оборотъ: если плоскость BAC касается къ шару въ точкѣ A, то всякая точка D этой плоскости лежитъ внѣ шара, а потому разстоянiе OD больше OA; слѣдовательно прямою OA выражается кратчайшее разстоянiе центра O отъ плоскости BAC, т. е. прямая OA перпендикулярна къ плоскости BAC.

154. Слѣдствiе. Чрезъ точку, данную на сферической поверхности, возможно провести плоскость, касательную къ шару, и только одну такую плоскость, потому-что (14) чрезъ данную точку всегда можно провести плоскость перпендикулярно къ данной прямой, и притомъ только одну плоскость.

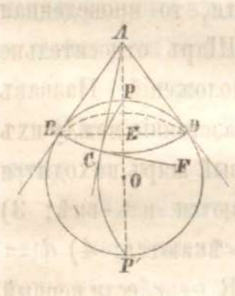
155. Слѣдствiе. Чрезъ точку A проведемъ на сферической поверхности дугу, на которой возьмемъ какую-нибудь точку K. Проведя сѣкущую AG, соединимъ средину *a* хорды AK съ центромъ O; тогда прямая O*a* перпендикулярна къ AK, потому-что AOK равнобедренный треугольникъ. Представимъ себѣ, что сѣкущая AG, обращаясь около точки A, постепенно приближается къ касательной AC; тогда при совпаденiи средины *a* хорды AK съ точкою A, также точка K совпадетъ съ точкою A, и уголъ O*a*G совмѣстится съ угломъ OAC; слѣдовательно уголъ OAC долженъ быть прямой. Отсюда мы заключаемъ, что касательная AC къ дугѣ, проведенной на шаровой

поверхности, перпендикулярна къ радіусу OA шара, проведенному чрезъ точку A касанія.

Плоскость, касающаяся къ шару въ какой-нибудь точкѣ A, содержитъ въ себѣ касательныя ко всѣмъ дугамъ, проведеннымъ чрезъ точку A на сферической поверхности.

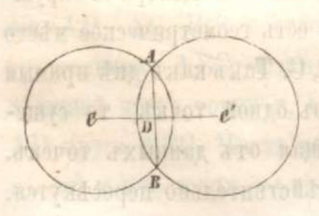
156. Слѣдствіе. Чрезъ прямую OA (фиг. 317), соединяющую центръ O шара съ точкою A, данною внѣ шара, проведемъ плоскость; эта плоскость въ сѣченіи съ шаромъ даетъ большой кругъ PBP'D, къ которому проведемъ касательную AB изъ точки A. Обращеніемъ полуокружности PBP' около оси AO образуется поверхность шара; въ то-же время касательная AB производитъ поверхность прямаго конуса, имѣющаго основаніемъ кругъ BCD, описанный прямою BE. Во всякой точкѣ C круга BCD конусъ и шаръ имѣютъ общую касательную плоскость, потому-что производящая AC и касательная CF къ кругу BCD опредѣляютъ плоскость, касательную къ конусу, и кромѣ того эти прямыя лежатъ на плоскости, касательной къ шару. Отсюда слѣдуетъ, что чрезъ точку A, данную внѣ шара, возможно провести безчисленное множество плоскостей, касающихся къ шару, и что всѣ касательныя AB, AC, AD..., проведенныя къ шару изъ одной точки, равны между собою.

Фиг. 317.



157. **Теорема.** *Пересѣченіемъ двухъ шаровъ образуется кругъ, перпендикулярный къ центральной линіи шаровъ и имѣющій центръ на этой прямой.*

Фиг. 318.



Отъ разсѣченія шаровъ C и C' (фиг. 318) плоскостью, проходящею чрезъ центральную линію CC', образуются большіе круги, имѣющіе общія точки A и B. Обращеніемъ этихъ круговъ около прямой CC', точка A, общая кругамъ C

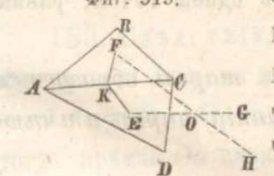
и C', опишетъ окружность круга, перпендикулярнаго къ прямой CC' и имѣющаго центръ на этой прямой. Этою окружностью опредѣляется пересѣченіе данныхъ шаровъ.

158. *Примѣчаніе.* Два шара, имѣющіе только одну общую точку, *касаются* въ этой точкѣ. Точка касанія двухъ шаровъ находится на ихъ центральной линіи, потому-что если чрезъ точку касанія шаровъ провести къ нимъ касательную плоскость и также провести прямую перпендикулярно къ этой плоскости, то проведенная прямая должна пройти чрезъ центры шаровъ. Шаръ относительно другаго шара можетъ имѣть пять различныхъ положеній. Назвавъ чрезъ R и r радіусы данныхъ шаровъ и чрезъ d разстояніе между ихъ центрами, мы имѣемъ: 1) $d > R + r$, если первый шаръ находится внѣ втораго; 2) $d = R + r$, если шары касаются изъ-внѣ; 3) $d < R + r$ или $d > R - r$, если шары пересѣкаются; 4) $d = R - r$, если шары касаются изъ-внутри; 5) $d < R - r$, если первый шаръ находится внутри втораго.

159. **Теорема.** *Чрезъ четыре точки* A, B, C, D, *не лежащія въ одной плоскости, можно провести сферическую поверхность, но только одну такую поверхность.*

Требуется опредѣлить точку, равно-отстоящую отъ данныхъ точекъ A,B,C и D (фиг. 319). Если изъ центра F окружности, описанной около треугольника ABC, возставленъ перпендикуляръ FH къ плоскости ABC, то имъ опредѣлится (17) геометрическое мѣсто точекъ, равно-отстоящихъ отъ точекъ A, B, C. Точно также перпендикуляръ EG, возставленный къ плоскости ADC изъ центра E окружности, проходящей чрезъ точки A, D, C, есть геометрическое мѣсто точекъ, равно-отстоящихъ отъ точекъ A, D, C. Такъ какъ двѣ прямыя FH и EG могутъ пересѣкаться только въ одной точкѣ, то существуетъ только одна точка, равно-отстоящая отъ данныхъ точекъ. Докажемъ теперь, что прямыя FH и EG дѣйствительно пересѣкутся.

Фиг. 319.



Для этого проведемъ плоскость P чрезъ средину K прямой AC перпендикулярно къ этой прямой. Такъ какъ эта плоскость есть геометрическое мѣсто точекъ, равно-отстоящихъ отъ точекъ A и C, то она должна содержать прямыя EG и FH. Прямыя KF и KE пересѣченія плоскости P съ плоскостями ABC и ADC должны пересѣкаться, потому-что плоскости ABC и ADC пересѣкаются. Прямыя ED и FH, находящіяся въ одной плоскости P и соотвѣтственно перпендикулярныя къ двумъ пересѣкающимся прямымъ KE и KF, должны пересѣкаться; слѣдовательно точка O ихъ пересѣченія есть центръ требуемаго шара.

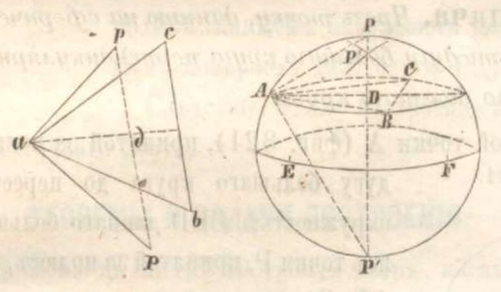
Слѣдствія. Два шара совмѣщаются, если у нихъ четыре общія точки, не лежащія въ одной плоскости.

Если изъ центровъ окружностей, описанныхъ около граней тетраэдра, возставлены перпендикуляры къ гранямъ, то эти перпендикуляры пересѣкаются въ одной точкѣ.

160. **Задача.** *Найти радіусъ шара.*

Изъ какой-нибудь точки P (фиг. 320) сферической поверхности

Фиг. 320.



опишемъ какимъ-нибудь радіусомъ окружность круга и на ней возьмемъ точки A, B, C. Отмѣривъ циркулемъ прямолинейныя разстоянія AB, AC, BC, построимъ на бумагѣ треугольникъ *abc*, равный треугольнику ABC, и потомъ опредѣлимъ центръ *d* окружности, проходящей чрезъ точки *a*, *b*, *c*; получимъ прямую *ad*, равную радіусу AD круга ABC. Чрезъ точку *d* проведемъ прямую перпендикулярно къ *ad* и изъ точки *a* радіусомъ, равнымъ полярному разстоянію PA,

опишемъ дугу до пересѣченія p съ проведеннымъ перпендикуляромъ. Наконецъ изъ точки a къ прямой ap возставимъ перпендикуляръ до пересѣченія p' съ перпендикуляромъ pp'; прямою pp' изобразится діаметръ PP′ шара.

161. **Задача.** *Чрезъ двѣ точки, данныя на шаровой поверхности, описать окружность большаго круга.*

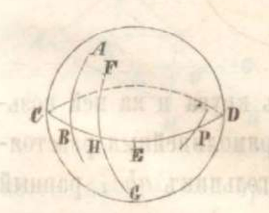
Изъ данныхъ точекъ E и F (фиг. 320), принявъ ихъ за полюсы, опишемъ двѣ дуги большихъ круговъ; точкою P″ пересѣченія этихъ дугъ опредѣлится полюсъ большаго круга, проходящаго чрезъ точки E и F (151). Наконецъ изъ точки P″ опишемъ окружность большаго круга.

Слѣдствіе. Если данныя точки суть оконечности какого-нибудь діаметра AB шара (фиг. 314), то вопросъ допускаетъ множество рѣшеній, потому-что дуги большихъ круговъ, описанныя изъ точекъ A и B, совпадаютъ и образуютъ окружность большаго круга PCP′; слѣдовательно всякая точка этой окружности есть полюсъ большаго круга, проходящаго чрезъ точки A и B.

162. **Задача.** *Чрезъ точку, данную на сферической поверхности, описать дугу большаго круга перпендикулярно къ окржжности даннаго большаго круга.*

Изъ данной точки A (фиг. 321), принятой за полюсъ, опишемъ дугу большаго круга до пересѣченія P съ окружностью CED даннаго большаго круга, и изъ точки P, принятой за полюсъ, опишемъ дугу AB. Эта дуга перпендикулярна къ окружности CED, потому-что ея полюсъ P находится на этой окружности.

Фиг. 321.



163. **Задача.** *Раздѣлить дугу большаго круга на двѣ равныя части.*

На поверхности шара (фиг. 321) опредѣлимъ двѣ точки F и G, равно-отстоящія отъ оконечностей B и E данной дуги BE и соеди-

нимъ эти точки дугою большаго круга (161). Такъ какъ плоскость этой дуги перпендикулярна къ хордѣ BE въ ея срединѣ, то эта плоскость раздѣляетъ дугу BE на двѣ равныя части.

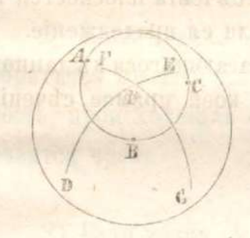
Слѣдствіе. Дуга FG раздѣляетъ также на двѣ равныя части каждую изъ дугъ малыхъ круговъ, проходящихъ чрезъ точки B и E, потому-что эти дуги имѣютъ общую хорду BE.

Примѣчаніе. Предъидущее рѣшеніе относится также къ вопросу, по которому требуется описать дугу FG большаго круга, проходящую въ перпендикулярномъ положеніи чрезъ средину дуги, соединяющей двѣ данныя точки шаровой поверхности.

164. Задача. *Описать окружность малаго круга чрезъ три точки, данныя на поверхности шара.*

Опишемъ (фиг. 322) дуги ED и FG большихъ круговъ (163) чрезъ среднія точки дугъ AB и BC, соединяющихъ данныя точки A, B и B, C, перпендикулярно къ этимъ дугамъ. Точка P пересѣченія дугъ ED и FG равно-отстоитъ отъ точекъ A, B и C. Наконецъ изъ точки P, принятой за полюсъ, опишемъ окружность радіусомъ, равнымъ полярному разстоянію PA.

Фиг. 322.



Слѣдствіе. Этимъ построеніемъ можно найти полюсъ даннаго малаго круга.

ТЕОРЕМЫ И ЗАДАЧИ ПОСТРОЕНІЯ.

240) Въ прямомъ цилиндрѣ построить шаръ, касающійся къ боковой поверхности цилиндра.

241) Въ равнобочномъ цилиндрѣ возможно вписать шаръ такимъ образомъ, чтобы онъ касался къ основаніямъ цилиндра, а къ его боковой поверхности по направленію большаго круга.

242) Въ прямомъ конусѣ съ круговымъ основаніемъ возможно вписать шаръ, касающійся къ основанію конуса, а къ его боковой поверхности по направленію малаго круга.

243) Если ребро прямаго конуса равно a, его высота равна h и

радіусъ его основанія равенъ r, то радіусъ вписаннаго шара равенъ $\frac{rh}{a+r}$ и радіусъ круга касанія равенъ $r - \frac{r^2}{a}$.

244) Прямая ОС, соединяющая центръ О шара съ центромъ С круга, находящагося внѣ шара, перпендикулярна къ этому кругу. Требуется доказать, что прямыя АО, ВО, DO и т. д., соединяющія центръ О съ точками данной окружности, пересѣкаютъ поверхность шара въ точкахъ a, b, d и т. д., лежащихъ на окружности круга, параллельнаго къ данному кругу С.

245) Чрезъ данную прямую АВ возможно провести двѣ касательныя плоскости къ данному шару.

246) Если чрезъ данную прямую АВ проведены двѣ плоскости Р и Р′, касающіяся къ данному шару, и какая-нибудь точка F прямой АВ соединена съ точками D и Е касанія, то прямыя DF и DE составляютъ равные углы съ прямою АВ.

247) Если двѣ пересѣкающіяся плоскости Р и Р′ касаются къ двумъ неравнымъ шарамъ, то прямая АВ пересѣченія плоскостей Р и Р′ пересѣкаетъ центральную линію шаровъ или ея продолженіе.

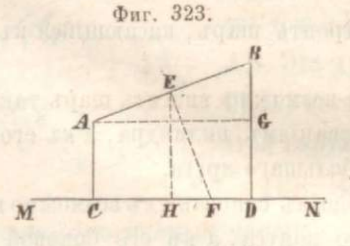
248) Опредѣлить центръ и радіусъ шара, касающагося къ данной плоскости и къ цилиндрической поверхности, коей прямое сѣченіе есть кругъ.

ЧЕТВЕРТАЯ ГЛАВА.

Измѣреніе поверхности тѣла, происшедшаго отъ обращенія правильной ломаной линіи. Поверхность шароваго пояса. Поверхность шара.

165. **Теорема.** *Если двѣ прямыя* АВ *и* MN *(фиг. 323) находятся въ одной плоскости, то обращеніемъ прямой* АВ *около* MN *образуется поверхность, которая измѣряется проекціею* CD *прямой* АВ *на* MN, *помноженною на окружность круга, коего радіусъ есть перпендикуляръ* EF, *возставленный изъ средины* E *прямой* АВ *до пересѣченія* F *съ осью вращенія.*

Фиг. 323.



1) Обращеніемъ трапеціи ACDB, въ которой углы ACD и BDC прямые, около прямой CD, образуется усѣченный конусъ, котораго боковая поверхность (138) измѣряется произведеніемъ

$$2\pi . EH . AB \ldots (1).$$

Проведя прямую AG параллельно къ оси MN, получимъ два подобные треугольника ABG и EFH, потому-что ихъ стороны соотвѣтственно перпендикулярны. Изъ этихъ треугольниковъ получится пропорція

$$\frac{EH}{AG} = \frac{EF}{AB},$$

которая даетъ два равныя произведенія

$$EH . AB = EF . AG.$$

Въ формулѣ (1) замѣнивъ произведеніе EH . AB равнымъ ему произведеніемъ EF . AG, получимъ

$$2\pi . EF . AG \text{ или } 2\pi . EF . CD \ldots (2).$$

2) Если прямая AB параллельна къ оси MN, то прямая EF обратится въ EH и прямая CD сдѣлается равною AB; тогда поверхность, происходящая отъ обращенія прямой AB около оси MN, выразится чрезъ

$$2\pi . EH . AB \ldots (3)$$

3) Если точка A прямой AB совпадаетъ съ точкою C прямой MN, то прямая AG совмѣстится съ осью MN и поверхность, происходящая отъ обращенія прямой AB, выразится чрезъ

$$\pi . BD . AB = 2\pi . EH . AB;$$

но $\frac{EH}{AD} = \frac{EF}{AB}$ и EH.AB = EF.AD, слѣдовательно получится

$$2\pi . EF . AD \ldots (4).$$

166. Всякая ломаная линія, которая состоитъ изъ равныхъ прямыхъ линій, составляющихъ между собою равные углы, называется *правильною ломаною линіею*. Правильная ломаная линія можетъ быть вписана въ кругѣ и можетъ быть около него описана, потому-что она составляетъ часть периметра правильнаго многоугольника. Центръ и радіусъ правильной ломаной линіи суть центръ и радіусъ

круга, вписаннаго въ этой линіи или около нея описаннаго. Чтобы въ дугѣ круга (фиг. 309) вписать правильную ломаную линію, должно раздѣлить эту дугу на равныя части *ab, bc, cd* и т. д. и провести хорды *ab, bc, cd* и т. д. Перпендикуляръ, опущенный изъ центра S на одну изъ равныхъ хордъ, называется *апоѳемою* правильной ломаной линіи.

167. **Теорема.** *Отъ обращенія правильной ломаной линіи около оси, не пересѣкающей ея, происходитъ поверхность, которая измѣряется окружностью вписаннаго круга, помноженною на проекцію ломаной линіи, взятую на оси вращенія.*

Дана правильная ломаная линія ABCD (фиг. 324), имѣющая центръ O и апоѳему $OE = OF = OG$. Извѣстно (165), что поверхность Q происходящая отъ обращенія прямой AB около оси MN, измѣряется произведеніемъ $2\pi . OE . ab$. Назвавъ чрезъ Q' и Q'' поверхности, происходящія отъ обращенія прямыхъ BC и CD около оси MN, получимъ $Q' = 2\pi . OE . bc$ и $Q'' = 2\pi . OE . cd$. Наконецъ поверхность, происходящая отъ обращенія правильной ломаной линіи ABCD, равна

Фиг. 324.



$$Q + Q' + Q'' = 2\pi . OE . (ab + bc + cd) = 2\pi . OE . ad.$$

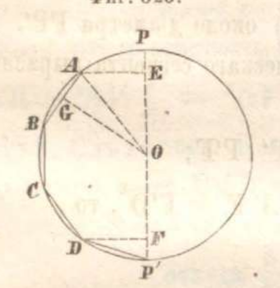
168. *Поясомъ* называется часть сферической поверхности, заключенная между двумя параллельными кругами. Эти круги суть *основанія* пояса и разстояніе между ними есть его *высота*. При обращеніи полуокружности PAP' (фиг. 314) около діаметра PP', дуга DH производитъ поясъ, коего основанія суть круги DE и HL, описываемые точками D и H, и высота есть проекція EL дуги DH на оси PP'.

Часть шаровой поверхности, происшедшая отъ обращенія дуги PD около оси PP' (фиг. 314), называется *сферическимъ сегментомъ*. Кругъ DE называется *основаніемъ* сферическаго сегмента и прямая PE его *высотою*.

169. **Теорема**. *Поверхность пояса измѣряется его высотою, помноженною на окружность большаго круга.*

Разсмотримъ поясъ (фиг. 325), происшедшій отъ обращенія дуги AD круга около діаметра PP′. Высота EF этого пояса опредѣляется перпендикулярами AE и DF, опущенными изъ оконечностей A и D

Фиг. 325.



дуги AD на ось PP′. Потомъ впишемъ въ этой дугѣ правильную ломанію ABCD, коей апоѳема прямая OG, и назовемъ чрезъ Q поверхность, происходящую отъ обращенія линіи ABCD около оси PP′. Извѣстно, что постепеннымъ удвоеніемъ числа сторонъ правильной ломаной линіи, каждая сторона можетъ быть сдѣлана меньше всякой произвольно малой величины; тогда периметръ ABCD такъ близко подойдетъ къ своему предѣлу, что разность между дугою AD и периметромъ ABCD будетъ меньше всякой произвольно малой величины, и также апоѳема $OG = \sqrt{\overline{OA}^2 - \frac{\overline{AB}^2}{4}}$ такъ близко подойдетъ къ радіусу OA, что разность OA — OG сдѣлается меньше всякой произвольно малой величины. При постепенномъ приближеніи периметра ABCD къ дугѣ AD, поверхность Q постепенно приближается къ поверхности S пояса; слѣдовательно поверхность пояса есть предѣлъ, къ которому стремится поверхность Q при безконечномъ увеличеніи числа сторонъ вписанной ломаной линіи. На этомъ основаніи поверхность пояса можетъ быть принята за поверхность, происшедшую отъ обращенія правильной ломаной линіи, стороны которой меньше всякой произвольно малой величины; а потому основываясь на предъидущемъ (167), мы заключаемъ, что поверхность S пояса измѣряется окружностью OA, помноженною на высоту EF. Назвавъ высоту EF пояса чрезъ h и радіусъ OA чрезъ R, получимъ формулу

$$S = 2\pi R . h.$$

170. Слѣдствіе. Поверхности S и S′ двухъ поясовъ, принадлежащихъ двумъ равнымъ шарамъ, относятся между собою, какъ ихъ высоты h и h'; т. е.

$$\frac{S}{S'} = \frac{2\pi R.h}{2\pi R.h'}, \text{ откуда } \frac{S}{S'} = \frac{h}{h'}.$$

171. Слѣдствіе. Разсмотримъ сферическій сегментъ, происшедшій отъ обращенія дуги P′D (фиг. 325) около діаметра PP′. По предъидущему (169) поверхность s сферическаго сегмента выразится чрезъ

$$2\pi.P'O.P'F = \pi.PP'.P'F;$$

но такъ какъ (II, 75) $\frac{PP'}{P'D} = \frac{P'D}{P'F}$ и $PP'.P'F = \overline{P'D}^2$, то

$$s = \pi.\overline{P'D}^2;$$

слѣдовательно *поверхность сферическаго сегмента равномѣрна площади круга, коего радіусъ есть хорда, стягивающая производящую дугу сегмента.*

172. **Теорема.** *Поверхность шара измѣряется произведеніемъ его діаметра на окружность большаго круга.*

Принявъ поверхность S шара за поверхность пояса, коего высота равна діаметру 2 R шара, мы получимъ по предъидущему (169) формулу

$$S = 2\pi R.2R = 4\pi R^2;$$

слѣдовательно *поверхность шара равна учетверенной площади большаго круга*, или *она равна площади круга, коего радіусъ равенъ діаметру шара.*

Примѣры.

1) *Зная, что градусъ экватора содержитъ 15 географическихъ миль, выразить въ квадратныхъ миляхъ поверхность земнаго шара.*

Окружность $2\pi R$ экватора $= 15 \times 360 = 5400$ милямъ;

откуда его діаметръ $2R = \frac{5400}{\pi} = 5400 \times 0,3183098861 = 1718,87338494$ мил.

Поверхность S земнаго шара $= 2\pi R . 2R = 5400 \times 1718,87338494 = 9281916,278676$ квад. мил.

2) *Поверхность шара равна одной квадратной сажени; сколько сажень содержитъ радіусъ?*

Зная, что поверхность шара равна $4\pi R^2 = 1$ кв. саж., мы найдемъ $R = {}^1/_2 \sqrt{\frac{1}{\pi}} = {}^1/_2 \sqrt{0,31830886} = 0,2821$ саж.

173. Слѣдствіе. Назвавъ радіусы двухъ шаровъ чрезъ R и R', ихъ діаметры чрезъ D и D' и ихъ поверхности чрезъ S и S', получимъ

$$S = 4\pi R^2 = \pi D^2 \text{ и } S' = 4\pi R'^2 = \pi D'^2;$$

$$\text{откуда } \frac{S}{S'} = \frac{R^2}{R'^2} \text{ и } \frac{S}{S'} = \frac{D^2}{D'^2},$$

т. е. *поверхности двухъ шаровъ относятся между собою, какъ квадраты ихъ радіусовъ или діаметровъ.*

ЧИСЛЕННЫЕ ВОПРОСЫ.

249) Отъ шара, коего радіусъ равенъ 2,4 фута, отдѣленъ поясъ, имѣющій высоту въ 1,5 фута. Вычислить поверхность этого пояса. ($\pi = 3,14$).

250) Поверхность пояса содержитъ $106^1/_3$ квад. фута и его высота равна $4^5/_6$ фута. Вычислить радіусъ шара, которому принадлежитъ этотъ поясъ. ($\pi = {}^{22}/_7$).

251) Высота сферическаго сегмента, коего поверхность содержитъ 21,98 квад. фут., равна 1,4 фута. Опредѣлить радіусъ шара, которому принадлежитъ этотъ сегментъ. ($\pi = 3,14$).

252) Вычислить поверхность шара, коего діаметръ равенъ $4^3/_4$ фута. ($\pi = 3,1416$).

253) Окружность большаго круга шара содержитъ 9,42 фута. Вычислить поверхность этого шара. ($\pi = 3,14$).

254) Поверхность шара содержитъ 153,86 квад. фут. Сколько футъ содержитъ его діаметръ? ($\pi = 3,14$).

255) Вычислить поверхность пояса, коего основанія, лежащія по

одну сторону центра шара, имѣютъ діаметры въ 4 и 2 фута, зная, что радіусъ шара равенъ 2,4 фута. ($\pi = 3{,}14$).

256) Радіусъ шара равенъ 6 фут. и центръ этого шара находится между основаніями пояса, коихъ радіусы равны 3 фут. и $4\frac{1}{2}$ фут. Вычислить поверхность этого пояса. ($\pi = 3{,}14$).

257) Требуется плоскостью разсѣчь шаръ, коего радіусъ равенъ 2,6 фута, такимъ образомъ, чтобы поверхность образовавшагося сегмента содержала 26,13 квад. фут. Опредѣлить разстояніе плоскости сѣченія отъ центра шара. ($\pi = 3{,}14$).

258) Вычислить объемъ куба, вписаннаго въ шарѣ, коего поверхность содержитъ 6,16 квад. фут. ($\pi = {}^{22}/_{7}$).

259) Поверхность сферическаго сегмента содержитъ 18,84 квад. фут. и его высота 2 футами меньше радіуса шара. Вычислить радіусъ шара. ($\pi = 3{,}14$).

260) Вычислить полную поверхность полушарія, коего діаметръ равенъ 1,4 фута. ($\pi = {}^{22}/_{7}$).

261) Шаръ, коего радіусъ равенъ R, разсѣченъ плоскостью. Зная, что радіусъ образовавшагося сѣченія равенъ r, вывести выраженіе для поверхности меньшаго изъ образовавшихся сегментовъ.

262) Діаметръ шара 2,14 футами меньше окружности большаго круга. Вычислить поверхность этого шара. ($\pi = 3{,}14$).

263) Поверхность шара A должна равняться суммѣ поверхностей шаровъ B и C. Радіусъ шара B равенъ 4,5 фута и окружность большаго круга шара C равна 15,7 фута. Сколько футъ долженъ содержать радіусъ шара A? ($\pi = 3{,}14$).

264) Шаръ разсѣченъ плоскостью такимъ образомъ, что ея разстояніе отъ центра шара равно радіусу круга сѣченія, и поверхность отсѣченнаго сегмента содержитъ 14,71 квад. фута. Опредѣлить радіусъ круговаго сѣченія. ($\pi = 3{,}14$).

265) Сумма діаметровъ двухъ шаровъ равна a и сумма ихъ поверхностей равна S. Вычислить діаметры этихъ шаровъ.

ТЕОРЕМЫ.

266) Поверхность шара равна боковой поверхности равнобочнаго цилиндра, описаннаго около шара.

267) Если окружность большаго круга равна P, то поверхность шара выразится чрез $\frac{P^2}{\pi}$.

268) Поверхность шара равна $^2/_3$ полной поверхности цилиндра, описаннаго около шара.

269) Поверхность сферическаго сегмента относится къ плоскости его основанія точно такъ, какъ діаметръ шара относится къ разности между этимъ діаметромъ и высотою сегмента.

270) Поверхность пояса относится къ поверхности шара точно такъ, какъ высота пояса относится къ діаметру шара.

271) Обращеніемъ круга C около прямой MN, лежащей внѣ его, но въ его плоскости, образуется тѣло, которое называется *кольцомъ*. Длина окружности круга, описанной при обращеніи круга CD его центромъ C, составляетъ *длину* кольца. Поверхность кольца измѣряется окружностью его производящей, помноженною на его длину.

272) Если полуокружность, раздѣленная на три равныя части AB, BC, CD, обращается около діаметра AD, то поверхность S пояса происходящая отъ обращенія средней дуги BC, равна суммѣ поверхностей Q и Q′ сегментовъ, происходящихъ отъ обращенія крайнихъ дугъ AB и CD.

273) Часть шаровой поверхности, заключенная между двумя полуокружностями большихъ круговъ, имѣющихъ общій діаметръ, называется *сферическимъ двусторонникомъ*. Поверхность сферическаго двусторонника PCP′D измѣряется діаметромъ PP′, помноженнымъ на дугу CD большаго круга, заключенную между полуокружностями PCP и PDP′.

274) Поверхность S шара составляетъ $^4/_9$ поверхности Q равнобочнаго конуса, описаннаго около шара.

ПЯТАЯ ГЛАВА.

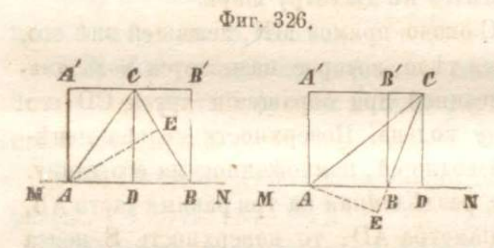
Объемъ тѣла, происшедшаго отъ обращенія треугольника. Объемъ тѣла, происшедшаго отъ обращенія правильнаго многоугольнаго сектора. Объемъ шароваго сектора. Объемы шара, пояса и шароваго сегмента.

174. **Теорема.** *Если треугольникъ обращается около оси, находящейся въ его плоскости и проходящей чрезъ его вершину,*

то образующійся объемъ измѣряется произведеніемъ поверхности, описанной бокомъ, лежащимъ противъ неподвижной вершины, на третью часть высоты, соотвѣтствующей этому боку.

Данный треугольникъ можетъ имѣть три различныя положенія относительно оси вращенія.

1) Данъ треугольникъ ABC (фиг. 326), котораго сторона AB лежитъ на оси вращенія MN.



Фиг. 326.

Объемъ, происходящій отъ обращенія треугольника ABC, равенъ суммѣ объемовъ двухъ конусовъ, происходящихъ отъ обращенія прямоугольныхъ треугольниковъ ACD и BCD, если высота CD находится внутри треугольника ABC. Если-же высота CD находится внѣ треугольника ABC, то образующійся объемъ равенъ разности объемовъ двухъ конусовъ. При обращеніи треугольника ABC около оси MN, прямоугольникъ ABB'A', имѣющій съ нимъ общее основаніе и общую высоту, производитъ цилиндръ. Этотъ цилиндръ равенъ суммѣ или разности двухъ цилиндровъ, происходящихъ отъ обращенія двухъ прямоугольниковъ ADCA' и BDCB', коихъ сумма или разность равна прямоугольнику ABB'A'. Извѣстно (141), что объемъ конуса ACD равенъ одной трети объема цилиндра ADCA' и объемъ конуса BCD равенъ одной трети объема цилиндра BDCB'; слѣдовательно объемъ, происходящій отъ обращенія треугольника ABC, есть третья часть объема цилиндра ABB'A' или

$$\text{объемъ } ABC = {}^1/_3 \pi \overline{CD}^2 . AB.$$

Опустивъ перпендикуляръ AE изъ вершины A на противолежащій бокъ BC, мы узнаемъ, что CD . AB = AE . BC, потому-что каждое изъ этихъ произведеній выражаетъ удвоенную площадь треугольника ABC. Въ выведенной формулѣ объема ABC замѣнимъ

произведенiе CD.AB равнымъ ему произведенiемъ AE.BC; получимъ

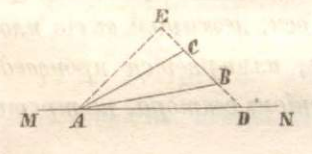
$$\text{объемъ ABC} = \tfrac{1}{3}\pi \text{CD.AE.BC}.$$

Такъ какъ произведенiе πCD.BC выражаетъ боковую поверхность конуса BCD (134) или поверхность, происходящую отъ обращенiя стороны BC треугольника ABC, то

$$\text{объемъ ABC} = \text{поверх. BC.} \frac{AE}{3}.$$

2) Вершина A треугольника ABC (фиг. 327) находится на оси вращенiя MN и продолженная сторона CB пересѣкаетъ ось въ точкѣ D. Такъ какъ треугольникъ ABC равенъ разности треугольниковъ ACD и ABD, то объемъ, происходящiй отъ обращенiя треугольника ABC, равенъ разности объемовъ, происходящихъ отъ обращенiя треугольниковъ ACD и ABD; слѣдовательно

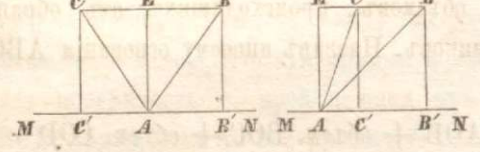
Фиг. 327.



$$\text{объемъ ABC} = (\text{поверх. DC} - \text{поверх. DB}) \frac{AE}{3} = \text{поверх. BC.} \frac{AE}{3}.$$

3) Вершина A треугольника ABC (фиг. 328) находится на оси вращенiя MN и сторона BC параллельна къ этой оси. Объемъ, происходящiй отъ обращенiя треугольника ABC, равенъ суммѣ или разности объемовъ, происходящихъ отъ обращенiя треугольниковъ ABE и ACE. Объемъ, происходящiй отъ обращенiя треугольника ABE, равенъ двумъ-третямъ объема цилиндра (141), происходящаго отъ обращенiя прямоугольника AB′BE, и объемъ, происходящiй отъ обращенiя треугольника ACE, равенъ двумъ-третямъ объема цилиндра, происходящаго отъ обращенiя прямоугольника AC′CE; слѣдовательно въ обоихъ случаяхъ объемъ, происходящiй отъ обращенiя треугольника ABC, равенъ двумъ-третямъ объема цилиндра, происходящаго отъ

Фиг. 328.



обращенія прямоугольника B′C′CB, равнаго суммѣ или разности прямоугольниковъ AB′BE и AC′CE; т. е.

$$\text{объемъ } ABC = {}^2/_3\pi\overline{AE}^2.BC.$$

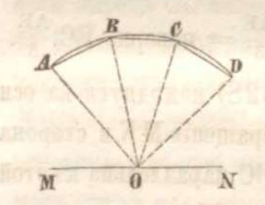
Такъ какъ произведеніе $2\pi AE.BC$ выражаетъ боковую поверхность цилиндра, происшедшаго отъ обращенія прямоугольника B′C′CB, или поверхность, описанную стороною BC, то

$$\text{объемъ } ABC = \text{поверх. } BC.\frac{AE}{3}.$$

175. **Теорема**. *Объемъ, происходящій отъ обращенія правильнаго многоугольнаго сектора около оси, лежащей въ его плоскости и проходящей чрезъ его центръ, измѣряется произведеніемъ поверхности, описываемой основаніемъ сектора, на третію часть апоѳемы этой ломаной линіи.*.

Данъ правильный многоугольный секторъ OABCD (фиг. 329), коего центръ O лежитъ на оси вращенія MN. Раздѣлимъ данный секторъ на треугольники прямыми, соединяющими его центръ O съ вершинами основанія ABCD. Объемъ, происходящій отъ обращенія этого сектора, равенъ суммѣ объемовъ, происходящихъ отъ обращенія полученныхъ треугольниковъ. Назвавъ апоѳему основанія ABCD чрезъ a, получимъ (174)

Фиг. 329.



$$\text{объемъ } OABCD = \text{объем. } AOB + \text{объем. } BOC + \text{объем. } COD$$

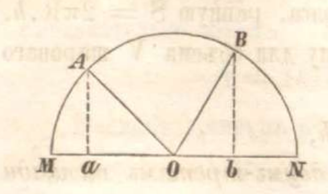
$$= \text{поверх. } AB.\frac{a}{3} + \text{поверх. } BC.\frac{a}{3} + \text{поверх.} CD\cdot\frac{a}{3}$$

$$= (\text{поверх. } AB + \text{поверх. } BC + \text{поверх. } CD)\frac{a}{3}$$

$$= \text{поверх. } ABCD.\frac{a}{3}.$$

176. Въ полукругѣ MABN (фиг. 330) данъ секторъ AOB, имѣющій основаніемъ дугу AB, коей проекція на діаметрѣ MN есть прямая ab. Обращеніемъ полуокружности MABN около діаметра MN образуется шаровая поверхность. При этомъ дуга AB производитъ

Фиг. 330.



поясъ и радiусы OA и OB, ограничивающiе секторъ AOB, образуютъ боковыя поверхности двухъ конусовъ, имѣющихъ основанiями круги Aa и Bb. Часть объема шара, заключающаяся между боковыми поверхностями этихъ конусовъ и поясомъ AB, есть *шаровой секторъ*, соотвѣтствующiй круговому сектору AOB; слѣдовательно шаровымъ секторомъ называется объемъ, происходящiй отъ обращенiя круговаго сектора около его внѣшняго дiаметра. Поясъ, образуемый обращенiемъ дуги круговаго сектора, называется *основанiемъ* шароваго сектора.

177. **Теорема.** *Объемъ шароваго сектора измѣряется произведенiемъ поверхности его основанiя на треть радiуса шара.*

Объемъ шароваго сектора есть предѣлъ объемовъ, происшедшихъ отъ обращенiя правильныхъ многоугольныхъ секторовъ, вписанныхъ въ соотвѣтствующемъ круговомъ секторѣ, если число сторонъ ихъ основанiй будетъ увеличено до безконечности. При этомъ безконечномъ увеличенiи числа сторонъ, разность между дугою ABD и ломаною линiею ABCD (фиг. 329) сдѣлается меньше всякой произвольно малой величины и разность между радiусомъ OA и апоѳемою a сдѣлается столь малою, что эти прямыя можно принять сливающимися; тогда поверхность s, происшедшая отъ обращенiя ломаной линiи ABCD, обращается въ поверхность S пояса и объемъ v, происшедшiй отъ обращенiя многоугольнаго сектора OABCD, обращается въ объемъ V шароваго сектора. Такъ какъ шаровой секторъ есть тѣло, происходящее отъ обращенiя многоугольнаго сектора, коего основанiе содержитъ безконечное число весьма малыхъ сторонъ, и апоѳема равна радiусу $OA = R$, то объемъ шароваго сектора (175) равенъ $V = S.\frac{R}{3}$.

178. Слѣдствiе. Назвавъ чрез R радiусъ шара и чрезъ h

высоту EL пояса (фиг. 314), служащаго основанiемъ шаровому сектору, мы получимъ (169) поверхность пояса, равную $S = 2\pi R.h$. Подставимъ эту величичину S въ формулу для объема V шароваго сектора; получится

$$V = {}^2/_3\ \pi R^2.h,$$

т. е. *объемъ шароваго сектора равенъ двумъ-третямъ площади большаго круга, помноженнымъ на высоту пояса, служащаго сектору основанiемъ.*

179. Слѣдствiе. Если объемы двухъ шаровыхъ секторовъ, принадлежащихъ равнымъ шарамъ, суть V и V', и поверхности соотвѣтствующихъ поясовъ равны S и S', то изъ выраженiй

$$V = S.\frac{R}{3} \text{ и } V' = S'.\frac{R}{3}$$

составится пропорцiя

$$\frac{V}{V'} = \frac{S}{S'};$$

слѣдовательно *объемы двухъ шаровыхъ секторовъ, принадлежащихъ равнымъ шарамъ, относятся между собою, какъ поверхности соотвѣтсвующихъ поясовъ.*

180. **Теорема.** *Объемъ шара измѣряется произведенiемъ его поверхности на одну треть его радiуса.*

Отъ обращенiя полукруга MABN (фиг. 330), въ которомъ проведенъ радiусъ OA, около дiаметра MN произойдетъ шаръ, состоящiй изъ двухъ шаровыхъ секторовъ, образуемыхъ круговыми секторами MOA и AON. Назвавъ объемъ этихъ шаровыхъ секторовъ чрезъ v и v', поверхности соотвѣтствующихъ имъ поясовъ чрезъ s и s', и радiусъ OA чрезъ R, получимъ (177)

$$v = s\,.\,{}^1/_3R \text{ и } v' = s'\,.\,{}^1/_3R;$$

отсюда объемъ V шара равенъ

$$v + v' = (s + s').\frac{R}{3}.$$

Такъ какъ сумма $s + s'$ поверхностей поясовъ равна поверхности S шара, то объемъ $V = S\,.\,{}^1/_3R$.

По предъидущему (172) извѣстно, что поверхность $S = 4\pi R^2$; слѣдовательно объемъ

$$V = 4\pi R^2 . \frac{R}{3} = \frac{4}{3}\pi R^3 \ldots\ldots (1).$$

Назвавъ діаметръ шара чрезъ D, получимъ еще формулу

$$V = \pi D^2 . \frac{D}{6} = \frac{1}{6}\pi D^3 \ldots\ldots (2).$$

Примѣры. 1) *Вычислить объемъ шара, зная, что діаметръ экватора равенъ 1718,87 милямъ.*

Вычислимъ объемъ земнаго шара по формулѣ (2), подставивъ 3,1416 вмѣсто π и 1718,87 вмѣсто D; получимъ

$^1/_6 . 3,1416 . (1718,87)^3 = 2659063650$ куб. мил. (почти).

2) *Вычислить радіусъ шара, содержащаго одинъ кубическій футъ.*

По формулѣ (1) мы имѣемъ $^4/_3\pi R^3 = 1$; откуда

$$R = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{3 \times 0,3183098861}{4}} =$$

7,44 дюйма съ точностью до 0,01 дюйма.

181. Слѣдствіе. Означивъ радіусы двухъ шаровъ чрезъ R и R′, и ихъ объемы чрезъ V и V′, получимъ $V = {}^4/_3\pi R^3$ и $V' = {}^4/_3\pi R'^3$; откуда

$$\frac{V}{V'} = \frac{R^3}{R'^3},$$

т. е. *объемы двухъ шаровъ относятся между собою, какъ кубы ихъ радіусовъ.*

Примѣръ. *Если принять радіусъ земнаго шара за единицу, то радіусъ солнца равенъ 108,5. Во сколько разъ объемъ солнца больше объема земнаго шара?*

Объемъ солнца во столько разъ больше объема земнаго шара, во сколько разъ $108,5^3$ больше 1; слѣдовательно объемъ солнца составляетъ 1277289,125 объема земнаго шара.

182. **Теорема.** *Объемъ многогранника, описаннаго около шара, равенъ поверхности многогранника, помноженной на одну треть радіуса шара.*

Плоскостями, проведенными чрезъ центръ шара и каждое изъ ребръ многогранника, мы раздѣлимъ многогранникъ на пирамиды. Эти пирамиды имѣютъ общую вершину въ центрѣ шара и основаніями грани даннаго многогранника. Каждая изъ этихъ пирамидъ измѣряется произведеніемъ площади ея основанія на одну треть высоты, т. е. на одну треть радіуса шара; слѣдовательно объемъ многогранника равенъ его поверхности, помноженной на одну треть радіуса шара.

Объемы двухъ многогранниковъ, описанныхъ около двухъ равныхъ шаровъ, относятся между собою, какъ ихъ поверхности.

183. **Теорема.** *Объемъ, происходящій отъ обращенія круговаго сегмента около діаметра, лежащаго внѣ его плоскости, равно половинѣ объема конуса, коего основаніе имѣетъ радіусомъ хорду дуги сегмента и высота равняется проекціи этой хорды на оси вращенія.*

Круговой сегментъ AKB (фиг. 324) равенъ разности между круговымъ секторомъ OAKB и треугольникомъ OAB; слѣдовательно объемъ, происходящій отъ обращенія сегмента AKB около діаметра MN, равенъ разности объемовъ, происходящихъ отъ обращенія сектора OAKB и треугольника OAB. Назвавъ объемъ сектора OAKB чрезъ v, объемъ OAB чрезъ v', радіусъ OA чрезъ R, хорду AB чрезъ H, ея проекцію ab чрезъ h и апоѳему OE чрезъ a, получимъ (177 и 174)

$$v = {}^2/_3\pi R^2 . h \text{ и}$$

$$v' = \text{поверх. H.}\frac{a}{3} = {}^2/_3\pi a^2 . h;$$

отсюда $v - v' = V = {}^2/_3\pi (R^2 - a^2) . h$.

Такъ какъ OAE прямоугольный треугольникъ,

то $\overline{OA}^2 - \overline{OE}^2 = \overline{AE}^2 = \frac{AB^2}{4}$ или $R^2 - a^2 = \frac{H^2}{4}$; слѣдовательно

$$V = {}^2/_3\pi . \frac{H^2}{4} . h = {}^1/_6\pi H^2 . h.$$

Примѣчаніе. Если круговой сегментъ равенъ полукругу, то объемъ, происходящій отъ обращенія этого сегмента, равенъ объему

шара; слѣдовательно подставивъ $H = h = MN = D$ въ послѣднюю формулу, получимъ формулу для объема шара

$$V = {}^1/_6\pi D^3,$$

которая уже прежде (180,2) была выведена.

184. **Теорема.** *Объемъ шароваго пояса равенъ объему шара, имѣющаго діаметромъ высоту пояса, безъ полусуммы объемовъ двухъ цилиндровъ, имѣющихъ высотами и основаніями высоту и основанія пояса.*

Прямыя cC и dD (фиг. 324) суть радіусы круговъ, происшедшихъ отъ разсѣченія шара плоскостями, перпендикулярными къ его діаметру MN, и отрѣзокъ cd діаметра шара есть высота поясa, коего основанія суть круги cC и dD. Объемъ V пояса cd равенъ суммѣ объемовъ v и v', происходящихъ отъ обращенія круговаго сегмента CHD и трапеціи $CDdc$. Назвавъ радіусы cC и dD чрезъ R и R', хорду CD чрезъ H и ея проекцію cd на діаметрѣ MN чрезъ h, получимъ (183 и 142)

$$v = {}^1/_6\pi H^2.h \text{ и } v' = {}^1/_3\pi(R'^2 + R^2 + R.R').h;$$

$$\text{откуда } V = {}^1/_6\pi\,(H^2 + 2R'^2 + 2R^2 + 2R.R').h.$$

Опустивъ изъ точки D перпендикуляръ DL на прямую Cc, получимъ прямоугольный треугольникъ CDL, въ которомъ

$$\overline{CD}^2 = \overline{DL}^2 + \overline{CL}^2 = \overline{cd}^2 + (Cc - Dd)^2 \text{ или}$$

$$\overline{CD}^2 = \overline{cd}^2 + \overline{Cc}^2 + \overline{Dd}^2 - 2Dd.Cc = h^2 + R^2 + R'^2 - 2R'.R.$$

Подставивъ эту величину $\overline{CD}^2$ въ формулу V, получимъ

$$V = {}^1/_6\pi\,(h^2 + 3R'^2 + 3R^2).h \text{ или}$$

$$V = {}^1/_6\pi h^3 + {}^1/_2\,(\pi R'^2.h + \pi R^2.h),$$

гдѣ членъ ${}^1/_6\pi h^3$ выражаетъ объемъ шара, коего діаметръ равенъ высотѣ h даннаго пояса, а произведеніями $\pi R'^2.h$ и $\pi R^2.h$ измѣряются два цилиндра, имѣющіе высотою прямую h и основаніями круги Dd и Cc.

185. Слѣдствіе. Если основаніе Dd пояса равно нулю, т. е. если плоскость Dd сѣченія, перпендикулярная къ діаметру MN, сдѣ-

лается плоскостью, касательною къ шару, то поясъ CD*dc* обратится въ шаровой сегментъ NC*c*, высота *cd* обратится въ прямую $cN = H'$ и выведенная формула приметъ слѣдующій видъ

$$V' = \frac{1}{6}\pi H'^3 + \frac{1}{2}\pi R^2 . H';$$

слѣдовательно *объемъ сферическаго сегмента равенъ объему шара, имѣющаго діаметромъ высоту сегмента, вмѣстѣ съ объемомъ цилиндра, имѣющаго основаніемъ и высотою основаніе и высоту сегмента.*

ЧИСЛЕННЫЕ ВОПРОСЫ.

275) Вычислить объемъ шара, коего радіусъ равенъ 2,25 фута *).

276) Вычислить объемъ шара, происходящаго отъ обращенія полукруга около діаметра, содержащаго $3\frac{3}{4}$ фута. ($\pi = 3{,}1416$).

277) Найти радіусъ шара, коего объемъ равенъ 113,04 куб. дюйм.

278) Найти діаметръ шара, коего объемъ равенъ $381\frac{1}{2}$ куб. фут.

279) Вычислить объемъ шароваго сектора, зная, что высота пояса, служащаго ему основаніемъ, равна 2 фут. и радіусъ шара равенъ 4,5 фута.

280) Сколько дюймовъ содержитъ высота пояса, соотвѣтствующаго шаровому сектору, котораго объемъ равенъ 847,8 куб. дюйма, если радіусъ шара равенъ 9 дюйм.?

281) Объемъ шароваго сектора содержитъ 7,85 куб. фута и высота соотвѣтствующаго пояса равна 0,6 фута. Сколько футъ содержитъ радіусъ шара?

282) Окружность большаго круга шара содержитъ 1,413 фута. Вычислить объемъ этого шара.

283) Вычислить объемъ шара, если площадь большаго круга содержитъ 78,5 квад. дюйм.

284) Если радіусъ шара увеличить на 0,3 дюйма, то его объемъ увеличится на 6,89544 куб. дюйма. Вычислить діаметръ этого шара.

285) Вычислить поверхность шара, коего объемъ содержитъ 1,76625 куб. дюйма.

---

*) Для рѣшенія этихъ вопросовъ должно взять $\pi = 3{,}14$.

286) Вмѣстимость шара равна 9,944 куб. дюйм. и разность между его наружнымъ и внутреннимъ діаметромъ составляетъ 1 футъ. Вычислить діаметры.

287) Вычислить объемъ шароваго сектора, когда извѣстно, что высота его пояса равна 1 футу и поверхность шара содержитъ 50,24 квад. фут.

288) Вычислить объемъ шара, вписаннаго въ кубѣ, коего діагональ равна 12 дюйм.

289) Вычислить объемъ пояса, коего нижнее основаніе отстоитъ отъ центра шара на 0,4 фута, разстояніе между основаніями равно 1,5 фута и радіусъ шара равенъ 2,4 фута.

290) Вычислить объемъ пояса, зная, что радіусы его основаній содержатъ 2 и 3 фута, и его высота равна 2 фут.

291) Шаръ разсѣченъ двумя параллельными плоскостями, отстоящими отъ точки его поверхности на 0,8 фута и 1,8 фута. Вычислить объемъ образовавшагося пояса, зная, что радіусъ шара равенъ 2,4 фута.

292) Вычислить объемъ шароваго сегмента, зная, что его высота равна 0,6 фута и діаметръ шара равенъ 3 фут.

293) Шаръ, коего діаметръ равенъ $2\frac{1}{2}$ фут., раздѣленъ плоскостью на двѣ части. Вычислить объемы этихъ частей, зная, что радіусъ круга сѣченія равенъ 1 футу.

294) Высота шароваго сегмента, коего объемъ содержитъ 7,235 куб. фут., равна 1,2 фута. Сколько футъ содержитъ радіусъ соотвѣтствующаго шара?

295) На сколько объемъ равнобочнаго конуса, коего ребро равно 2 фут., больше объема шара, вписаннаго въ конусѣ такимъ образомъ, что онъ касается къ основанію и боковой поверхности конуса.

296) Въ прямомъ конусѣ, высотою въ 12 дюймовъ, вписанъ шаръ, касающійся къ основанію и боковой поверхности конуса. Вычислить объемъ конуса, зная, что діаметръ шара равенъ 6 дюйм.

297) Вычислить объемы двухъ шаровъ, зная, что разность ихъ радіусовъ равна 1 футу и разность ихъ поверхностей составляетъ 62,8 квад. фут.

298) Сумма объемовъ двухъ шаровъ равна 1172,266 куб. дюйм. и сумма ихъ радіусовъ равна 10 дюйм. Вычислить діаметры этихъ шаровъ.

299) Разность поверхностей двухъ шаровъ равна 16,94 квад. дюйм. и объемы этихъ шаровъ относятся между собою, какъ числа 216 и 125. Вычислить діаметры этихъ шаровъ. ($\pi = \frac{22}{7}$).

ТЕОРЕМЫ.

300) Если поверхность шара равна S, то его объемъ выразится чрезъ $\frac{S}{6}\sqrt{\frac{S}{\pi}}$.

301) Если поверхности куба и шара равны, то объемы этихъ тѣлъ относятся между собою, какъ числа $\sqrt{\pi}$ и $\sqrt{6}$.

302) Объемъ шара равенъ $^2/_3$ объема цилиндра, описаннаго около шара.

303) Объемъ шара равенъ объему прямаго конуса, коего высота равна радіусу шара, а радіусъ основанія равенъ діаметру шара.

304) Если шаръ, котораго радіусъ равенъ R, разсѣченъ двумя параллельными плоскостями, отстоящими отъ какой-нибудь точки шаровой поверхности на h и h', то объемъ образовавшагося пояса выразится чрезъ $\pi\,[(h-h')^2\,R - {}^1/_3(h^3 - h'^3)]$.

305) Если около круга описаны квадратъ и правильный треугольникъ такимъ образомъ, что сторона квадрата совпадаетъ съ бокомъ треугольника, то обращеніемъ всей фигуры около высоты треугольника, проведенной перпендикулярно къ совмѣстившимся сторонамъ, образуются шаръ, цилиндръ и конусъ, коихъ объемы относятся между собою, какъ числа 4, 6, 9.

306) Если около круга, коего радіусъ равенъ R, описанъ квадратъ ABCD и на его сторонѣ AB построенъ равнобедренный треугольникъ EAB, коего вершина лежитъ на окружности круга, то обращеніемъ фигуры около высоты EF треугольника EAB образуются конусъ, шаръ и цилиндръ, коихъ объемы относятся между собою, какъ числа 1, 2, 3. (Архимедова теорема).

307) Чрезъ точку A дуги AMB круговаго сектора AMBC проведена касательная, равная хордѣ AB. Требуется доказать, что при обращеніи фигуры около радіуса AC прямоугольный треугольникъ AEC образуетъ прямой конусъ, равномѣрный шаровому сектору, образующемуся круговымъ секторомъ AMBC.

308) Если прямыя AC и AB (фиг. 328) равны, то обращеніемъ

равнобедреннаго треугольника ABC около оси MN происходитъ объемъ, равный $^2/_3$ объема цилиндра, коего высота равна боку BC и радіусъ основанія равенъ высотѣ AE треугольника.

309) Обращеніемъ параллелограма ABCD послѣдовательно около двухъ смежныхъ сторонъ AB и BC образуются два объема V и V', которые обратно пропорціональны этимъ сторонамъ.

ПРИЛОЖЕНІЕ АЛГЕБРЫ КЪ ГЕОМЕТРІИ.

Выраженіе линій, площадей и объемовъ числами. Однородность выраженій. Возстановленіе однородности. Построеніе алгебраическихъ формулъ. Рѣшеніе геометрическихъ задачъ спомощіею Алгебры. Отрицательныя рѣшенія.

186. Во второй части Планиметріи весьма часто встрѣчалась надобность выражать линіи числами; такъ напримѣръ при рѣшеніи задачи (85, II): „раздѣлить прямую въ крайнемъ и среднемъ отношеніи“ мы выразили данную прямую AB числомъ a, предположивъ, что отношеніе между этою прямою и какою-нибудь единицею m длины равно a.

Извѣстно, что для вычисленія какой-нибудь площади должно составить произведеніе двухъ чиселъ, выражающихъ отношенія двухъ линій къ какой-нибудь единицѣ, и для опредѣленія какого-нибудь объема, должно перемножить три числа, полученныя отнесеніемъ трехъ линій къ какой-нибудь единицѣ; слѣдовательно для площадей и объемовъ нѣтъ надобности употреблять особыхъ означеній.

На оборотъ: всякое отвлеченное число можетъ быть изображено линіею, если отвлеченная единица будетъ замѣнена какою-нибудь единицею длины и потомъ будетъ построена линія, отношеніе которой къ единицѣ длины равно-данному числу; такъ напримѣръ число $\sqrt{2}$ мо-

жетъ быть изображено гипотенузою равнобедреннаго прямоугольнаго треугольника, котораго катетъ равенъ какой-нибудь единицѣ длины.

Означеніе линій числами даетъ возможность примѣнять алгебрическія дѣйствія къ рѣшенію геометрическихъ задачъ. Рѣшеніе геометрической задачи спомощіею Алгебры состоитъ изъ трехъ частей: 1) составленія унавненія по условіямъ заданнаго вопроса, 2) рѣшенія уравненія, и 3) построенія найденной величины неизвѣстной, т. е. составленія чертежа по полученному рѣшенію уравненія.

187. Приведеніе геометрическихъ задачъ къ уравненіямъ и рѣшеніе сихъ послѣднихъ будетъ разсмотрѣно впослѣдствіи; а теперь познакомимся съ свойствами численныхъ выраженій, означающихъ линіи, площади и объемы, и съ построеніемъ формулъ.

Въ выраженіи $\frac{ab}{c}$ числа a, b, c суть отношенія линій А, В, С къ какой-нибудь единицѣ m, т. е. $a = \frac{A}{m}$, $b = \frac{B}{m}$, $c = \frac{C}{m}$; слѣдовательно данное выраженіе произошло отъ выраженія $\frac{am \, . \, bm}{cm} = \frac{ab \, . \, m}{c}$, въ которомъ m есть единица. Въ этомъ выраженіи единица m входитъ множителемъ только одинъ разъ, а потому оно называется *выраженіемъ перваго измѣренія* и означаетъ линію. Въ числителѣ выраженія $\frac{a^3b}{cd^2}$ единица повторяется множителемъ четыре раза, а въ знаменателѣ три раза; слѣдовательно оно перваго измѣренія. Каждое изъ выраженій a^2, $\frac{a^2b}{c}$, $\sqrt[3]{15c^6}$, $\frac{a^3b^2}{cd^2}$ называется *выраженіемъ втораго измѣренія* и означаетъ площадь. Выраженія a^3, a^2b, abc, $\sqrt{a^3bc^2}$ суть *третьяго измѣренія* и означаютъ объемы. Всѣ выраженія, которыхъ измѣренія выше третьяго, не означаютъ геометрическихъ величинъ. Замѣчательны выраженія $\frac{a}{b}$, $\frac{a^2}{bc}$, $\frac{ab}{cd}$ и т. д., въ которыхъ измѣреніе числителя равно измѣренію знменателя; они называются *выраженіями нулеваго измѣренія*.

Одночленныя выраженія одно и того-же измѣренія называются *однородными*. Возможно произвести сложеніе и вычитаніе только

надъ однородными одночленами. Полученная сумма или разность должна быть величина однородная съ данными одночленами; а потому всякій многочленъ, коего члены суть величины однородныя, называется *однороднымъ;* такъ напримѣръ $a^2 - \frac{4ab^2}{c} + \frac{b^3}{4c}$ однородный многочленъ, втораго измѣренія,

188. Если при рѣшеніи какого-нибудь геометрическаго вопроса отношеніе каждой линіи къ какой-нибудь единицѣ означалось буквою и ни одна изъ линій не принималась за единицу, то выраженіе неизвѣстной, полученное изъ составленнаго уравненія, должно быть однородное. Въ самомъ дѣлѣ, означивъ отношенія данныхъ линій къ какой-нибудь единицѣ буквами $a, b, c, d\ldots$ и отношеніе искомой линіи къ той-же единицѣ буквою x, получимъ выраженіе x, которое должно состоять изъ однородныхъ членовъ перваго измѣренія, потому-что (187) всякій многочленъ составляется сложеніемъ и вычитаніемъ однородныхъ одночленовъ, и образовавшаяся сумма или разность должна быть одного измѣренія съ каждымъ одночленомъ. Такъ напримѣръ получивъ выраженіе $x = \frac{A}{B}$, гдѣ A и B два многочлена, мы замѣчаемъ, что измѣреніе числителя A единицею выше измѣренія знаменателя B, потому-что число x означаетъ линію; слѣдовательно члены дробнаго выраженія $\frac{A}{B}$ должны удовлетворять условіямъ однородности. Точно также въ выраженіи $x = \sqrt{\frac{A}{B}}$, полученномъ изъ уравненія $Bx^2 = A$, каждый изъ многочленовъ A и B долженъ быть однородный, и кромѣ того измѣреніе многочлена B должно быть двумя единицами ниже измѣренія многочлена A.

Принявъ за единицу одну изъ линій, входящихъ въ заданный вопросъ, мы можемъ получить для неизвѣстной выраженіе неоднородное; такъ напримѣръ выраженіе $x = \frac{a - b^2 + ac^2}{a^2b - b + c^2}$ получилось неоднородымъ, потому-что одна изъ данныхъ линій принята за единицу. Для возстановленія однородности, должно ввести множителемъ линію, принятую за единицу, такимъ образомъ, чтобы выраженіе

удовлетворяло условіямъ однородности. Въ полученномъ выраженіи числитель и знаменатель содержатъ члены перваго, втораго и третьяго измѣреній; но измѣреніе числителя должно быть единицею выше измѣренія знаменателя; слѣдовательно предположивъ, что пропущена данная линія m, принятая за единицу, мы должны помножить на m^3 членъ a перваго измѣренія въ числителѣ, на m^2 членъ $-b^2$ втораго измѣренія въ числителѣ и членъ $-b$ перваго измѣренія въ знаменателѣ, наконецъ на m членъ ac^2 третьяго измѣренія въ числителѣ и членъ c^2 втораго измѣренія въ знаменателѣ. Послѣ этого получится выраженіе

$$x = \frac{am^3 - b^2m^2 + ac^2m}{a^2b - bm^2 + c^2m} = \frac{m(am^2 - b^2m + ac^2)}{a^2b - bm^2 + c^2m}.$$

Этимъ введеніемъ множителя m и его степеней выраженіе x не измѣняется, потому-что $m = 1$. Если извѣстно, что неоднородное выраженіе $\sqrt{a + \frac{bc}{d^3}}$ означаетъ линію, то каждый членъ подкоренной величины долженъ быть втораго измѣренія. Предположивъ, что данныя линіи отнесены къ единицѣ m, мы помножимъ членъ a на m и членъ $\frac{bc}{d^3}$ на m^3; тогда получится выраженіе

$$\sqrt{am + \frac{bcm^3}{d^3}} = \sqrt{m\left(a + \frac{bcm^2}{d^3}\right)}.$$

189. Рѣшеніемъ уравненія, составленнаго по условіямъ геометрическаго вопроса, получается выраженіе, показывающее, какія именно геометрическія построенія должны быть произведены для полученія искомой линіи. Чтобы познакомиться съ построеніемъ алгебраическихъ выраженій предлагаются слѣдующіе примѣры.

1) Выраженіе $x = \frac{ab}{c}$ означаетъ четвертую пропорціональную трехъ прямыхъ a, b, c, построеніе которой извѣстно (67, II).

2) Изъ выраженія $x = \frac{b^2}{c}$ составивъ пропорцію $\frac{x}{b} = \frac{b}{c}$, опишемъ на прямой BC $= c$ полуокружность (фиг. 171). Потомъ отложимъ хорду BA $= b$ и изъ A опустимъ перпендикуляръ AD на діаметръ BC; получимъ отрѣзокъ BD $= x$.

3) Выраженіе $x = \sqrt{ab}$, получаемое изъ пропорціи $\frac{a}{x} = \frac{b}{x}$, означаетъ среднюю пропорціональную между прямыми a и b. Построеніе ея извѣстно (76, II).

4) Выраженіе $x = \sqrt{a^2 + b^2}$ означаетъ гипотенузу прямоугольнаго треугольника, коего катеты суть a и b. Построеніе прямой x извѣстно.

Выраженіе $x = \sqrt{a^2 - b^2}$ означаетъ катетъ прямоугольнаго треугольника, имѣющаго гипотенузу a и катетъ b. Построеніе прямой x извѣстно.

5) Чтобы построить выраженіе $x = \frac{abc}{de}$, построимъ четвертую пропорціональную f прямыхъ a, b, d; слѣдовательно получимъ $f = \frac{ab}{d}$ и $x = \frac{fc}{e}$. Потомъ построимъ четвертую пропорціональную прямыхъ f, c, e для полученія прямой x. Такимъ-же образомъ строится выраженіе $x = \frac{abcdef}{ghklm}$.

6) Чтобы построить выраженіе $x = a\sqrt{3}$, внесемъ множитель a подъ радикалъ; получимъ выраженіе $x = \sqrt{3a^2} = \sqrt{a.3a}$, которое строится по примѣру (3).

7) Чтобы построить выраженіе $x = \frac{a}{2}\sqrt{3}$, сдѣлаемъ преобразованіе $x = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$. Послѣднее выраженіе строится по примѣру (4).

8) Въ выраженіи $x = \frac{ac + bc}{d}$ отдѣлимъ общій множитель c за скобки; тогда получимъ выраженіе $x = \frac{(a+b)c}{d}$, въ которомъ x есть четвертая пропорціональная прямыхъ $a + b$, c и d. Построеніе ея извѣстно (67, II).

9) Преобразовавъ выраженіе $x = \sqrt{a^2 - ab}$, получимъ выраженіе $x = \sqrt{a(a - b)}$, котораго построеніе извѣстно (76, 2, II).

10) Выраженіе $x = \frac{a^2b - bcf}{ad}$ представится въ слѣдующемъ видѣ

$x = \frac{ab}{d} - \frac{bcf}{ad}$. Потомъ построимъ прямую $g = \frac{ab}{d}$ по примѣру (1), прямую $h = \frac{bcf}{ad}$ по примѣру (5) и наконецъ прямую $x = g - h$.

11) Чтобы построить выраженіе $x = \sqrt{a^2 + b^2 - cd}$, предположимъ $e^2 = a^2 + b^2$ и $f^2 = cd$. Потомъ построимъ $e = \sqrt{a^2+b^2}$ (по 4) и $f = \sqrt{cd}$ (по 3). Наконецъ построимъ $x = \sqrt{e^2 - f^2}$ (по 4).

12) Выраженіе $x = \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1)$ означаетъ бокъ правильнаго десятиугольника, вписаннаго въ кругѣ, коего радіусъ R (99, II). Преобразовавъ это выраженіе, получимъ

$$x = \sqrt{\frac{5R^4}{4}} - \frac{R}{2} = \sqrt{R^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2} - \frac{R}{2}.$$

Построимъ сперва $a = \sqrt{R^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2}$ и потомъ $x = a - \frac{R}{2}$.

13) Выраженіе $x = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$ преобразуется въ

$$x = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{4} + \frac{a^2 + b^2}{4}}.$$

Построимъ прямоугольный треугольникъ ABC по даннымъ катетамъ $AB = a$ и $BC = b$. Къ гипотенузѣ AC изъ ея средины D возставимъ перпендикуляръ $DE = \frac{1}{2}AC$ и проведемъ прямыя AE и CE. Катетъ CE образовавшагося равнобедреннаго прямоугольнаго треугольника AEC равенъ x.

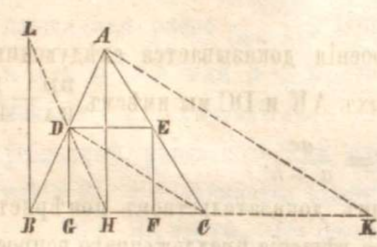
2) Чтобы построить выраженіе

$$x = \sqrt{a\left[\frac{b^2}{a} + \frac{m}{n}\left(a - \frac{b^2}{a}\right)\right]},$$

гдѣ m и n какія-нибудь числа, построимъ $c = \frac{b^2}{a}$ (по 2) и $d = a - \frac{b^2}{a} = a - c$. Потомъ построимъ $e = \frac{m}{n}\, d = \frac{m}{n}\left(a - \frac{b^2}{a}\right)$ и $f = c + e = \frac{b^2}{a} + \frac{m}{n}\left(a - \frac{b^2}{a}\right)$. Наконецъ построимъ $x = \sqrt{af}$.

190. **Задача**. *Въ треугольникъ вписать квадратъ такимъ образомъ, чтобы одна сторона его помѣстилась на сторонѣ тре-*

угольника, а противолежащія ей вершины пришлись на двухъ остальныхъ сторонахъ треугольника.



Фиг. 331.

Предположимъ, что вопросъ рѣшенъ и что построенъ требуемый квадратъ DEFG (фиг. 331). При внимательномъ разсмотрѣніи чертежа мы замѣчаемъ, что для построенія требуемаго квадрата достаточно найти его вершину D (или вершину E). Для опредѣленія вершины D должно найти разстояніе BD, т. е. гипотенузу прямоугольнаго треугольника BDG, коего катетъ DG есть бокъ искомаго квадрата; слѣдовательно для рѣшенія вопроса должно найти стороны прямоугольнаго треугольника BDG, а для этого необходимо сравнить его съ подобнымъ ему прямоугольнымъ треугольникомъ ABH, въ которомъ всѣ строны извѣстны. Назвавъ сторону AB чрезъ c, разтояніе BD чрезъ x, высоту AH чрезъ h и бокъ DG чрезъ y, получимъ пропорцію $\frac{y}{h} = \frac{x}{c}$; откуда $y = \frac{x}{c} . h$...(1). Такъ какъ образовавшееся уравненіе содержитъ двѣ неизвѣстныя x и y, то оно недостаточно для рѣшенія вопроса. Требуется составить еще уравненіе, содержащее неизвѣстныя x и y. Для этого возьмемъ подобные треугольники ADE и ABC и назовемъ сторону BC чрезъ a; тогда получимъ $\frac{y}{a} = \frac{c-x}{c}$ и $y = \frac{c-x}{c} . a$... (2). Сравненіемъ уравненій (1) и (2) мы получимъ уравненіе

$$\frac{x}{c} . h = \frac{c-x}{c} . a$$

съ одною неизвѣстною, изъ котораго найдемъ $x = \frac{a+h}{ac}$; слѣдовательно прямая $x =$ BD есть четвертая пропорціональная прямыхъ a, c и $a+h$, построеніе которой, по примѣру задачи (67,II) производится вотъ такъ: продолживъ сторону BC $= a$, отложимъ часть CK $= h$, соединимъ точки A и K и проведемъ чрезъ C прямую CD

параллельно къ прямой AK. Потомъ изъ точки D опустимъ перпендикуляръ DG и BC, чрезъ D проведемъ DE параллельно къ BC и наконецъ изъ E опустимъ перпендикуляръ EF на BC; получится требуемый кварать DEFG.

Вѣрность произведеннаго построенія доказывается слѣдующимъ образомъ: по параллельности прямыхъ AK и DC мы имѣемъ $\frac{BD}{BA}=\frac{BC}{BK}$ или $\frac{BD}{c}=\frac{a}{a+h}$, откуда $BD=x=\frac{ac}{a+h}$.

Примѣчаніе I. Геометрическимъ доказательствомъ повѣряется произведенное построеніе, а не самое рѣшеніе предложеннаго вопроса. Однако вѣрность рѣшенія задачи зависитъ преимущественно отъ вѣрнаго составленія и рѣшенія уравненія, а потому, если возможно должно повѣрять полное рѣшеніе предлагаемой задачи. Полное и геометрическое доказательство предъидущаго рѣшенія состоитъ въ слѣдующемъ: $\frac{DG}{AH}=\frac{BD}{BA}$ по параллельности прямыхъ DG и AH, и $\frac{BD}{BA}=\frac{BC}{BK}$ по параллельности прямыхъ CD и KA; отсюда получится $\frac{DG}{AH}=\frac{BC}{BK}$ или $\frac{DG}{h}=\frac{a}{a+h}$; слѣдовательно $DG=\frac{ah}{a+h}$. Потомъ $\frac{DE}{BC}=\frac{AD}{AB}$ по параллельности прямыхъ DE и BC, и $\frac{AD}{AB}=\frac{CK}{BK}$ по параллельности прямыхъ прямыхъ DC и AK; отсюда $\frac{DE}{BC}=\frac{CK}{BK}$ или $\frac{DE}{a}=\frac{h}{a+h}$; слѣдовательно $DE=\frac{ah}{a+h}$. И такъ мы узнали, что прямыя DG и DE равны.

Примѣчаніе II. Предложенная задача рѣшается еще слѣдующимъ образомъ: изъ вершины A опустимъ перпендикуляръ AH на противолежащій бокъ BC и изъ вершины B возставимъ къ BC перпендикуляръ BL, равный BC. Соединивъ точки L и H, получимъ точку D пересѣченія прямыхъ AB и LH; этою точкою опредѣлится вершина искомаго квадрата.

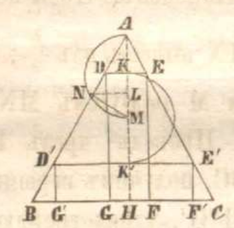
Примѣчаніе III. Зная, что $\frac{DG}{AH}=\frac{BD}{BA}$ или $\frac{y}{h}=\frac{x}{c}$, получимъ $y=\frac{x}{c}.h$. Потомъ подставивъ въ это равенство $\frac{ac}{a+h}$ вмѣсто x, по-

лучимъ $y = \frac{ah}{a+h}$. Площадь квадрата DEFG равна $y^2 = \frac{a^2h^2}{(a+h)^2}$, площадь треугольника ABC равна $\frac{ah}{2}$ и отношеніе между этими площадями равно $\frac{2ah}{(a+h)^2}$. При $a = h$ это отношеніе равно $\frac{2a^2}{4a^2} = {}^1/_2$, а если $a > h$ или $a < h$, то отношеніе между этими площадями меньше $^1/_2$; слѣдовательно площадь квадрата, вписаннаго въ треугольникѣ, равна половинѣ площади этого треугольника, если основаніе $BC = a$ равняется высотѣ $AH = h$.

191. **Задача.** *Въ данномъ треугольникѣ* ABC *(фиг. 332) вписать прямоугольникъ на сторонѣ* BC *такимъ образомъ, чтобы его площадь относилась къ площади* ABC *точно такъ, какъ относятся между собою числа m и n.*

Назовемъ сторону BC чрезъ a, высоту AH чрезъ h, стороны DE и DG искомаго прямоугольника чрезъ y и z, и разстояніе AK чрезъ x. Площадь $DEFG = yz$, площадь $ABC = \frac{ah}{2}$ и по заданію $\frac{yz}{{}^1/_2 ah} = \frac{m}{n}$, откуда $yz = \frac{m}{n} \cdot \frac{ah}{2} \ldots$ (I). Изъ подобныхъ треугольниковъ ADE и ABC выводится пропорція $\frac{DE}{BC} = \frac{AK}{AH}$ или $\frac{y}{a} = \frac{x}{h}$, которая, по умноженію ея предъидущихъ членовъ на z, обращается въ $\frac{yz}{a} = \frac{xz}{h}$. Зная, что $DG = KH = z = h - x$, мы замѣнимъ множитель z третьяго члена послѣдней пропорціи чрезъ $h - x$; получимъ $\frac{yz}{a} = \frac{x(h-x)}{h} \ldots$ (II). Подставивъ величину yz (I) въ уравненіе (II), получимъ

Фиг. 332.



$$\frac{m}{n} \cdot \frac{h}{2} = \frac{x(h-x)}{h} \text{ или } \frac{m}{n} \cdot \frac{h^2}{2} = hx - x^2;$$

отсюда $x = \frac{h}{2} \pm \sqrt{-\frac{m}{n} \cdot \frac{h^2}{2} + \frac{h^2}{4}} = \frac{h}{2} \pm \sqrt{\frac{h}{2}\left(\frac{h}{2} - \frac{m}{n}h\right)}$.

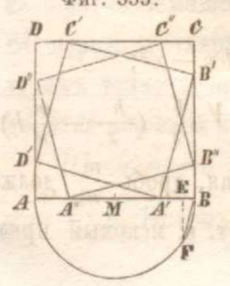
Чтобы для x получилась величина возможная, дробь $\frac{m}{n}$ должна равняться $^1/_2$ или должна быть меньше $^1/_2$, т. е. искомый прямо-

угольникъ долженъ равняться половинѣ даннаго треугольника, или долженъ быть меньше его половины. Если дробь $\frac{m}{n} = {}^1/_2$, т. е. искомый прямоугольникъ равенъ половинѣ даннаго треугольника, то получится $x = \frac{h}{2}$; значитъ сторона DE проходитъ чрезъ средину высоты AH и чрезъ среднія точки сторонъ AB и AC. Построеніе этого прямоугольника не представляетъ затрудненія. Если дробь $\frac{m}{n} < {}^1/_2$, то радикалъ $\sqrt{\frac{h}{2}(\frac{h}{2} - \frac{m}{n}h)}$ полученнаго корня x меньше $\frac{h}{2}$, и для x получатся двѣ положительныя величины. Для построенія этихъ величинъ x раздѣлимъ высоту h въ точкѣ M на двѣ равныя части и отложимъ $AL = \frac{m}{n}h$; тогда получимъ $ML = \frac{h}{2} - \frac{m}{n}h$. Потомъ построивъ среднюю пропорціональную MN между прямыми AM и ML, получимъ $MN = \sqrt{\frac{h}{2}(\frac{h}{2} - \frac{m}{n}h)}$. Наконецъ, чтобы построить x, должно MN приложить къ $\frac{h}{2}$, или MN вычесть изъ $\frac{h}{2}$; а для этого опишемъ полуокружность изъ точки M радіусомъ MN; получимъ для x двѣ величины AK и AK'. Проведя чрезъ K и K' прямыя DE и D'E' параллельно къ боку BC, получимъ вершины D и E, D' и E' прямоугольниковъ DEFG и D'E'F'G', удовлетворяющихъ вопросу.

192. **Задача**. *Въ данномъ квадратѣ* ABCD *(фиг. 333) вписать другой квадратъ такимъ образомъ, чтобы площади этихъ квадратовъ относились между собою, какъ числа m и n.*

Назовемъ сторону AB даннаго квадрата чрезъ a, сторону A'B'

Фиг. 333.



искомаго квадрата чрезъ x и разстояніе AA' чрезъ y. По равенству треугольниковъ AA'D, BA'B', CB'C', C'D'D мы имѣемъ AD' = DC' = CB' = BA' $= a - y$. Площадь ABCD $= a^2$, площадь A'B'C'D' $= x^2 = y^2 + (a - y)^2$ и по заданію $\frac{x^2}{a^2} = \frac{m}{n}$. Отсюда составится уравненіе

$$y^2+(a-y)^2=\frac{m}{n}a^2 \text{ или } y^2-ay+\frac{n-m}{2n}a^2=0;$$

слѣдовательно $y=\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{m-n}{2n}a^2}=\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2(2m-n)}{4n}}$. Наконецъ получится выраженіе $a-y=\frac{a}{2}\mp\sqrt{\frac{a^2(2m-n)}{4n}}$, которое легко можетъ быть построено. Для этого раздѣлимъ прямую AB $=a$ на $4n$ равныхъ частей и возьмемъ такихъ частей $2m-n$ отъ B до E; отрѣзокъ BE $=\frac{2m-n}{4n}a$. Потомъ построимъ среднюю пропорціональную BF между прямыми AB и BE, и отложимъ прямую мую BF на сторонѣ AB отъ ея средины M до A' и до A''; тогда $AA'=\frac{a}{2}+BF=\frac{a}{2}+\sqrt{a.\frac{2m-n}{4n}\cdot a}$ и $AA''=\frac{a}{2}-BF=$

$$\frac{a}{2}-\sqrt{a.\frac{2m-n}{4n}.a}.$$

Эчотъ вопросъ только тогда возможенъ, если $2m=n$ или $2m>n$, т. е. возможно вписать квадратъ, котораго площадь не меньше половины площади даннаго квадрата; слѣдовательно *наименьшій* квадратъ, который можетъ быть вписанъ въ данномъ квадратѣ, получится при $2m=n$ и $AA'=\frac{a}{2}$.

193. **Задача**. *Построить прямоугольникъ, коего периметръ равенъ p и площадь равна q^2.*

Назвавъ двѣ смежныя стороны искомаго прямоугольника чрезъ x и y, получимъ $y=\frac{p}{2}-x$ и $xy=q^2$; отсюда $x(\frac{p}{2}-x)=q^2$ или $x^2-\frac{p}{2}x+q^2=0$; слѣдовательно

$$x=\frac{p}{4}\pm\sqrt{\frac{p^2}{16}-q^2} \text{ и } y=\frac{p}{4}\mp\sqrt{\frac{p^2}{16}-q^2}.$$

Замѣчательно, что составленныя уравненія даютъ только два различные корня; слѣдовательно большая сторона прямоугольника равна $\frac{p}{4}+\sqrt{\frac{p^2}{16}-q^2}$ и меньшая сторона равна $\frac{p}{4}-\sqrt{\frac{p^2}{16}-q^2}$.

Вопросъ только тогда возможенъ, если $q^2 < \left(\frac{p}{4}\right)^2$ или $q^2 = \left(\frac{p}{4}\right)^2$; т. е. *наибольшій* прямоугольникъ, удовлетворяющій условіямъ задачи, получится, если его площадь равна площади квадрата, построеннаго на четвертой части даннаго периметра.

194. **Задача.** *Дана трапеція* ABCD *(фиг. 334), въ которой основаніе* AB $= 16$ *фут., основаніе* CD $= 5$ *фут. и высота равна* h. *Отъ точки* E, *данной на сторонѣ* AB *и отстоящей отъ вершины* A *на 14 футъ (и отъ* B *на 2 фут.), должно раздѣлить трапецію на двѣ части такимъ образомъ, чтобы часть, прилежащая къ* AE, *была вдвое меньше части, прилежащей къ* BE. *Опредѣлить разстояніе* DF *прямой раздѣла отъ вершины* D.

Назвавъ разстояніе DF чрезъ x, получимъ $CF = 5 - x$, площадь $AEFD = (14 + x)\frac{h}{2}$, площадь $BCFE = (7 - x)\frac{h}{2}$ и $\frac{AEFD}{BCFE} = \frac{14 + x}{7 - x} = {}^1/_2$; отсюда мы имѣемъ $28 + 2x = 7 - x$ и $x = -3$; слѣдовательно прямая раздѣла не можетъ пересѣкаться съ стороною CD, т. е. вопросъ не возможенъ. Отсюда мы заключаемъ, что отрицательное число, выражающее длину прямой, показываетъ невозможность рѣшенія, происшедшую отъ несообразности заданныхъ условій.

Фиг. 334.

Примѣчаніе. По заданію вопроса можно было предвидѣть невозможность рѣшенія. Дѣйствительно, если мы соединимъ точку E съ вершиною D, то разстояніе $DF = x$ обратится въ нуль и отношеніе $\frac{14+x}{7-x}$ сдѣлается равнымъ 2; слѣдовательно чтобы точка F находилась между C и D на сторонѣ CD, это отношеніе должно быть больше 2; но такъ какъ по заданію отношеніе равно ${}^1/_2$, т. е. меньше 2, то прямая раздѣла не можетъ пересѣкаться съ стороною CD. Чтобы части данной трапеціи составляли данное отношеніе, прямая раз-

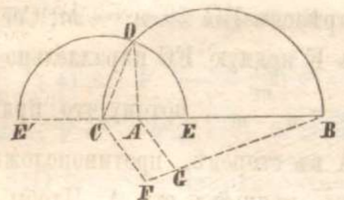
дѣла должна пересѣкать сторону AD. Назовемъ точку пересѣченія этихъ прямыхъ чрезъ G, и отношеніе прямыхъ AD и AG чрезъ y. Площадь $\text{ABCD} = (16+5)\frac{h}{2}$, площадь $\text{AED} = 14.\frac{h}{2}$ и $\frac{\text{ABCD}}{\text{AED}} = \frac{16+15}{14} = \frac{3}{2}$; также $\frac{\text{AED}}{\text{AEG}} = \frac{\text{AD}}{\text{AG}} = y$, слѣдовательно $\frac{\text{ABCD}}{\text{AEG}} = \frac{3y}{2}$ и $\frac{\text{ABCD}-\text{AEG}}{\text{AEG}} = \frac{3y-2}{2}$. Такъ какъ по заданію должно быть $\frac{\text{ABCD}-\text{AEG}}{\text{AEG}} = \frac{2}{1}$, то $\frac{3y-2}{2} = \frac{2}{1}$ и $y = 2$.

Отсюда слѣдуетъ, что прямая раздѣла должна пройти чрезъ средину стороны AD. Означивъ чрезъ F' точку пересѣченія продолженной прямой раздѣла съ продолженною стороною CD, получимъ DF' = AE = 14 фут. Отсюда мы видимъ, что найденная величина $x = -3$ также не находится на продоленіи стороны CD; слѣдовательно рѣшеніе $x = -3$ не имѣетъ никакого смысла.

195. **Задача.** *Требуется раздѣлить прямую AB = a (фиг. 335) на двѣ части такимъ образомъ, чтобы квадраты этихъ частей относились между собою, кака числа m и n. (Предполагается, что m < n).*

Предположивъ, что вопросъ рѣшенъ и что точка E раздѣляетъ прямую AB на требуемыя части, назовемъ отрѣзокъ AE чрезъ x; тогда $\text{EB} = a - x$ и по заданію $\frac{x^2}{(a-x)^2} = \frac{m}{n}$. Изъ этой пропорціи составится уравненіе

Фиг. 335.



$$(n-m)x^2 + 2amx - ma^2 = 0 \ldots (1),$$

изъ котораго получится

$$x = \frac{a}{n-m}(-m \pm \sqrt{mn}).$$

Такъ какъ по заданію $n > m$, то $\sqrt{mn} > \sqrt{m^2}$ или $\sqrt{mn} > m$; слѣдовательно для x получатся двѣ величины: положительная и отрицательная. Чтобы опредѣлить значеніе отрицательнаго корня,

подставимъ въ уравненіе (1) — x' вмѣсто x *); получимъ уравненіе

$$\frac{x'^2}{(a+x')^2}=\frac{m}{n}\ldots\ldots(2).$$

Это уравненіе показываетъ, что требуется найти такую точку, чтобы квадратъ ея разстоянія отъ точки A относился къ квадрату разстоянія отъ B, которое больше перваго разстоянія числомъ a, точно такъ, какъ относятся между собою числа m и n. Для выполненія этихъ условій отложимъ первое разстояніе отъ A въ сторону, противоположную той, по которой мы отложили положительную величину x; слѣдовательно отложивъ $x'=x$ на продолженіи прямой BA, влѣво отъ A, мы найдемъ точку E ', которой разстояніе отъ B равно $a+x'$. Положительный корень x' уравненія (2) или отрицательный корень x уравненія (1) соотвѣтствуетъ слѣдующему вопросу: *найти такую точку* E' *въ противоположной сторонѣ относительно разстоянія* AE, *чтобы квадраты ея разстояній отъ точекъ* A *и* B *относились между собою, какъ числа* m *и* n. Замѣчательно. что уравненія (1 и 2) соотвѣтствуютъ одному и тому-же вопросу: *на прямой, проходящей чрезъ точки* A и B, *найти точку (или нѣсколько точекъ) такимъ образомъ, чтобы квадраты ея разстояній отъ точекъ* A и B *составляли данное отношеніе.*

Построеніе рѣшенія вопроса дѣлается вотъ такъ: чрезъ точку B прямой AB проведемъ прямую BF $=n$ и на ней отъ F до G отложимъ FG $=m$; тогда отрѣзокъ BG $=n-m$. Соединивъ точки A и G, и проведя чрезъ F прямую FC параллельно къ AG, получимъ $\frac{AC}{AB}=\frac{m}{n-m}$ и $AC=-\frac{m}{n-m}$, потому-что прямая AC находится относительно точки A въ сторонѣ, противоположной положительнымъ разстояніямъ точекъ прямой a отъ A. Чтобы построить радикалъ выраженія x, мы имѣемъ $\frac{a}{n-m}\sqrt{mn}=\sqrt{\frac{m}{n-m}a.\frac{n}{n-m}a}=y$, гдѣ y есть средняя пропорціональна меж-

*) См. § 19 части II «Начальной Алгебры». Соч. А Лёве 1868 г.

ду прямыми CA и CB $\left(=\frac{n}{n-m}a\right)$; слѣдовательно описавъ полуокружность на прямой BC и возставивъ перпендикуляръ AD изъ A, соединимъ точки C и D; прямая $CD = y$. Наконецъ, чтобы построить выраженіе $-\frac{m}{n-m}a \pm \frac{a}{n-m}\sqrt{mn} = x$, опишемъ окружность изъ точки C радіусомъ CD; пересѣченіемъ ея съ прямою AB и съ продолженіемъ этой прямой опредѣлятся точки E и E', соотвѣтствующія обѣимъ величинамъ корня x.

Относительно вопросовъ, дающихъ два корня съ противоположными знаками, должно руководствоваться слѣдующими замѣчаніями:

1) Два корня уравненія часто даютъ два возможныя рѣшенія предложенной задачи (191 и 192).

2) Во многихъ случаяхъ одинъ изъ корней составленнаго уравненія противорѣчитъ условіямъ вопроса. Если корень со знакомъ „минусъ" означаетъ длину линіи, то имъ должно принебрегать (194).

3) Иногда отрицательный корень даетъ возможность представить предложенный вопросъ въ общемъ видѣ, которому удовлетворяютъ два корня съ противоположными знаками (195).

ЗАДАЧИ.

310) Построить выраженія: 1) $x=\frac{a^2+b^2}{c}$; 2) $x=\frac{ac+bc}{df}$; 3) $x=\frac{ab+cd}{f}$; 4) $x=\sqrt{\frac{a^3-b^3}{c}}$; 5) $x=\sqrt{a^2+\sqrt{b^4+c^4}}$; 6) $x=\sqrt{a^2-b^2+c^2-df+gh}$.

311) Возстановить однородность въ выраженіяхъ: 1) $x=\frac{a}{b^2+\frac{c}{d}-ef}$, 2) $x=\sqrt[3]{a^2+\frac{bc^2d}{fg}}$; 3) $x=\sqrt[3]{\frac{a^2b}{c}+\frac{d}{ef}}$; 4) $x=(a-c)\sqrt{\frac{2b}{b+c}}$.

312) Въ равностороннемъ треугольникѣ, коего бокъ равенъ a и высота равна h, вписать квадратъ.

313) Между сторонами даннаго угла ABC провести прямую па-

раллельно къ данной прямой DE такимъ образомъ, чтобы образовался треугольникъ, равномѣрный данному треугольнику LMN.

314) Дана точка A, отстоящая на e отъ центра круга, коего радіусъ равенъ r. Отъ точки A требуется провести сѣкущую ABD такимъ образомъ, чтобы хорда BD равнялась данной прямой a.

315) Въ четверти круга, коего радіусъ равенъ r, вписать кругъ, касающійся къ дугѣ и радіусамъ четверти круга.

316) Въ данномъ кругѣ, коего діаметръ равенъ d, вписать прямоугольникъ, равномѣрный данному квадрату a^2.

317) Построить квадратъ, въ которомъ разность между діагональю x и бокомъ y равна d.

318) Построить равнобедренный прямоугольный треугольникъ, въ которомъ сумма гипотенузы x и катета y должна равняться прямой a.

319) Построить прямоугольный треугольникъ, коего гипотенуза должна равняться прямой a и 1) сумма катетовъ x и y должна равняться прямой b, или 2) разность катетовъ x и y должна равняться прямой d.

320) Построить прямоугольный треугольникъ, въ которомъ сумма катетовъ x и y должна равняться прямой a и перпендикуляръ, опущенный изъ вершины прямаго угла на гипотенузу z, долженъ равняться прямой h.

321) Построить прямоугольный треугольникъ такимъ образомъ, чтобы одинъ катетъ равнялся данной прямой a, а другой катетъ былъ среднею пропорціональною между прямою a и гипотенузою x.

322) Построить равносторонній треугольникъ, въ которомъ 1) сумма его основанія x и высоты y должна равняться данной прямой a, и 2) разность между основаніемъ x и высотою y должна равняться данной прямой b.

323) Обратить данный равносторонній треугольникъ, коего сторона равна a, въ равномѣрный ему квадратъ.

324) Обратить данный квадратъ, коего сторона равна a, въ равномѣрный ему равносторонній треугольникъ.

325) Построить равнобедренный прямоугольный треугольникъ, коего периметръ долженъ равняться данной прямой a.

326) Требуется раздѣлить треугольникъ ABC прямою DE, параллельною къ боку BC, на части, пропорціональныя числамъ m и n.

327) На діаметрѣ AB круга даны двѣ точки D и E, равно-отстоя-

щія отъ центра C. Требуется опредѣлить на окружности такую точку F, чтобы радіусъ CB былъ среднею пропорціональною между суммою и разностью разстояній FD и FE.

328) Построить такой треугольникъ ABC, въ которомъ бокъ BC равнялся бы прямой a и высоты BD и CE, соотвѣтствующія сторонамъ $AC = x$ и $AB = y$, равнялись бы прямымъ h и k.

329) Въ равностороннемъ треугольникѣ ABC вписать другой равносторонній треугольникъ, коего площадь должна относиться къ площади ABC точно такъ, какъ относятся между собою числа m и n. (См. 192).

330) Требуется продолжить данную прямую такимъ образомъ, чтобы она и ея продолженіе составляли произведеніе, равное площади даннаго квадрата.

Результаты численныхъ вопросовъ, доказательства теоремъ и рѣшенія задачъ построенія.

1) Изъ точки C опустимъ ⊥ CD на AB. и изъ D возставимъ ⊥ DE къ AB. Потомъ проведемъ плоскость чрезъ DC и DE.

2) См. теор. 13.

3) Сдѣлавъ $CB = CD = CE$ и проведя прямыя AB, AD, AE, докажемъ равенство треугольниковъ ABC, ADC, AEC (см. 17).

4) Чрезъ точку A и прямую BC проведемъ плоскость P, которая пересѣчетъ DE въ точкѣ M. Потомъ соединимъ A и M.

5) См. 21.

6) и 7) См. 18, 1.

8) Въ плоскости P проведемъ какую-нибудь прямую BC и чрезъ A перпендикулярно къ BC (19, 2) проведемъ плоскость Q, пересѣкающуюся съ плоскостью P по направленію AE. Наконецъ въ плоскости Q возставимъ ⊥ изъ A къ AE.

9) Чрезъ A и B перпендикулярно къ плоск. P проведемъ плоск. Q, пересѣкающуюся съ плоск. P по направленію CD. Къ прямой AB изъ ея средины E возставимъ ⊥ EF до пересѣченія F съ CD. Чрезъ EF перпендикулярно къ плоск. Q проведемъ плоскость, пересѣкающуюся съ плоск. P по направленію GH. Прямая GH удовлетворяетъ вопросу.

10) Изъ A опустимъ ⊥ AC на плоск. P и т. д.

11) Чрезъ B проведемъ прямую BE || къ CD, и чрезъ AB и BE проведемъ плоскость.

12) Чрезъ A проведемъ плоск. Q, пересѣкающуюся съ плоск. P по направленію BC. Въ плоск. Q проведемъ чрезъ A прямую || къ BC.

13) Чрезъ A проведемъ двѣ прямыя || къ плоск. P.

14) Чрезъ AB и точку E пересѣченія плоскости P съ CD проведемъ плоск. Q; эта плоскость

пересѣчетъ плоск. P по направленію прямой EF, перпендикулярной къ CD. Прямыя AB и CD перпенд. къ CD и лежатъ въ плоск. Q; слѣдов. они параллельны между собою и т. д. (26).

15) Чрезъ A проведемъ AF || къ BC и AG || къ DE и потомъ проведемъ плоск. чрезъ AF и AG.

16) Прямая CD, параллельная къ EF, должна быть || къ плоск. ABFE (26). Прямая CD также || къ AB (27). Точно также объясняется, что EF || къ AB.

17) Прямая, проведенная чрезъ B || къ CD, должна находиться въ каждой изъ данныхъ плоскостей и т. д.

18) Чрезъ CD проведемъ плоск. P || къ AB и чрезъ EF плоск. Q || къ AB. Прямая пересѣченія этихъ плоскостей удовлетворяетъ вопросу.

19) Изъ точки A плоскости P опустимъ ⊥ AB на плоск. Q и раздѣлимъ его на части AC и CB, пропорціональныя къ m и n. Потомъ проведемъ чрезъ C плоск. M || къ плоск. P и т. д. (38).

20) Соединивъ A и B, проведемъ плоск. P перпендикулярно къ AB. Въ плоск. P возьмемъ точку C и соединимъ ее съ A и B; получимъ прямоугольный треуг. ABC, въ которомъ $\overline{BC}^2 - \overline{AC}^2 = \overline{AB}^2$ и т. д.

21) Чрезъ M проведемъ плоск. перпендикулярно къ ребру BC.

22) Параллельно къ гранямъ ABC и DBC проведемъ плоскости P и Q, отстоящія отъ этихъ граней на EF и т. д.

23) Описавъ окружность чрезъ A, B, C, опустимъ изъ ея центра O ⊥ OD на плоск. P.

24) Изъ A, C, E опустимъ перпендикуляры Aa, Cc, Ee на плоск. P; тогда плоскости ABa, CDc, EFe параллельны и т. д.

25) Изъ какой-нибудь точки C прямой AB опустимъ ⊥ CD на одну изъ плоскостей, и проведемъ плоск. чрезъ AB и CD и т. д.

26) См. теор. 38.

27) Изъ M возставимъ къ AB ⊥ BC до пересѣченія C съ MN и соединимъ A и C; тогда $\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2$.

28) Плоскости M и P пересѣкаютъ плоскость Q по направленію прямыхъ AB и CD. Между плоскостями M и P проведемъ плоскость N ⊥ къ AB; эта плоскость пересѣчетъ плоск. P по направленію прямой EF, перпендикулярной къ плоск. Q и т. д. (49).

29) Проведемъ плоск. чрезъ двѣ изъ данныхъ прямыхъ, еще плоскость чрезъ двѣ другія прямыя и т. д.

30) Чрезъ AB проведемъ плоск.

P ∥ къ CD, и ⊥ къ этой плоск. проведемъ плоск. Q, пересѣкающуюся съ CD въ E. Наконецъ изъ E опустимъ ⊥ EF на AB. Существуетъ только одна прямая EF, удовлетворяющая вопросу. Въ самомъ дѣлѣ, проведемъ между AB и CD какую-нибудь прямую GH, и еще FK и HL ∥ къ CD; тогда EF ⊥ къ плоск. LHFK. Если бы прямая GH была ⊥ къ AB и CD, то она же была бы ⊥ также къ плоск. LHFK; слѣдов. прямыя GH и EF были бы ∥ и лежали бы въ одной плоск.; чего быть не можетъ.

31) Проведемъ чрезъ AB и CD плоскости ∥ къ EF; пересѣченіемъ этихъ плоскостей опредѣлится требуемая прямая. (См. задачу 17).

32) Чрезъ произвольную точку N проведемъ равныя прямыя NG, NH, NK ∥ къ AB, CD, EF. Чрезъ G, H, K проведемъ плоск. Q и ∥ къ ней прямую чрезъ M и т. д.

33) Трегранные углы SACD и SABD симетрически равны.

34) Прямая пересѣченія плоскостей, раздѣляющихъ два двугранныхъ угла по-поламъ, всѣми точками равно-отстоитъ отъ трехъ граней трегранная угла; слѣдовательно этою прямою опредѣлится третья искомая плоскость.

35) На ребрахъ SA, SB, SC отложимъ равныя части SD, SE, SF и чрезъ D, E, F проведемъ плоскость; она пересѣкается съ плоск. M, P, Q по направленію прямыхъ, пересѣкающихся въ одной точкѣ и т. д.

36) Чрезъ SB проведемъ плоск. DBS такимъ образомъ, чтобы образовался двугранный уголъ ABSD, равный двугранному углу BASD; тогда $\angle$ ASD $= \angle$ BSD и слѣдов. $\angle$ ASC $= \angle$ BSD $+ \angle$ CSD; но такъ какъ $\angle$ BSD $+ \angle$ CSD $> \angle$ BSC, то $\angle$ ASC $> \angle$ BSC.

37) См. доказ. 36.

38) Плоскости BSC и ASC, перпендикулярныя къ *sa* и *sb*, ⊥ къ плоск. *asb*; слѣдов. и прямая SC пересѣченія плоск. BSC и ASC ⊥ къ плоск. *asb*. Если плоск. *bsa* пересѣкается съ гранями ASC и BSC по направленію прямыхъ *bd* и *ad*, пересѣкающихся въ точкѣ *d* ребра SC, то по перпендикулярности этихъ прямыхъ къ SC двугранный $\angle$ BCSA измѣряется угломъ *adb*. Такъ какъ въ четыреуг. *asbd* углы *das* и *dbs* прямые, то $asb = 180^0 - adb$ или $asb = 180^0 -$ BCSA. Точно также получимъ $bsc = 180^0 -$ BASC и $csa = 180^0 -$ ABSC. На оборотъ: по перпендикулярности

плоскостей asb, bsc, asc къ SC, SA, SB мы имѣемъ $ASB = 180^0 - ascb$, $BSC = 180^0 - bsac$ и $ASC = 180^0 - csba$.

39) Назовемъ чрезъ a, b, c плоскіе углы треграннаго угла, коего грани $\perp$ къ ребрамъ даннаго трегранпаго $\angle$; тогда (доказ. 38) $A = 180^0 - a$, $B = 180^0 - b$, $C = 180^0 - 0$; откуда $A + B + C = 540^0 - (a + b + c)$, но $a + b + c < 360^0$ и $a + b + c > 0$; слѣдов. $A + B + C > 540^0 - 360^0$ или $A + B + C > 180^0$ и $A + B + C < 540^0$.

40) Чрезъ ребро SA многогран. $\angle$ SABC.... и каждое изъ остальныхъ ребръ (кромѣ 2 ближайшихъ) проведя плоскости, мы раздѣлимъ $\angle$ SABC... на $n - 2$ трегр. угловъ. Въ каждомъ изъ нихъ сумма двугр. угловъ $> 180^0$; слѣдов. сумма всѣхъ двугранныхъ угловъ $> (n-2)180^0$ или $> 2(n-2)$ прям. угловъ. Такъ какъ каждый двугр. $\angle$ меньше 2 прям. угловъ, то сумма n двугр. угловъ меньше $2n$ прямыхъ уг.

42) 129,6 квад. фут.

43) 25 футъ.

44) 15 футъ. — 45) 6 футъ.

46) 3 ф.; $4^1/_2$ ф.; $22^1/_2$ ф.

47) 23,896 фут.

48) 12,25 фут.

49) $^1/_2\left(p + \sqrt{\frac{P - 3p^2}{3}}\right)$; $^1/_2\left(p - \sqrt{\frac{P - 3p^2}{3}}\right)$.

50) Бокъ основ. $= \frac{-2a + \sqrt{(2a^2 + 3P)2}}{6}$,

Высота $= \frac{4a + \sqrt{2(2a^2 + 3P)}}{6}$.

51) 4 ф., 6 ф., 30 ф.

52) Проведя діагонали AC и EG (фиг. 270), получимъ параллелогр. ACEG, котораго діагонали AG и CE дѣлятся въ точкѣ O ихъ пересѣченія взаимно на 2 равныя части. Проведя діагонали AH и BG, получимъ параллелогр. ABGH, котораго діагонали AG и BH пересѣкаются въ срединѣ O прямой AG и т. д.

53) Проведя діагонали AH и BG, получимъ прямоуг. ABGH и т. д.

54) Въ параллелопип. AG (фиг. 269) проведемъ діагональ AG и въ грани BCGF проведемъ діагональ BG; получимъ прямоугольные треугольники ABG и BCG, изъ которыхъ выводится $AG^2 = AB^2 + BC^2 + BF^2$.

55) См. доказ. 54.

56) Продоливъ (фиг. 271) CG до C′, FG до F′. HG до H′ за вершину G. получимъ трегр. $\angle$ H′GC′F′, равный трегр. $\angle$ BAED. Почему?

57) См. теор. 80.

58) 28 человѣкъ. — 59) 72 фута.

60) 57,728 куб. фут.
61) $238^2/_{11}$ куб. саж.
62) 4 фута. — 63) 729 кубовъ.
64) Въ 82 часа $10^5/_8$ минуты.
65) На 1,558 фута.
66) $2460^3/_8$ куб. вершк.
67) 4,8497 фута.
68) 35,0325 фут.
69) 214,072 куб. фут.
70) $4^1/_3$ фута.
71) 192 куб. фут.
72) 67,34016 куб. фут.
73) Потому-что ребро двойнаго куба равно $a\sqrt[3]{2}$.
74) 1 десиметръ.
75) 173,4858 куб. фут.
76) $\left[\frac{p}{2}(-1+\sqrt{3})\right]^3$.
77) 95,6 пуда.
78) Длина $= m\sqrt[3]{\frac{Q}{mnp}}$, ширина $= n\sqrt[3]{\frac{Q}{mnp}}$, высота $= p\sqrt[3]{\frac{Q}{mnp}}$.
79) 1120 куб. фут.
80) $6^1/_2$ фут., $4^1/_2$ фут.
81) $1781^1/_4$ куб. дюйм.
82) На прямой AB, которая равна суммѣ двухъ прямыхъ AE $= m$ и EB $= n$, построимъ кубъ ABCD*abcd* и чрезъ E проведемъ прямое сѣченіе EFGK ⊥ къ AB*ba*. На A*a* и *ad* отложимъ части AL и *a*M, равныя *m*, и проведемъ чрезъ L и M прямыя сѣченія ⊥ къ *a*AD*d* и ABCD; получимъ кубъ на *m*, три прямоуг. параллелоп. съ основаніемъ *mn* и высотою *m*, три прямоуг. параллелоп. съ основаніемъ n^2 и высотою *m* и кубъ съ ребромъ *n*.
83) $13^{73}/_{99}$ куб. фут. воды.
84) $77^7/_{64}$ куб. саж.
85) Почти $32^2/_7$ фута.
86) 1074937 кусковъ.
87) 17,01 куб. ф.
88) 3,24 куб. ф.
89) $1^1/_2$ фута.
90) Въ прямой трегр. призмѣ ABC*abc* проведемъ чрезъ B*b* плоск. B*bd*D ⊥ къ AC*ca*. Потомъ на DC, DB и D*d* построимъ прямоуг. параллелопипедъ BECD*becd*. Прямыя треугольн. призмы BCD*bcd* и BCE*bce* равны; почему? Призма BCD*bcd* $=$ $^1/_2$ параллелоп. BECD*becd*. Объемъ BECD*becd* $=$ CD*dc* $\times$ BD и ABD*abd* $=$ AD*da*$.\frac{BD}{2}$; слѣдоват. ABC*abc* $=$ (CD*dc* $+$ AD*da*)$.\frac{BD}{2} =$ AC*ca*$.\frac{BD}{2}$.
91) Почти на 4,7 вершка.
92) 11,08744 квад. фута.
93) 138,72 квад. фута.
94) $a\sqrt{a^2+4h^2}$.
95) 4 фута. — 96) 5 футъ.
97) 158,1 квад. дюйм.
98) Боковое ребро $=$ 20,6155 ф., бокъ основанія $=$ 10 фут.
99) 1,9044 кв. фут.
100) 5 фут. и 8 фут.

101) $(a+b)\sqrt{4h^2+(a-b)^2}$.
102) 8 футъ.
103) Ребро = 10 ф. и бокъ основ. = 12 ф.
104) 117,488 квад. фут.
105) $\frac{bh}{a}$; $\frac{h}{a}(a-b)$.
106) См. теор. 80.
107) $\frac{SA}{AE}=\frac{SC}{CG}=\frac{2}{1}$ и $\frac{AB}{AD}=\frac{CB}{CF}=\frac{2}{1}$; слѣдов. DE ‖ къ BS, FG ‖ къ BS и DE = ½BS, FG = ½BS и т. д.
108) Прямыя DE, EG, GF, DF образуютъ параллелогр. DEGF. Проведя діагонали EF и DG, пересѣкающіяся въ O, получимъ треуг. EFG и EFD, изъ которыхъ имѣемъ $\overline{EG}^2+\overline{FG}^2=\frac{1}{2}\overline{EF}^2+2\overline{GO}^2=\frac{1}{2}\overline{EF}^2+\frac{1}{2}\overline{DG}^2$, $\overline{DF}^2+\overline{ED}^2=\frac{1}{2}\overline{EF}^2+2\overline{DO}^2=\frac{1}{2}\overline{EF}^2+\frac{1}{2}\overline{DG}^2$. Отсюда получится
$\overline{SB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{EF}^2+\overline{DG}^2)$.
109) $\overline{SB}^2+\overline{AB}^2=\frac{1}{2}\overline{SA}^2+2\overline{BD}^2$, $\overline{SC}^2+\overline{AC}^2=\frac{1}{2}\overline{SA}^2+2\overline{CD}^2$, $\overline{SB}^2+\overline{AB}^2+\overline{SC}^2+\overline{AC}^2=\overline{SA}^2+2(\overline{BD}^2+\overline{CD}^2)$; но $\overline{BD}^2+\overline{CD}^2=\frac{1}{2}\overline{BC}^2+2\overline{DE}^2$; слѣдов. и т. д.
110) Проведя DF, FE, EG и DG, получимъ параллелог., въ которомъ діагонали DE и FG взаимно дѣлятся на двѣ равны части и т. д.
111) Начертимъ треуг. abc, равный основанію ABC пирамиды SABC, и потомъ треугольники sab и $s'bc$, равные боковымъ гранямъ SAB и SBC. Изъ s опустимъ ⊥ se на ab и изъ s' ⊥ $s'f$ на bc; эти перпендикуляры пересѣкутся въ d. Изъ d къ sd возставимъ ⊥ dH и изъ e радіусомъ se опишемъ дугу такъ, чтобы она пересѣклась съ ⊥ dH (въ точкѣ H); прямая dH равна высотѣ пирамиды. Почему?
112) 389,7 куб. фут.
113) 53,3504 куб. фут.
114) 9,093936 куб. фут.
115) 25,455204 куб. фут.
116) 10,752 куб. фут.
117) 20,66979 куб. фут.
118) 2058 куб. фут.
119) 13,85 фут.
120) Почти 2 фута.
121) 4 фута. — 122) 2 фута.
123) 18,3 фута.
124) Почти 93 пуда.
125) 107,3 куб. фут.
126) $\frac{h}{3}(a^2+b^2+ab)$.
127) 144 квад. фут.
128) 4,2 фут.
129) 6 фут.
130) 3 фут. и 5 фут.
131) 10,38248 дюйм.
132) 32,42304 куб, фут.
133) $3^3/_4$ квад. фут.
134) 8,4 ф., 10,8 ф., 16,8 ф.
135) 63,4896 куб. фут.

136) $61^{61}/_{98}$ куб. саж.

137) $1072^{1}/_{2}$ куб. саж.

138) См. теор. 102.

139) Построенный параллелопипедъ вдвое больше треугольной призмы, построенной на ребрахъ SA, AC, AB, а эта призма вдвое больше данной пирамиды и т. д.

140) Прямыя AD, BD и CD, раздѣляющія углы BAC, ABC и ACB по-поламъ, пересѣкаются въ одной точкѣ D. Такъ какъ чрезъ D и вершину S должны пройти три упомянутыя плоскости, то они пересѣкутся по направленію прямой SD.

141) Прямая пересѣченія каждыхъ двухъ проведенныхъ плоскостей должна быть ⊥ къ основанію; но изъ вершины пирамиды возможно опустить на основаніе только одинъ ⊥; слѣдов. всѣ прямыя пересѣченія плоскостей должны совмѣститься съ этимъ перпендукуляромъ.

142) Параллелограмъ EFGH, коего вершины судь среднія точки E, F, G, H ребръ AB, BC, SC, SA, || къ грани ACS. Прямыя, проведенныя чрезъ E и F соотвѣтственно || къ ребрамъ CS и AS, находятся въ плоскости параллелограма EFGH и пересѣкаются въ одной точкѣ S′, которая соотвѣтствуетъ вершинѣ S. Точно также получатся точки A′, B′, C′, соотвѣтствующія вершинамъ A, B, C. Потомъ докажемъ, что пирамида S′A′B′C′ равна пирамидѣ SABC.

143) Плоскости ASD и CSD, которыми раздѣлены двугранные углы BACS и BCSA по-поламъ, пересѣкаются по направленію SD. Изъ какой-нибудь точки E прямой SD опустимъ перпендикуляры EG, EH, EF на грани ABS, ACS и BCS; тогда EG = EH = EF. Плоскость, проведенная чрезъ EF и EG, ⊥ къ гранямъ BCS и ABS. Означивъ точку пересѣченія этой плоскости съ ребромъ BS чрезъ L и проведя EL, FL и GL, получимъ равные треуг. EFL и EGL, а потому ∠ FLE = ∠ GLE и EL раздѣляетъ ∠ FLG по-поламъ; слѣд. плоск. SBD раздѣляетъ двугранный ∠ ABSC на двѣ равныя части.

144) Означимъ чрезъ H каждый изъ равныхъ перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ A, B, C на противолежащія грани, чрезъ h, h', h'' перпендикуляры, опущенные изъ D на противолежащія грани, чрезъ P каждую изъ площадей боковыхъ граней и чрезъ Q объемъ пирамиды; тогда $3Q = P.H$ и $3Q = P(h+h'+h'')$; слѣдов. и проч.

145) Отрѣзки GO и OH прямой GH, пересѣкающейся съ EF въ O, должны быть равны. Прове-

демъ чрезъ AC и BD двѣ параллельныя плоскости и чрезъ E плоскость ∥ къ проведеннымъ плоскостямъ. Такъ какъ эта плоскость должна пройти чрезъ F, то она вмѣщаетъ въ себѣ EF и O, и раздѣляетъ GH въ O на двѣ равныя части.

146) 18 квад. фут.

147) $115\,^7/_8$ кв. ф.; $16\,^7/_8$ кв. ф.

148) 24 фут. и 22 фут.

149) $\frac{h}{2}\sqrt[3]{4}$.

150) На 4,6279 фут.

151) 157, 464 куб. фут.

152) 1, 8 фут. — 153) $\frac{2a^2h^3}{3(2b^2-a^2)}$.

154) 2, 7 фут. и 1, 6 фут.

155) $\frac{1}{h}\sqrt[3]{Ah(Ah-3V)^2}$.

156) $\frac{h}{a-b}\left(a-\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}}\right)$.

157) 12, 515 куб. фут.

158) Если число ребръ всѣхъ граней равно n, то многогранникъ имѣетъ $\frac{n}{2}$ ребръ. Почему многогранникъ содержитъ n плоскихъ угловъ?

159) На сколько тетраэдровъ можетъ быть раздѣлена всякая пирамида? Всякій многогранникъ можетъ быть раздѣленъ на пирамиды, имѣющія общую вершину внутри многогранника или въ одной изъ его вершинъ и т. д.

160) Проведя Ab и Cb, получимъ $\frac{ABCS}{AbCS}=\frac{BCS}{bCS}=\frac{BS}{bS}$. Потомъ $\frac{bACS}{bacS}=\frac{ACS}{acS}=\frac{SA.SC}{Sa.Sc}$. Наконецъ $\frac{ABCS}{abcS}=\frac{SA\,.\,SB\,.\,SC}{Sa\,.\,Sb\,.\,Sc}$.

161) Площадь основанія ABC правильнаго тетраэдра SABCD $=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Высота SH есть катетъ прямоуг. треуг. SGH, коего гипотенуза есть ребро AB, а другой катетъ AH есть радіусъ окружности, описанной около треуг. ABC. Такъ какъ AH $=\frac{a}{\sqrt{3}}$, то SH $=\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ и SABC $=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

162) $\frac{SBD}{SACD}=\frac{ABD}{ACD}=\frac{BD}{CD}$. Такъ какъ точка D равно-отстоитъ отъ SAB и SAC, то пирамиды DABS (или SABD) и DACS (или SACD) имѣютъ общую высоту и $\frac{SABD}{SACD}=\frac{SAB}{SAC}$ и т. д.

163) Двѣ точки A и B расположены симетрически относительно плоскости, проведенной чрезъ средину C прямой AB ⊥ къ этой прямой. Вершины A и a, B и b, C и c треугольниковъ ABC и abc суть симетрическія относительно плоск., если она проведена ⊥ къ Aa, Bb и Cc чрезъ среднія точки D, E, F этихъ прямыхъ. Такъ какъ AD $=a$D, BE $=b$E, CE $=c$F, то равныя прямыя BC и bc суть симетрическія относительно EF. Также AB $=ab$, AC $=ac$ и слѣдов. треуг. ABC $=$ треуг. abc. Изъ

какой-нибудь точки G плоск. P возставимъ къ ней перпендикуляры, пересѣкающіеся съ плоскостями треугольниковъ въ точкахъ H и h. Плоскости BCcb и AHha ⊥ къ плоск. P, слѣдов. прямая Kk ихъ пересѣченія также ⊥ къ плоск. P и къ EF Отсюда слѣдуетъ, что KL = kL (прямыя Kk и EF пересѣкаются въ L) и такъ какъ AD = aD, то прямыя AK и ak суть симетрическія относительно DL и HG = Hg; слѣд. два треуг., которыхъ вершины расположены симетрически относительно плоскости, равны и находятся въ плоскостяхъ симетрическихъ. Такъ какъ поверхности двухъ многогранниковъ могутъ быть раздѣлены на треугольники, расположенные по два симетрически, то всякой точкѣ перваго многогранника соотвѣтствуетъ симетрическая точка на поверхности втораго многогранника.

164) См. доказ. 159.

164a) Можно раздѣлить эти многогранн. на симетрич. тетраэдры; но два симетрич. тетраэдра равномѣрны; слѣдов. и т. д.

165) $\frac{OA}{Oa}=\frac{OB}{Ob}=\frac{OC}{Oc}$; слѣдов. сѣченіе abc тетраэдра OABC ∥ къ основанію ABC и ему подобно. Также грани abd и ABD ∥ и подобны и т. д.

166) 141,3 квад. фут.

167) 25 фут. — 168) 2,1 фут.

169) На 25,61 квад. ф. больше.

170) 84,78 куб. фут.

171) 763,02 куб. фут.

172) На 43,2 куб. фут.

173) 6,818 фута.

174) $5\,^1/_3$ дюйм. — 175) $\frac{P^2}{4\pi h}$.

176) $\frac{D}{8}(2T-\pi D^2)$.

177) $2\pi R^3$ и $6\pi R^2$.

178) $\frac{T}{3}\sqrt{\frac{T}{6\pi}}$.

179) $\frac{P}{8\pi^2}(2\pi T-P^2)$.

180) Діаметръ = 2 ф. или = 4,74 ф.; высота = 8 ф. или = 1,42 ф.

181) $2\left(\frac{V}{h}+\sqrt{\pi Vh}\right)$.

182) Діам. $=\sqrt{\frac{4V}{S}}$; выс. $=\frac{S^2}{4\pi V}$.

183) $2\,^1/_2$ фут. — 184) 5 футъ.

185) 33 фут. — 186) 15 футъ.

186) 11 фут. — 188) 31,4 куб. ф.

189) 1,354 куб. ф. и 2,646 куб. ф.

190) $2\,^1/_2$ фута.

191) Прямыя пересѣченія двухъ параллельныхъ плоск. третьею плоскостью параллельны между собою и также производящія цилиндрич. поверх. параллельны.

192) a) Такъ какъ производящія прямаго цилиндра ⊥ къ его основаніямъ, то они ⊥ также къ прямымъ, находящимся въ основаніяхъ, а прямыя, происшедшія отъ пересѣченія основаній плоскостью, ∥ между собою и т. д. b) Прямыя пересѣченія

основаній съ плоскостью, проходящею чрезъ ось цилиндра, суть діаметры основаній; слѣдов. образовавшіеся прямоуг. равны.

193) Соединимъ точку C, лежащую внѣ основанія цилиндра, съ какою-нибудь точкою D производящей AB. Всѣ точки прямой CD, кромѣ D, лежатъ внѣ цилиндра. Въ самомъ дѣлѣ, проведемъ EF чрезъ точку E прямой CD ∥ къ AB. Эта прямая должна пересѣкаться съ BC, и такъ какъ точка F пересѣченія находится внѣ цилиндра, то и EF лежитъ внѣ цилиндра.

194) Чрезъ AB и ось CC′ проведя плоскость, получимъ трапецію ABDE, коей бокъ DE, проходящій чрезъ центръ C′ основанія, есть діаметръ. Такъ какъ C′D = C′E, то также AF = BF (F есть точка пересѣченія прямыхъ CC′ и AB).

196) 59,66 квад. фут.

197) $383^5/_8$ квад. фут.

198) 153,3462 квад. фут.

199) Ребро = 15 ф.; высота = 14,85 ф.

200) Діам. = 16 фут.; высота = 15 фут.

201) Ребро = 8,5 ф.; діам. = 8 ф.

202) Діам. = 4 ф.; высота = $3^3/_4$ ф.

203) Діам. = 2,8 фут.; высота = 11,91 ф. — 204) 4 фута.

205) Высота = 2,4 фут.; діам. = 1,4 ф.

206) Діам. = 1 ф.; ребро = 8 ф.

207) 4,13 куб. фут.

208) 28,76466 куб. ф.

209) 5,547333 куб. фут.

210) 3,43359 куб. фут.

211) 1109,99 куб. фут.

212) 5,62 ф. — 213) 36 футъ.

214) 514,8 ф. — 215) 1,2384 ф.

216) A = 16,485 куб. ф.; B = 6,28 куб. ф.

217) 32 куб. ф. — 218) 16 ф.

219) 113,04 квад. фут.

220) 314,785 квад. ф.

221) 36 футъ.

222) Ребро = 5 ф.; высот. = 4,957 ф.

223) Ребро = 5,2 ф.; высота = 4,8 ф.

224) 2 ф. и 0,5 фут.

225) 5 ф. и 2 фут.

226) 3 фута и 1 фут.

227) Вычисливъ вмѣстимость бочки по формулѣ $^1/_3\pi h\,(R^2 + Rr + r^2)$, получимъ 42,6412 куб. фут.; это число слишкомъ мало. Для полученія болѣе точнаго числа употребляется формула $^1/_3\pi h\,(2R^2 + r^2)$, по которой вмѣстимость бочки равна 46,9116 куб. ф.

228) 91,83872 куб. ф.

229) 19,924 куб. ф.

230) $\frac{\pi h}{81}\,(19R^2 + r^2 + 7Rr)$; $\frac{\pi h}{81}\,[7(R^2 + r^2) + 13Rr]$; $\frac{\pi h}{81}\,(R^2 + 19r^2 + 7Rr)$.

231) 3 фута.

232) $\frac{h}{R-r}\left(R-\sqrt[3]{\frac{R^3+r^3}{2}}\right)$;
радіусъ $=\sqrt[3]{\frac{R^3+r^3}{2}}$.

233) Радіусы = 5 фут. и 3 фут.; высота = 12 фут.

234) Кругъ, проведенный чрезъ средину ребра, равенъ половинѣ основанія конуса и т. д.

235) Доказательство основывается на происхожденіи прямаго конуса отъ обращенія прямоуг. треуг. около его катета.

236) $V = {}^1/_3\pi BC^2 . AB$,
$V' = {}^1/_3\pi \overline{AB}^2 . BC$; слѣдоват. и т. д.

237) Выводится изъ общей формулы, выражающей объемъ прямаго конуса.

238) Назвавъ радіусъ основанія конуса чрезъ R, получимъ $R^2 = l^2 - h^2 = (l+h)(l-h)$ и т. д.

239) Соединимъ D съ какою-нибудь точкою E производящей SC и проведемъ SG чрезъ S и какую-нибудь точку F прямой DE; прямая SG пересѣчетъ касательную въ точкѣ G, лежащей внѣ конуса; слѣдов. прямая SG лежитъ внѣ конуса и т. д.

240) Представимъ себѣ шаръ, коего радіусъ равенъ радіусу основанія цилиндра и коего центръ находится на оси цилиндра. Большой кругъ K шара, параллельный къ основанію цилиндра, перпендикуляренъ къ его оси и производящимъ; слѣд. производящія цилиндра касаются къ шару въ точкахъ, лежащихъ на окружноси большаго круга.

241) Разсѣчемъ цилиндръ плоскостью, проходящею чрезъ его ось PP'; получимъ квад. ABCD. Вписавъ въ этомъ квадратѣ окружность PEP'F круга, представимъ себѣ, что фигура обращается около оси PP'; тогда квад. ABCD образуетъ равнобочный цилиндръ, а окружность PEP'F произведетъ шаръ. Прямая EF, соединяющая противоположныя точки E и F касанія, есть діаметръ круга PEFP, перпендикулярный къ оси PP'; слѣдов. EF опишетъ большой кругъ, коего окружность находится на поверхности цилиндра.

242) Разсѣчемъ конусъ плоскостью, проходящею чрезъ его ось; получимъ равнобедр. треуг. SAB, коего высота SC равна оси конуса. Вписавъ въ этомъ треуг. окружность CEF, представимъ себѣ, что фигура обращается около оси SC; тогда треуг. SAB образуетъ конусъ, а окружность CEF произведетъ шаръ. При этомъ перпендикуляръ EG, опущенный изъ точки E касанія на высоту SC, опишетъ малый кругъ, коего окружность находится на поверхности конуса.

243) Должно вывести пропорцію изъ подобныхъ прямоуг. треуг.

244) Требуется доказать, что прямыя AO, BO, DO и т. д., соединяющія центръ O съ точками данной окружности, пересѣкаетъ поверх. шара съ точкахъ a, b, d и т. д., лежащихъ на окружности круга, параллельнаго къ данному кругу C.

245) Изъ центра C шара опустимъ ⊥ CD на AB, и на CD опишемъ окружность въ плоскости, перпендикулярной къ AB. Эта окружность пересѣчетъ поверх. шара въ точкахъ D и E. Наконецъ проведемъ плоск. чрезъ D и AB, и еще плоск. чрезъ E и AB.

246) Основанія перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ точекъ D и E касанія на AB, совпадаютъ; а потому образуются равные треугольники.

247) Основанія перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ центровъ шаровъ на AB, совпадаютъ.

248) Назовемъ чрезъ C центръ шара, касающагося къ цилиндрич. поверх. по направленію окружности большаго круга CD и къ данной плоск. P въ точкѣ F. Центръ C находится на оси CC′ цилиндрич. поверх. и CF ⊥ къ плоск. P. Плоск. Q, проведенная чрезъ CC′ и CF, ⊥ къ плоск. P. Прямая AB пересѣченія плоскостей P и Q пересѣкаетъ производящія DD′ и EE′ и касается къ окружности большаго круга DFE. Такъ какъ эта окруж. касается къ DD′, EE′, AB, то должно найти центръ окружности круга, касающейся къ тремъ даннымъ прямымъ.

249) 22,608 квад. фут.

250) $3^1/_2$ фут. — 251) 2,5 фут.

252) 70,88235 квад. фут.

253) 28,26 квад. фут.

254) 7 фут.

255) 12,96192 квад. фут.

256) 345, 239552 квад. фут.

257) 1 футъ.

258) 0,527997 куб. фут.

259) 3 фута. — 260) 4,62 кв. ф.

261) $2\pi R (R - \sqrt{R^2 - r^2})$.

262) 3,14 кв. ф. 263) 5,14 ф.

264) 2 фута.

265) $\frac{a}{2} + {}^1/_2 \sqrt{\frac{2S - \pi S^2}{\pi}}$; $\frac{a}{2} - {}^1/_2 \sqrt{\frac{2S - \pi S^2}{\pi}}$.

266) См. теор. 126 и 172.

267) Діаметръ шара $= \frac{P}{\pi}$ и поверхность шара $= P.\frac{P}{\pi} = \frac{P^2}{\pi}$.

268) Полная поверхность Q прямаго цилиндра, описаннаго около шара, коего радіусъ равенъ R, выразится чрезъ $6\pi R^2$ и т. д.

269) Назвавъ хорду, соотвѣтствующую дугѣ сферическаго сегмента чрезъ l, высоту сегмента чрезъ h, діаметръ шара чрезъ D, по-

верх. сегмента чрезъ S, радіусъ его основанія чрезъ r и площадь этого основанія чрезъ Q, получимъ $S = \pi l^2$ и $Q = \pi r^2$; но $\frac{D}{l} = \frac{l}{h}$ и $\frac{h}{r} = \frac{r}{D-h}$, откуда $l^2 = D.h$ и $r^2 = h.(D-h)$; слѣд. и т. д.

271) Проведемъ діаметръ AE || къ оси MN и діаметръ FD ⊥ къ ней. Потомъ раздѣлимъ полуокружность AFE на n весьма малыхъ, но равныхъ частицъ AG, GH, HK и т. д. и полуокруж. ADE на такія-же частицы AG′, G′H′, H′K′ и т. д. Опуствивъ изъ точекъ A, G, H, K.... перпендикуляры Aa, Gg, Hh... на MN и продолживъ FD до пересѣченія f съ MN, получимъ четыреугольники $AagG$, $AagG'$, $GghH$, $G'ghH'$ и т. д., которые мы можемъ принять за трапеціи. Обращеніемъ этихъ трапецій около MN образуются усѣченные конусы съ круговыми основаніями. Сумма боковыхъ поверхностей этихъ конусовъ составляетъ поверхность кольца. Изъ средины m дуги AG опустимъ на MN ⊥ mp, проходящій чрезъ средину n дуги AG′; тогда боковая поверхность, происшедшая отъ обращенія дугъ AG и AG′, выразится чрезъ $2\pi AG\,(mp + np)$; но $mp = Cf + mo$ и $np = Cf - mo$ (o есть точка пересѣченія прямыхъ mp и AE); слѣдов. получимъ $2\pi AG.2Cf$. Точно такимъ-же образомъ узнаемъ, что боковая поверх., происшедшая отъ обращенія дугъ GH и G′H′, выразится чрезъ $2\pi.2Cf.GH$ и т. д.

272) Проведя радіусы OB и OC, получимъ равные равносторонніе треуг. AOB и COD, въ которыхъ изъ B и C опустимъ перпендикул. Bb и Cc на AD; тогда $Ab = bO = Oc = cD$ или $Ab = Dc = {}^1/_2 bc$; $Q = 2\pi BO.Ab$, $Q' = 2\pi BO.Dc$, $Q + Q' = 4\pi BO.Ab$ и $S = 2\pi BO.bc = 4\pi BO.Ab$ и т. д.

273) Сферическій двусторонникъ PCP′D содержится въ шаровой поверх. S столько разъ, сколько разъ дуга CD содержится въ окруж. M большаго круга, т. е. $\frac{PCP'D}{S} = \frac{CD}{M}$; откуда $\frac{PCP'D}{S} = \frac{CD.PP'}{M.PP'}$. Такъ какъ $S = M.PP'$, то и $PCP'D = CD.PP'$.

274) Въ кругѣ вписанъ одностороннiй треуг. BDE и чрезъ вершину B ⊥ къ боку DE проведемъ діаметръ BA. Такъ какъ радіусъ круга, вписаннаго въ равностороннемъ треугольникѣ BDE, равенъ R, то радіусъ круга, описаннаго около этого треуг., равенъ 2R и бокъ $DE = 2R\sqrt{3}$. Обращеніемъ круга ADB и треугольника BCD около діаметра AB

образуются шаръ и равнобочный конусъ. Полная поверх. этого конуса равна $9\pi R^2$ и поверхность образовавшагося шара $= 4\pi R^2$; слѣдов. и т. д.

275) 47,68875 куб. дюйм.

276) 27,611718 куб. дюйм.

277) 3 дюйма. — 278) 9 футъ.

279) 84,78 куб. фут.

280) 5 дюйм. — 281) 2,5 фут.

282) 82,4 куб. дюйм.

283) $523\,^1/_3$ куб. дюйм.

284) 2,4 дюйм.

285) 7,065 квад. дюйм.

286) 3 фут. и 2 фут.

287) 8,37333 куб. фут.

288) 41,568 куб. дюйм.

289) 20,0175 куб. фут.

290) 45,006 куб. фут.

291) 14,025 куб. фут.

292) 1,46952 куб. фут.

293) 0,850416 и 7,32666 куб. фут.

294) 2 фута.

295) На 1,0071 куб. фут.

296) 225,798 куб. дюйм.

297) 113,04 и 33,493 куб. ф.

298) 12 и 8 дюйм.

299) 4,2 и 3,5 дюйм.

300) Объемъ шара равенъ $\frac{4\pi R^2}{3}.R = \frac{S}{3}.{}^1/_2\sqrt{\frac{S}{\pi}} = \frac{S}{6}\sqrt{\frac{S}{\pi}}$, гдѣ S поверх. шара.

301) Назвавъ чрезъ a ребро куба и чрезъ R радіусъ шара, мы имѣемъ $R = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}}$ и объемъ шара $= \frac{4}{3}\pi.\ \frac{3a^3}{4\pi}\sqrt{\frac{6}{\pi}} = a^3\sqrt{\frac{6}{\pi}}$ и т. д.

302) Если радіусъ шара равенъ R, то объемъ описаннаго цилиндра $= 2\pi R^3$ и т. д.

303) Назвавъ чрезъ R радіусъ шара, мы получимъ объемъ конуса $= {}^4/_3\pi R^3$.

304) Изъ прямоуг. треуг. COc (фиг. 324), въ которомъ катетъ $OC = R$ и катетъ $Oc = R - cN = R - h$, получимъ $\overline{Cc}^2 = R^2 - (R - h)^2 = 2Rh - h^2$. Замѣнивъ величину $\overline{Cc}^2$ въ формулѣ (185), выражающей объемъ шароваго сегмента, получимъ $v = {}^1/_6\pi h^3 + {}^1/_2\pi h(2Rh - h^2) = \pi Rh^2 - {}^1/_3\pi h^3 = \frac{\pi h^2}{3}(3R - h)$. Объемъ V образовавшагося пояса равенъ разности объемовъ v и v' двухъ сегментовъ, коихъ высоты суть h и h'; слѣдов. $V = v - v' = \frac{\pi h^2}{2}(3R - h) - \frac{\pi h'^2}{3}(3R - h') = \pi[(h^2 - h'^2)R - {}^1/_3(h - h'^3)]$.

305) Ребро этого описаннаго конуса есть бокъ правильнаго треуг., описаннаго около круга, коего радіусъ $= R$; слѣдов. это ребро $= 2R\sqrt{3}$ и радіусъ основанія конуса $= R\sqrt{3}$. Изъ выраженія $x^2 = (2R\sqrt{3})^2 - (R\sqrt{3})^2 = 9R^2$ узнаемъ, что высота x конуса $= 3R$. Объемъ K этого конуса $= 3\pi R^3$, объ-

емъ L шара $= {}^4/_3\pi R^3$ и объемъ M описаннаго цилиндра$=2\pi R^3$; слѣдов. и т. д.

306) См. № 305.

307) Объемъ V (177) шароваго сектора $AMBC = S.\frac{R}{3}$, гдѣ R есть радіусъ CA и S выражаетъ поверх. сферическаго сегмента, происшедшаго отъ обращенія дуги AMB; но (171) $S=\pi.\overline{AB}^2$, слѣдов. $V=\pi.\overline{AB}^2\cdot\frac{R}{3}$. Объемъ V' прямаго конуса, происшедшаго отъ обращенія прямоуг. треуг. AEC, равенъ $\pi.\overline{AE}^2\cdot\frac{R}{3}$; слѣдов. и т. д.

308) Отъ обращенія прямоугольника BCC'B' (фиг. 328) происходитъ цилиндръ, коего объемъ $V=\pi\overline{AE}^2.BC$. Въ то-же время равные прямоугольные треуг. ABB' и ACC' производятъ два конуса, коихъ объемы суть $v=\pi\overline{AE}^2\cdot\frac{BC}{6}$ и $v'=\pi\overline{AE}^2.\frac{BC}{6}$. Отсюда $V-(v+v') = {}^2/_3\pi\overline{AE}^2.BC$.

309) Изъ D опустимъ ⊥ DE на AB и ⊥ DF на BC. Отъ обращенія параллелограма около AB происходитъ объемъ $V=\pi\overline{DE}^2\cdot AB$ и отъ обращенія параллелограма около BC происходитъ объемъ $V'=\pi\overline{DF}^2.BC$; отсюда $\frac{V}{V'}=\frac{\overline{DE}^2.AB}{\overline{DF}^2.BC}$, но $DE.AB = DF.BC =$ площади ABCD, слѣдов. $\frac{V}{V'}=\frac{DE}{DF}$. Изъ подобныхъ прямоугольныхъ треугольниковъ ADE и CDF мы имѣемъ $\frac{DE}{DF}=\frac{AD}{DC}=\frac{BC}{AB}$; слѣдовательно $\frac{V}{V'}=\frac{BC}{AB}$.

310) 1) Построимъ $a^2+b^2=y^2$ и потомъ $x=\frac{y^2}{c}$. 2) Построимъ $\frac{a+b}{d+f}=\frac{x}{c}$. 3) Сдѣлаемъ $ab=y^2$, $cd=z^2$ и т. д. 4) $\frac{a^3-b^3}{c}=\frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{c}$. Построивъ $ab=y^2$ и потомъ квадратъ z^2, равный суммѣ квадратовъ $a^2+y^2+b^2$, получимъ $x=\sqrt{\frac{(a-b)z^2}{c}}$. Наконецъ построимъ $\frac{(a-b)z}{c}=v$ и $x=\sqrt{vz}$.

5) $\sqrt{a^2+\sqrt{b^4+c^4}} = \sqrt{a^2+\sqrt{b^4+\frac{b^2c^4}{b^2}}} = \sqrt{a^2+b\sqrt{b^2+\frac{c^4}{b^2}}}$. Построимъ $\frac{c^2}{b}=y$, потомъ $\sqrt{b^2+y^2}=z$ и наконецъ $x=\sqrt{a^2+bz}$ и т. д. 6) Сдѣлаемъ $df=y^2$ и $gh=z^2$; получимъ

$x=\sqrt{a^2+c^2+z^2-(b^2+y^2)}$ и т. д.

312) Сторона квадрата равна $x=\frac{a^2}{a+h}$.

313) Обратимъ треуг. LMN въ такой равномѣрный ему треуг. L'M'N', чтобы его уголъ равнялся ∠ ABC. Потомъ построимъ между BA и BC треуг. BGH, равный треугольнику L'M'N' и проведемъ чрезъ G прямую GK || къ DE и т. д. $x = \sqrt{BK.BD}$.

314) $AB = x =$
$-\frac{1}{2} \pm \sqrt{e^2 - r^2 + \frac{a^2}{4}}$.
Отрицательный корень не удовлетворяетъ вопросу.

315) Разстояніе центра искомаго круга отъ данной дуги, взятое по прямой, раздѣляющей данный прямой ∠ на двѣ равныя части, равно $x = -a \pm \sqrt{2a^2}$. Опредѣлить значеніе отрицательнаго корня.

316) Основаніе $=$
$\frac{\sqrt{d^2 + 2a^2} + \sqrt{d^2 - 2a^2}}{2}$;
высота $=$
$\frac{\sqrt{d^2 + 2a^2} - \sqrt{d^2 - 2a^2}}{2}$.

317) $x = d(2 + \sqrt{2})$;
$y = d(1 + \sqrt{2})$.

318) $x = a(2 - \sqrt{2})$;
$y = a(-1 + \sqrt{2})$.

319) 1) $\left.\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right\} = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{2} - \left(\frac{b}{2}\right)^2}$;
2) $\left.\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right\} = \frac{d}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{2} - \left(\frac{d}{2}\right)^2}$.

320) $\left.\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right\} = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{2} - hc}$;
$z = -h + \sqrt{a^2 + h^2}$.

321) $x = \frac{a(1 + \sqrt{5})}{2}$.

322) 1) $x = 2a(2 - \sqrt{3})$;
$y = a(-3 + 2\sqrt{3})$.
2) $x = 2b(2 + \sqrt{3})$;
$y = b(3 + 2\sqrt{3})$.

323) Бокъ квадрата $=$
$\sqrt{\frac{a}{2} . \frac{a}{2} \sqrt{3}}$.

324) Бокъ треугольника $= \frac{2a}{\sqrt[4]{3}}$.

325) Катетъ $x = a \pm \sqrt{\frac{a^2}{2}}$.
Который изъ корней удовлетворяетъ вопросу?

326) Означивъ BC чрезъ a, высоту треуг. чрезъ h, высоту трапеціи BCED чрезъ y и DE чрезъ x, получимъ $x = \sqrt{\frac{m}{m+n} a^2}$.

327) Означивъ чрезъ z разстояніе CG перпендикуляра FG, опущеннаго изъ F на діаметръ AB, DC = CE чрезъ a, FC чрезъ r, FD чрезъ x и FE чрезъ y, получимъ $z = \frac{b^2}{4a}$.

328) $x = k . \frac{k\sqrt{c^2 - h^2} \pm h\sqrt{c^2 - k^2}}{h^2 - k^2}$;
$y = h . \frac{k\sqrt{c^2 - h^2} \pm h\sqrt{c^2 - k^2}}{h^2 - k^2}$.

ОШИБКИ И ОПЕЧАТКИ.

Стран.	Стр.	Напечатано.	Должно быть.
9		въ фиг. 234 пропущена прямая FC.	
32	3 сверху	остальныхъ	остальныхъ угловъ
41		въ фиг. 271 четвертая вершина верхняго основанія параллелопипеда должна быть названа буквою H.	
42		въ фиг. 272 пятая вершина сѣченія FLKH должна быть названа буквою G.	
46	15 сверху	*bfghaedc*	*bfghkaedc*
64		въ фиг. 286 пропущена прямая MT.	
71		въ фиг. 291 пропущены прямыя AE и CE.	
93	2 снизу	225.	125.
94	8 сверху	многоугольникъ	многоугольникъ,
109	2 сверху	отнованій равны	основаній равны
		R и R′ подобны,	R и R′, подобны,
116		въ фиг. 314 пропущены прямыя AP, CP, BP и CO.	
146	4 снизу	знмменателя	знаменателя
156		въ фиг. 334 пропущена буква G.	

ОГЛАВЛЕНІЕ.

ЧАСТЬ III.

ОТДѢЛЪ I.

О плоскости.

Стран.

ОТДѢЛЪ II.

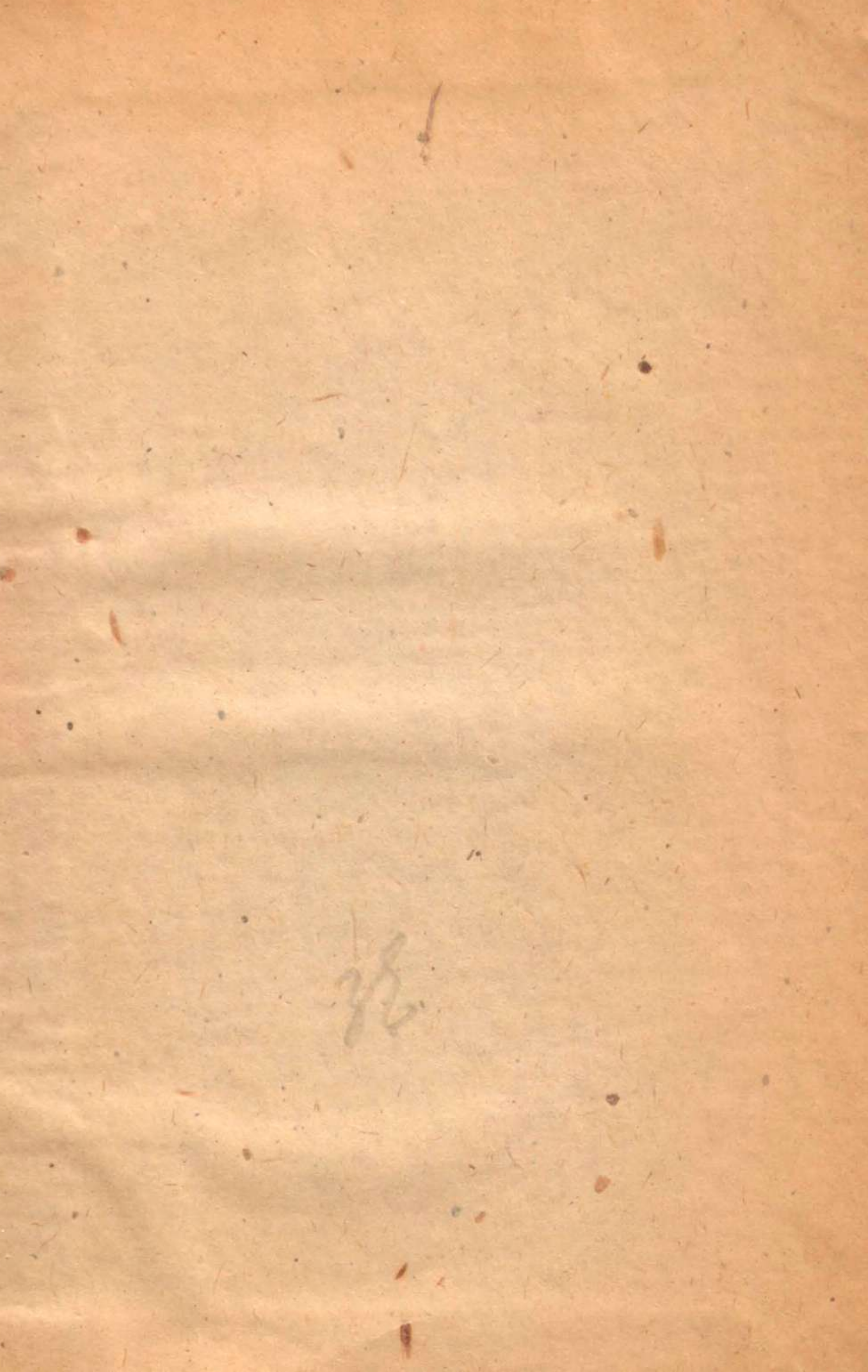
Многогранники.

Стран.

ОТДѢЛЪ III.

О круглыхъ тѣлахъ.

Стран.




2007089955